Διάτρεξη Γραφημάτων

Διάτρεξη γραφήματος

- Γράφημα G(V,E) όπου $V=\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$
- Διάτρεξη (traversal): επίσκεψη όλων των κορυφών του γραφήματος
- Δύο μέθοδοι διάτρεξης:
  - Αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος
  - Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος
- Δημιουργία ενός δάσους από δέντρα.
- Κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε μία συνεκτική συνιστώσα:
  - Συνεκτική συνιστώσα:
    - υπογράφημα του G, όπου οποιοιδήποτε δύο κόμβοι του υπογραφήματος συνδέονται με ένα μονοπάτι αποτελούμενο αποκλειστικά από ακμές του υπογραφήματος
    - το υπογράφημα είναι μέγιστο ως προς την παραπάνω ιδιότητα, δηλ. δεν περιέχεται σε μεγαλύτερο υπογράφημα για το οποίο ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

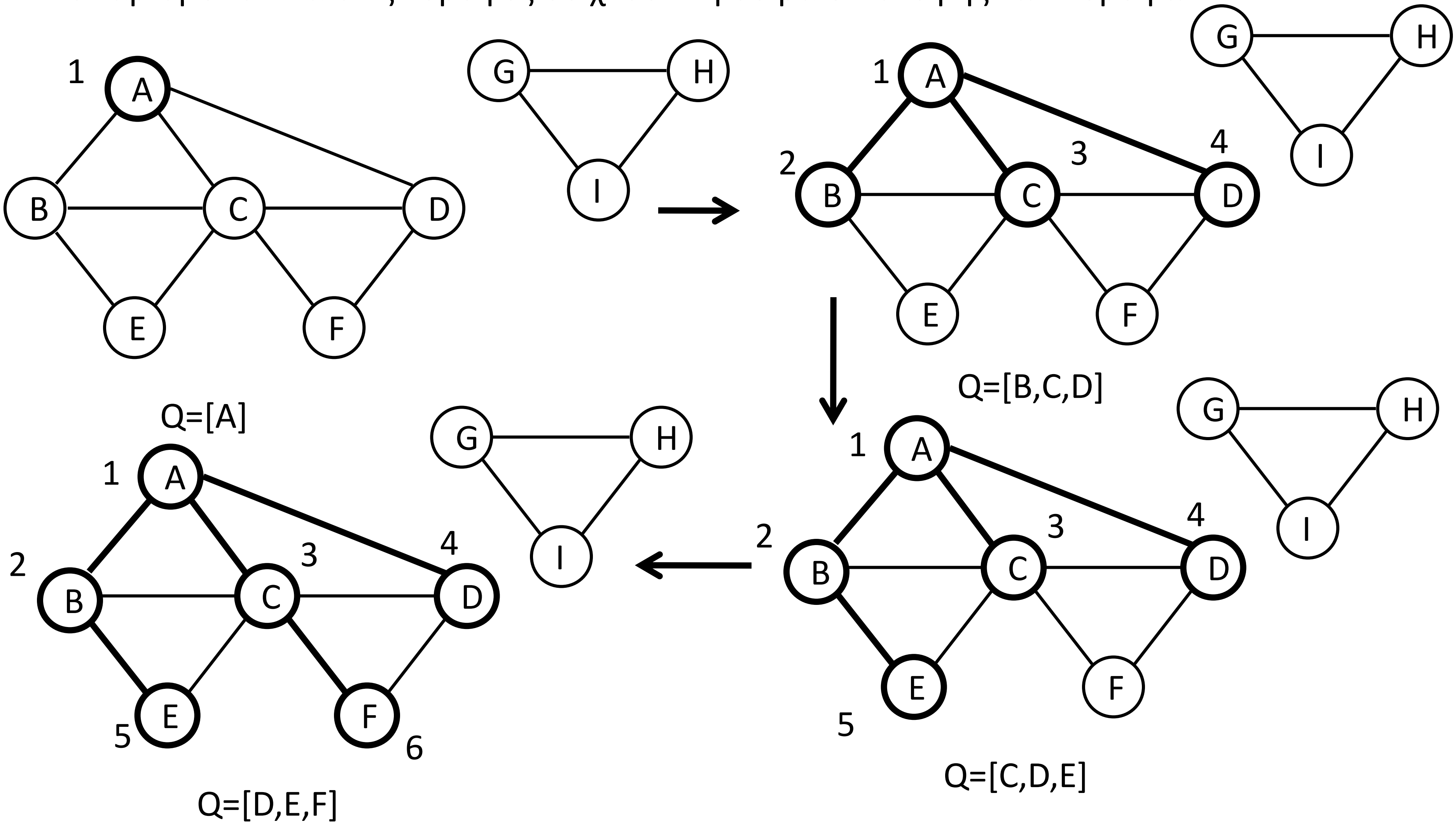
Αναζήτηση Πρώτα κατά Πλάτος (ΑΠΠ)

- Βασική ιδέα:
  - Επίσκεψη πρώτα της κορυφής V_1
- Επίσκεψη όλων των γειτονικών κορυφών της V_1
- Για κάθε μία νέα κορυφή, επίσκεψη των γειτόνων της κορυφής που δεν τις έχουμε επισκεφθεί ήδη
- Επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας μέχρι να επισκεφτούμε όλες τις κορυφές του γραφήματος (εφόσον το γράφημα είναι συνεκτικό)
- Υλοποίηση με τη χρήση μίας δομής ουράς.

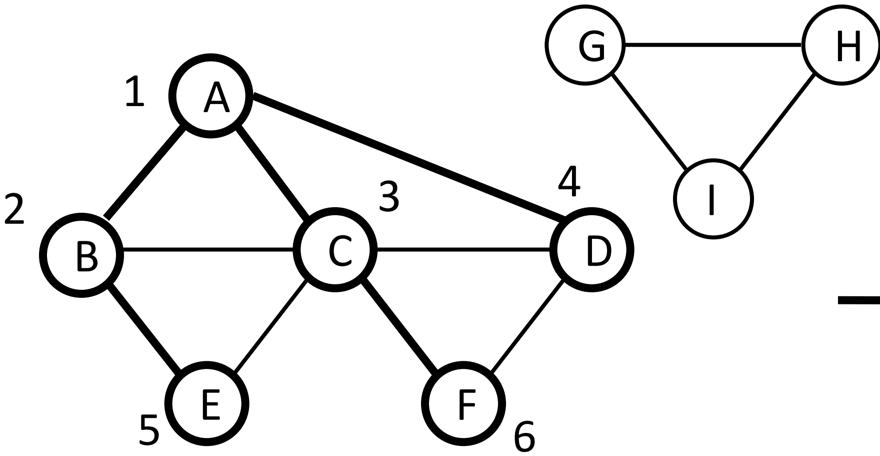
```
ΑΠΠ
Για κάθε κορυφή v του γραφήματος G
  Σημείωσε την v ως unvisited
 Τέλος_Για

Για κάθε κορυφή v του γραφήματος G
   Αν v είναι σημειωμένη ως unvisited τότε ΑΠΠ(v)
Τέλος_ΑΠΠ

Διαδικασία ΑΠΠ(v)
Q.add(v)
Σημείωσε την v ως visited
Ενόσω Q ≠ ∅
     v=Q.Delete
     Για κάθε γείτονα w του v
         Αν η w είναι σημειωμένη ως unvisited τότε
                    Q.add(w)
                    Σημείωσε την ακμή ως visited
         Τέλος_αν
      Τέλος_Για
Τέλος_Ενόσω
Τέλος_Διαδικασία
```

Αναζήτηση Πρώτα κατά Πλάτος - Παράδειγμα

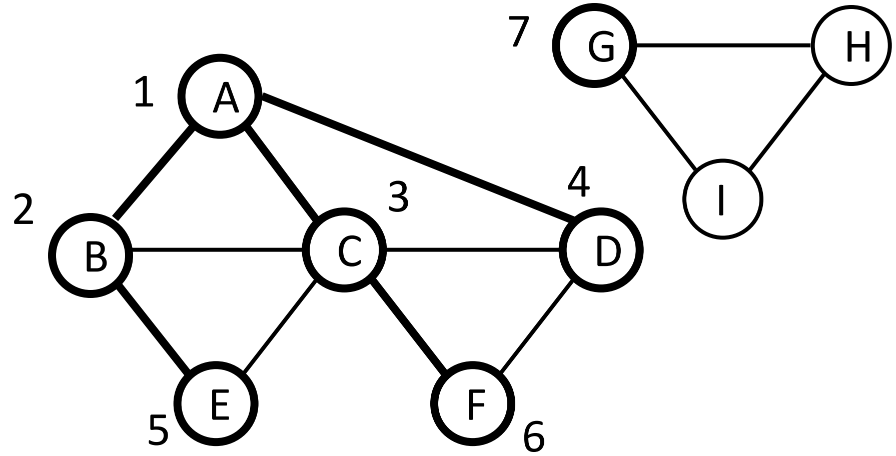
- Γράφημα με δύο συνεκτικές συνιστώσες
- Οι αριθμοί δίπλα στις κορυφές δείχνουν τη σειρά επίσκεψης των κορυφών



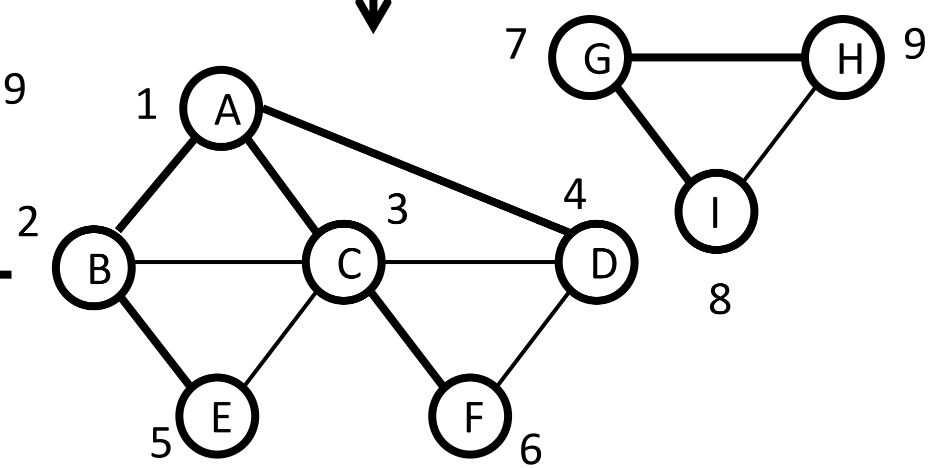
Αναζήτηση Πρώτα κατά Πλάτος – Παράδειγμα (Συν.)



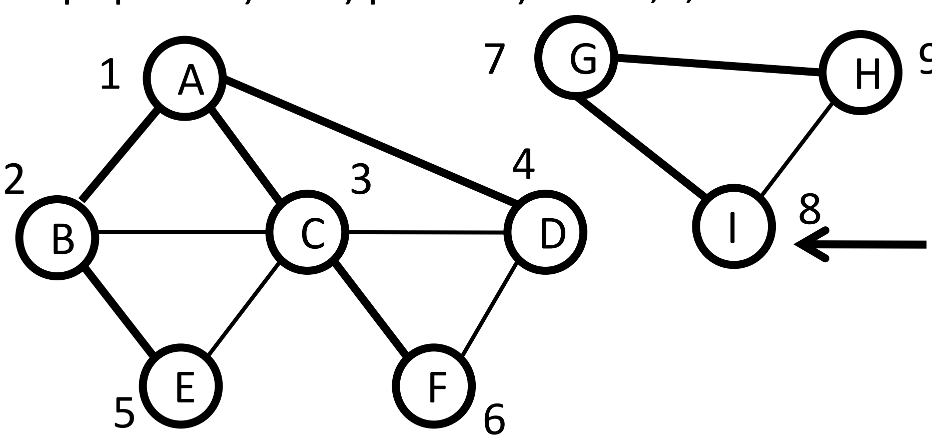
Q=[], η ουρά κενή αφού έχουμε επισκεφθεί ήδη όλους τους γείτονες των D,E,F



Q=[G]

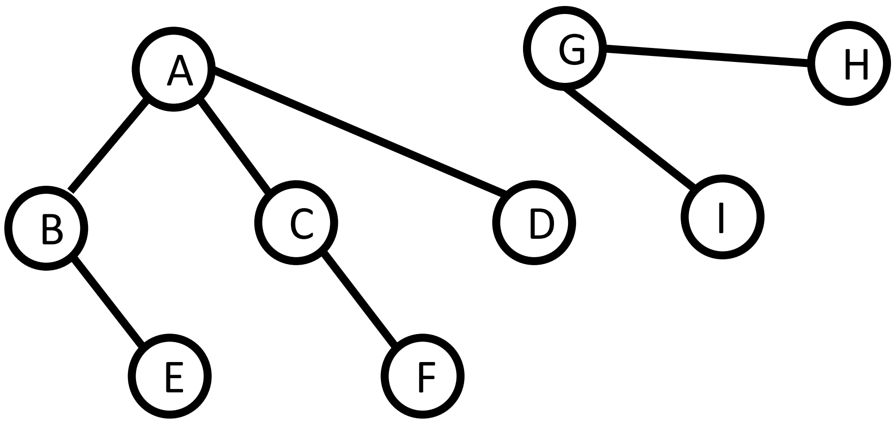


Q=[I,H]



Q=[], η ουρά κενή αφού έχουμε ήδη επισκεφθεί τους γείτονες των I και H

Αναζήτηση Πρώτα κατά Πλάτος – Παράδειγμα (Συν.)



Δάσος δύο δέντρων: κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε μία συνεκτική συνιστώσα

Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ)

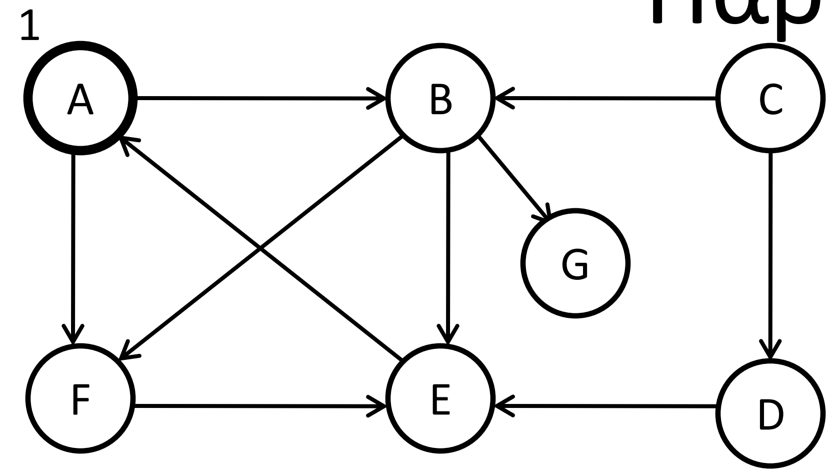
- Επίσκεψη πρώτα της κορυφής V_1
- Επίσκεψη ενός γείτονα της V_1 (έστω η κορυφή V_k)
- Επίσκεψη ενός γείτονα της V_k που δεν έχουμε ήδη επισκεφθεί
- Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι είτε:
  - να επισκεφτούμε όλους τις κορυφές ή
  - να φθάσουμε σε «αδιέξοδο»: δεν υπάρχουν γείτονες ή έχουμε ήδη επισκεφθεί όλους τους γείτονες της κορυφής
- Στη δεύτερη περίπτωση, οπισθοχωρούμε και πάμε στη κορυφή από την οποία φθάσαμε στη τρέχουσα κορυφή.
- Δοκιμάζουμε ένα νέο γείτονα της κορυφής αυτής και όλη η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται

```
ΑΠΒ
Για κάθε κορυφή v του γραφήματος G
  Σημείωσε την v ως unvisited
 Τέλος_Για

Για κάθε κορυφή v του γραφήματος G
    Αν v είναι σημειωμένη ως unvisited τότε ΑΠΒ(v)
Τελος_Για
Τέλος_ΑΠΒ

Διαδικασία ΑΠΒ(v)
Σημείωσε την v ως visited
Για κάθε γείτονα w του v
    Αν η w είναι σημειωμένη ως unvisited τότε ΑΠΒ(w)
Τέλος_Για
Τελος_Διαδικασία
```

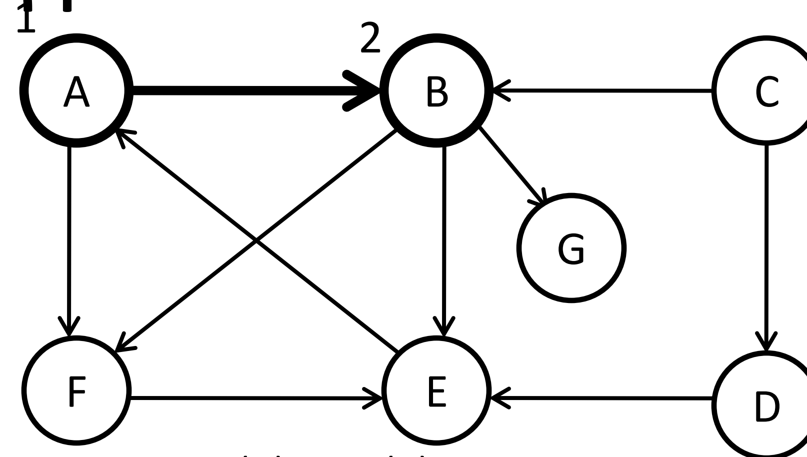
Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ)

- Αν το γράφημα G είναι διγράφημα, κάθε τόξο του γραφήματος μετά την ΑΠΒ μπορεί να είναι:
- τόξο δέντρο
- οπίσθια τόξο: τόξο που συνδέει ένα κόμβο με ένα πρόγονο του στο δέντρο που δημιουργείται με την ΑΠΒ
- εμπρόσθιο τόξο: τόξο που συνδέει ένα κόμβο με ένα απόγονο του στο δέντρο που δημιουργείται με την ΑΠΒ και δεν είναι ήδη τόξο δέντρου
- διασταυρωτικό τόξο: τόξο που συνδέει κόμβους που δεν έχουν σχέση προγόνου απογόνου. Οι δύο κόμβοι ενδέχεται να ανήκουν και σε διαφορετικά δέντρα

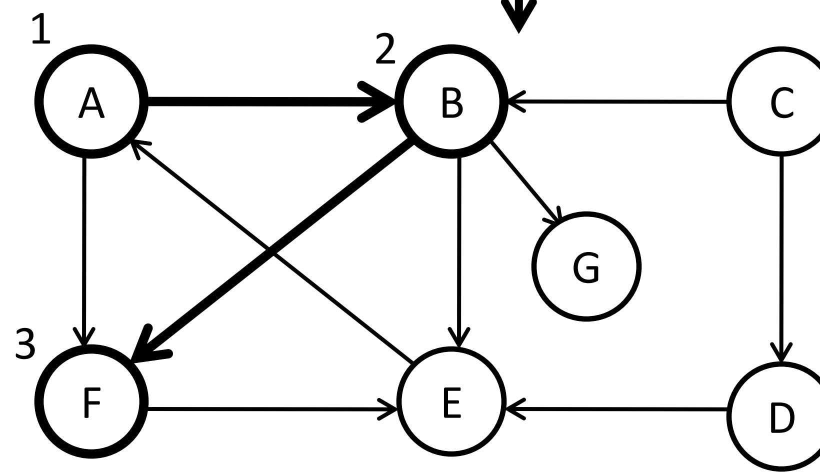
Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ) - Παράδειγμα



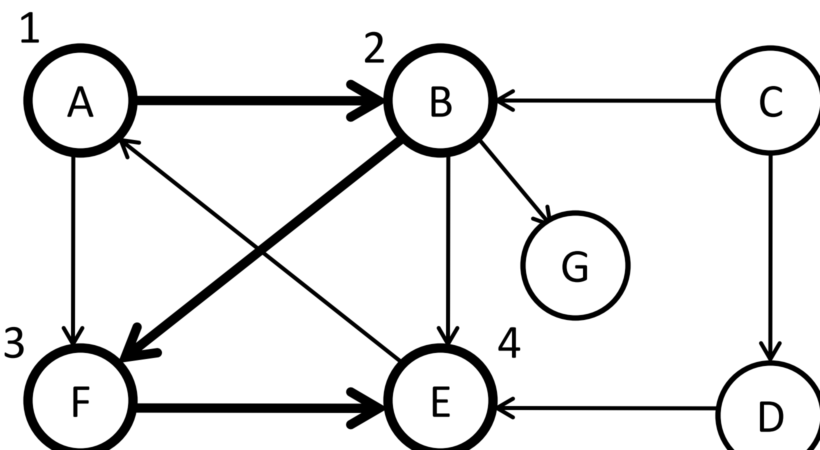
Αναδρομικές Κλήσεις σε Εξέλιξη (ΑΚΕ): ΑΠΒ(A)



ΑΚΕ: ΑΠΒ(A), ΑΠΒ(B)

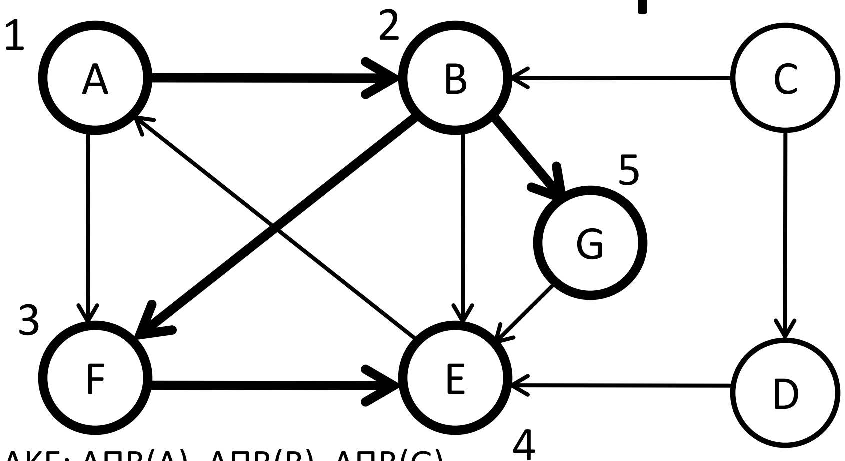


ΑΚΕ: ΑΠΒ(A), ΑΠΒ(B), ΑΠΒ(F)

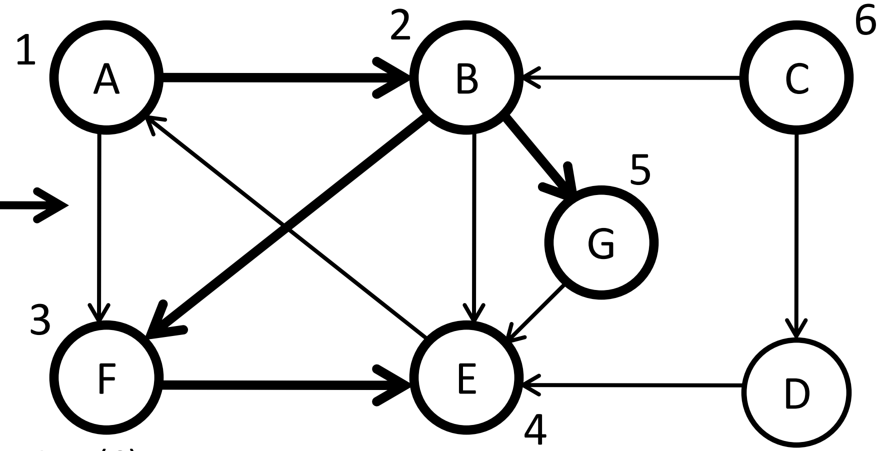


ΑΚΕ: ΑΠΒ(A), ΑΠΒ(B), ΑΠΒ(F), ΑΠΒ(E)

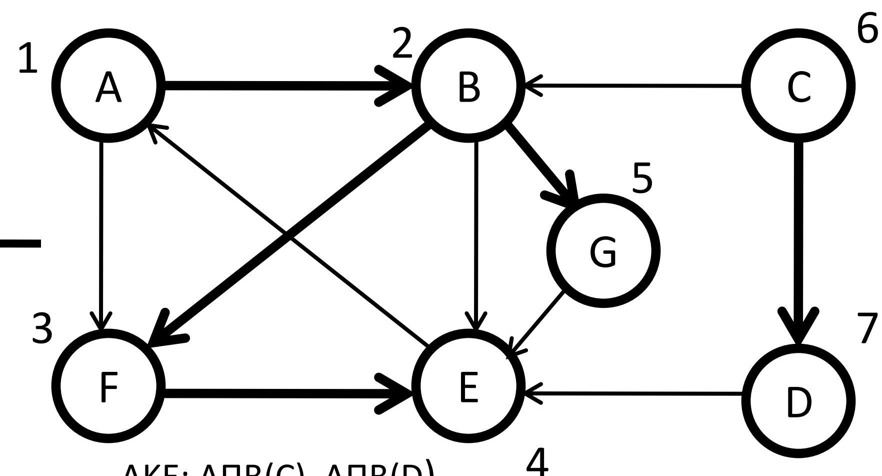
Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ) – Παράδειγμα (Συν.)



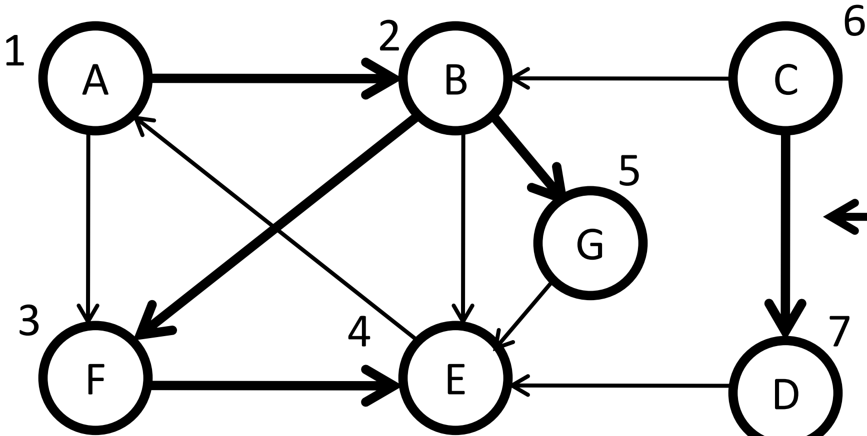
ΑΚΕ: ΑΠΒ(A), ΑΠΒ(B), ΑΠΒ(G)
Οι κορυφές E και F δεν έχουν γείτονες που δεν έχουμε επισκεφθεί.
Επιστροφή στην κορυφή B και μετά επίσκεψη της κορυφής G



ΑΚΕ: ΑΠΒ(C)
Οι κορυφές G και B και A δεν έχουν γείτονες που δεν έχουμε επισκεφθεί.
Επίσκεψη μίας νέας κορυφής: κορυφή C

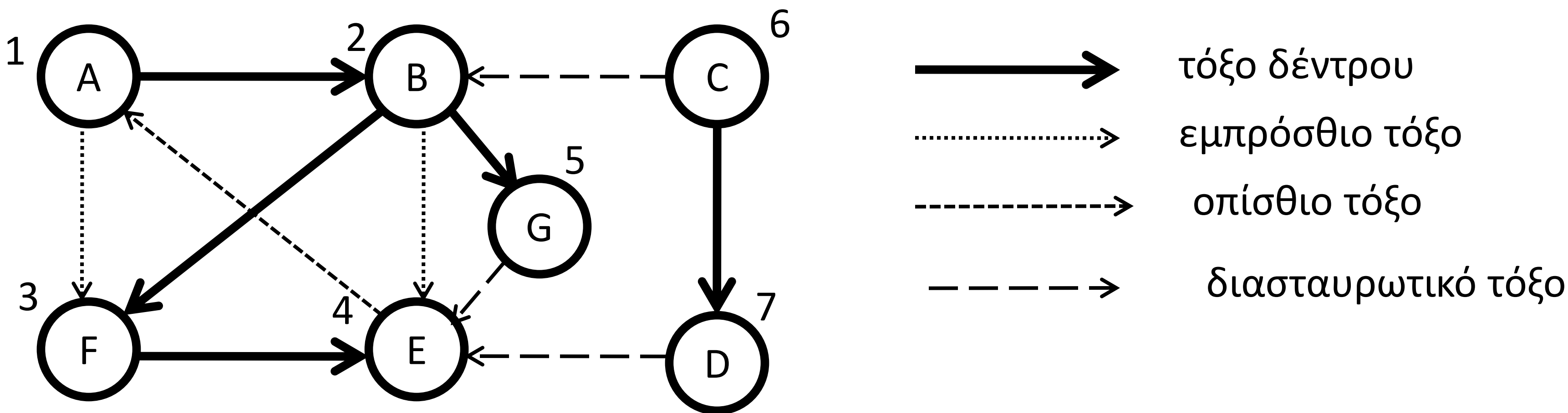


ΑΚΕ: ΑΠΒ(C), ΑΠΒ(D)



ΑΚΕ: {}, οι κορυφές C και D δεν έχουν άλλους γείτονες που να μην έχουμε ήδη επισκεφθεί

Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ) – Παράδειγμα (Συν.)



ΑΚΕ: {}, οι κορυφές C και D δεν έχουν άλλους γείτονες που να μην έχουμε ήδη επισκεφθεί

Δάσος δύο δέντρων: {A,B,E,F,G}, {C,D}

Ανάλυση ΑΠΒ

- Πολυπλοκότητα ΑΠΒ:
  - Επίσκεψη κάθε κορυφής: n επισκέψεις
  - Έλεγχος όλων των προσκείμενων ακμών σε κάθε κορυφή: m έλεγχοι συνολικά
  - Άρα: O(n+m) όπου n και m είναι το πλήθος των κορυφών και των ακμών αντίστοιχα του γραφήματος

Συνεκτικές Συνιστώσες

- Έστω G, μη διευθυνόμενο όχι κατ’ ανάγκη συνεκτικό.
- Συνεκτικές συνιστώσες του G;

Με εφαρμογή της ΑΠΒ βρίσκουμε τα δέντρα του δάσους = συνεκτικές συνιστώσες

Καταχώρηση(i, προσφ, στοιβα)

(* η μεταβλητή «μηκος» δηλώνει το μήκος του διανύσματος «στοιβα»*)

προσφ:=*προσφ*+1

If *προσφ>μηκος* then

  μήνυμα σφάλματος και «έξοδος»

  else

  στοιβα(προσφ):=i

Αλγόριθμος Οδηγός ΑΠΒ Για Συν. Συν.

(*αρχικοποιήσεις*)

for *i*:=1 to *n* do

  νεο(i):=0

  δ(i):=*ΛΓ(i)*

End *i*-loop

προσφ:=0

αρσσ=0 (*αυξάνεται με κάθε νέα συνεκτική συνιστώσα*)

αρκορ:=0

for *i*:=1 to *n* do

  if *νέο(i)*=0 then do

    αρσσ:=*αρσσ*+1

    αρκορ:=*αρκορ*+1

    write «νεα σ.σ. αριθμ», *αρσσ*

    ΑΠΒ(*i,αρκορ*)

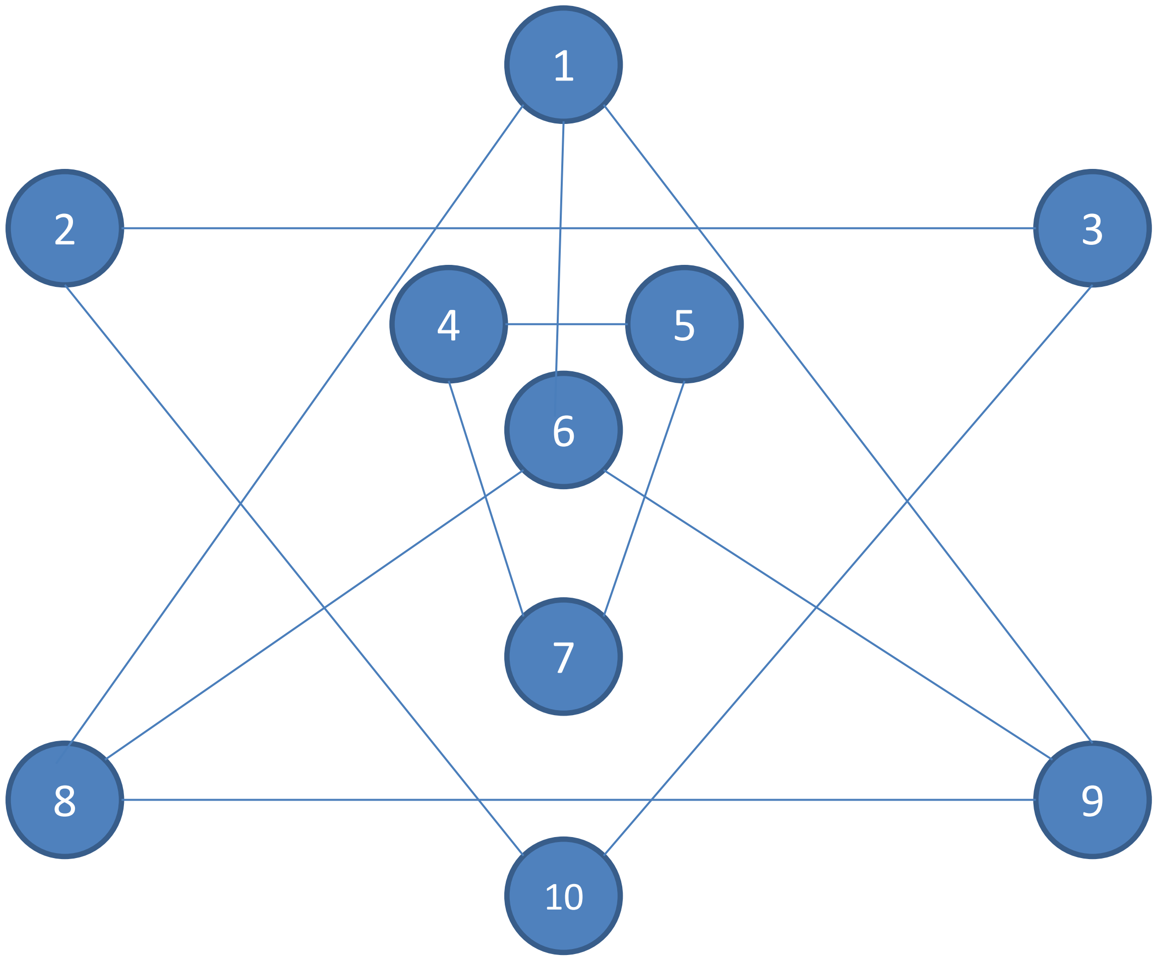
  end-if

end *i*-loop

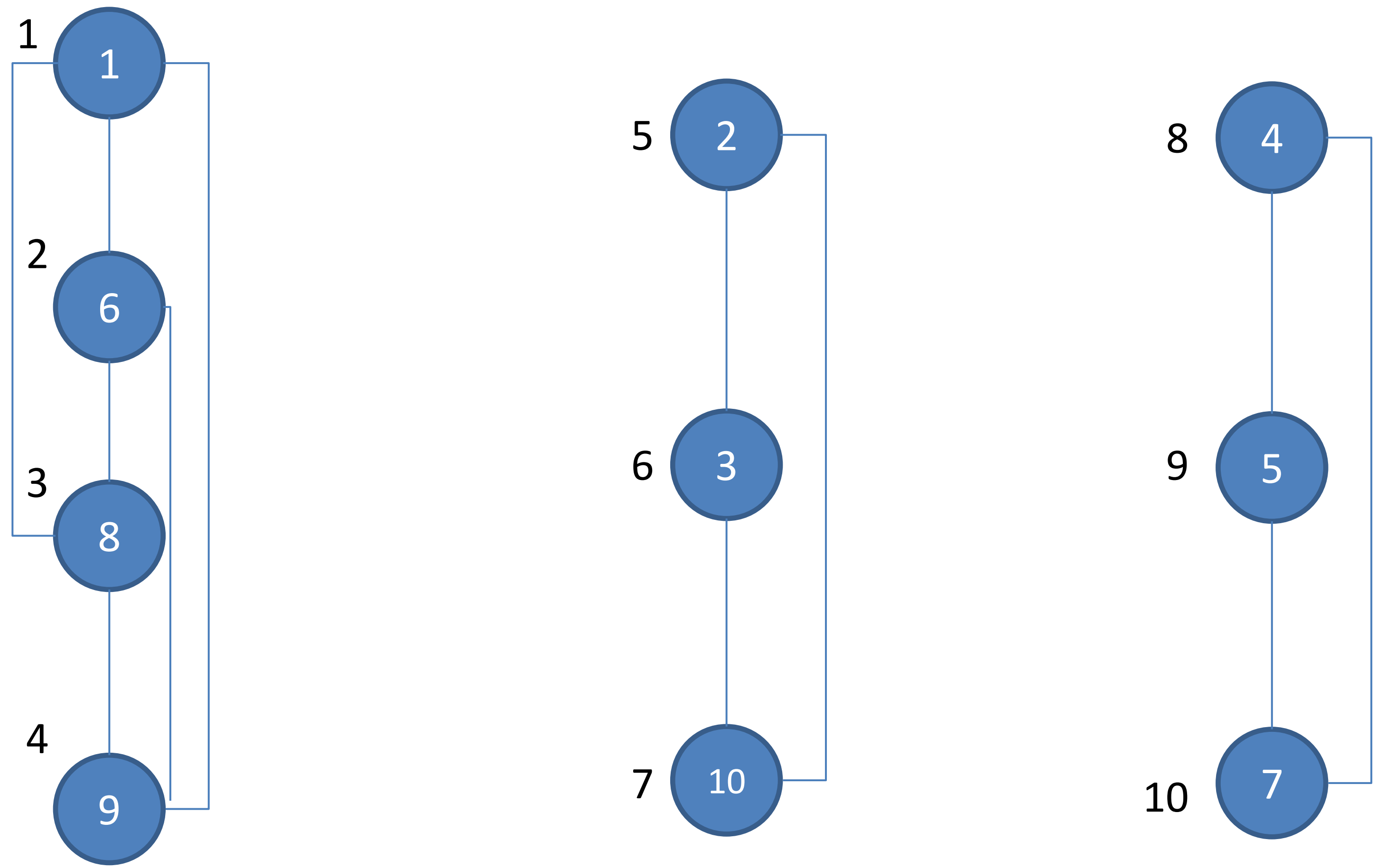
Αλγόριθμος ΑΠΒ(i, αρκορ)

```
νεο(i):=αρκορ
καταχώρηση(i,προσφ,στοιβα)
while προσφ≠0 do
        ανωτατο:=στοιβα(προσφ)
        while δ(ανωτατο)≠Λ do
                j:=κορ(δ(ανωτατο))
                 δ(ανωτατο):=lnk(δ(ανωτατο))
                if νέο(j)=0 then do
                        αρκορ:=αρκορ+1
                        νέο(j):=αρκορ
                        καταχώρηση(j,προσφ,στοιβα)
                        ανωτατο:=j
                end-if
        end-while
        (*εκδίωξη του προσφ από τη στοίβα*)
        προσφ:=προσφ-1
end-while
```

Παράδειγμα Συνεκτικές Συνιστώσες (1/2)



Παράδειγμα Συνεκτικές Συνιστώσες (2/2)



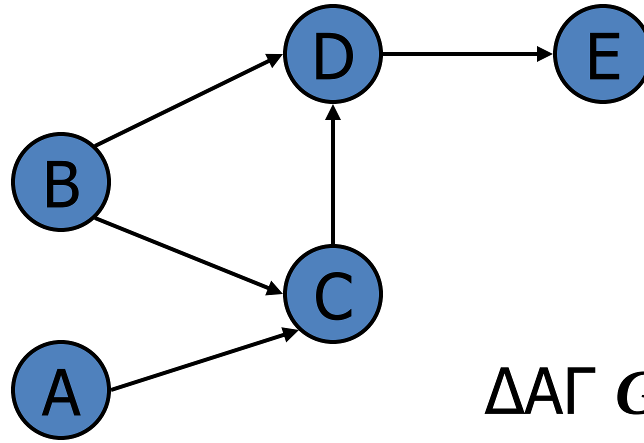
(α) (β) (γ)

Διευθυνόμενα Άκυκλα Γραφήματα – Τοπολογική Διάταξη

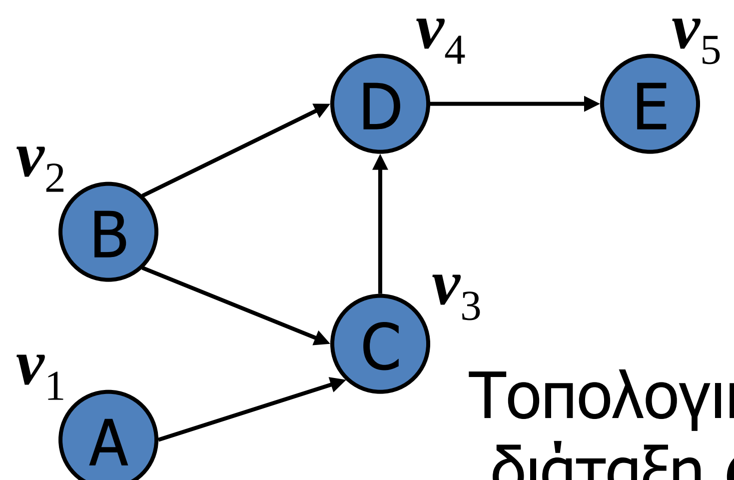
- Ένα Διευθυνόμενο Άκυκλο Γράφημα (ΔΑΓ) είναι ένα διγράφημα το οποίο δεν έχει κατευθυνόμενους κύκλους.
- Τοπολογική διάταξη ενός διγραφήματος είναι μία αρίθμηση $v_1, v_2, \dots, v_n$ των κορυφών τέτοια ώστε για κάθε ακμή (v_i,v_j), έχουμε $i<j$
- Ένα ΔΑΓ που μπορεί να αναπαριστά ένα σύνολο εργασιών και τους περιορισμούς που υπάρχουν στην εκτέλεσή τους: η ακμη (v_i,v_j) δηλώνει ότι η εργασία v_i πρέπει να εκτελεσθεί πριν την εργασία v_j.
- Η τοπολογική διάταξη σε αυτή την περίπτωση προσδιορίζει μία σειρά εκτέλεσης των εργασιών χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί που προκύπτουν από τις ακμές του γραφήματος

Θεώρημα

Ένα διγράφημα έχει τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν είναι ΔΑΓ



ΔΑΓ G



Τοπολογική διάταξη G

Διευθυνόμενα Άκυκλα Γραφήματα

- ΔΑΓ=διγράφημα χωρίς κύκλους

Λήμμα: Ένα διγράφημα έχει κύκλους ↔ έχει πίσω τόξα, άρα και ένα διγράφημα είναι ΔΑΓ ↔ δεν έχει πίσω τόξα

Απόδειξη:

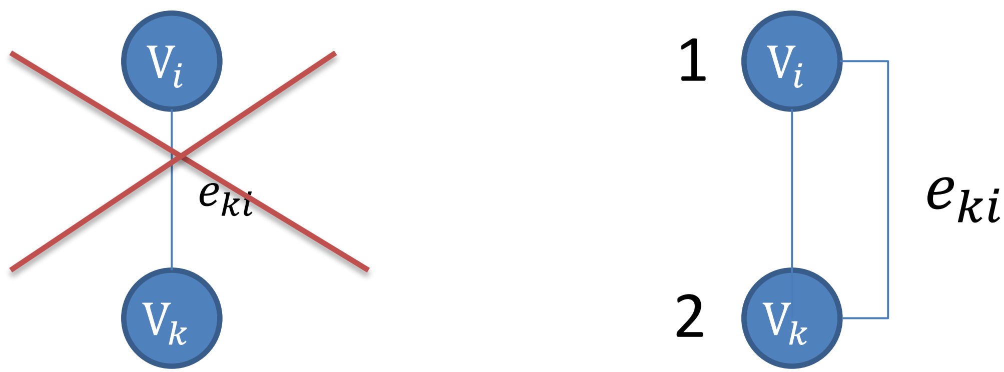
- Το ← είναι προφανές.
- Αντίστροφα, αν υπάρχει ένας κύκλος ας είναι V_i η κορυφή εκείνη στην οποία η επίσκεψη από ΑΠΒ έγινε πριν από τις άλλες κορυφές του κύκλου.
- Υπάρχει μία κορυφή V_k και τόξο του κύκλου e_{ki} από V_k σε V_i.
- Το e_{ki} δεν μπορεί να είναι τόξο δέντρου αφού η επίσκεψη στην V_i έχει γίνει πριν την V_k.
- Είναι τότε πίσω τόξο

Διευθυνόμενα Άκυκλα Γραφήματα

- ΔΑΓ=διγράφημα χωρίς κύκλους

Λήμμα: Ένα διγράφημα έχει κύκλους ↔ έχει πίσω τόξα, άρα και ένα διγράφημα είναι ΔΑΓ ↔ δεν έχει πίσω τόξα

Απόδειξη:

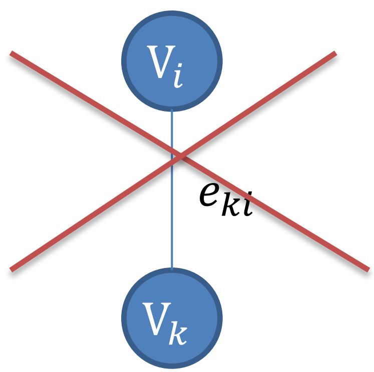


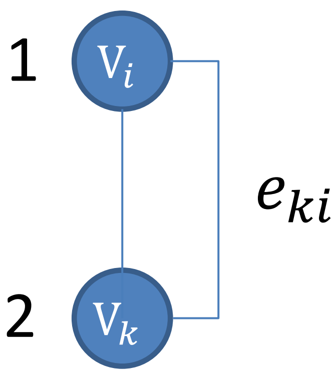
Διευθυνόμενα Άκυκλα Γραφήματα

- ΔΑΓ=διγράφημα χωρίς κύκλους

Λήμμα: Ένα διγράφημα έχει κύκλους ↔ έχει πίσω τόξα, άρα και ένα διγράφημα είναι ΔΑΓ ↔ δεν έχει πίσω τόξα

Απόδειξη:





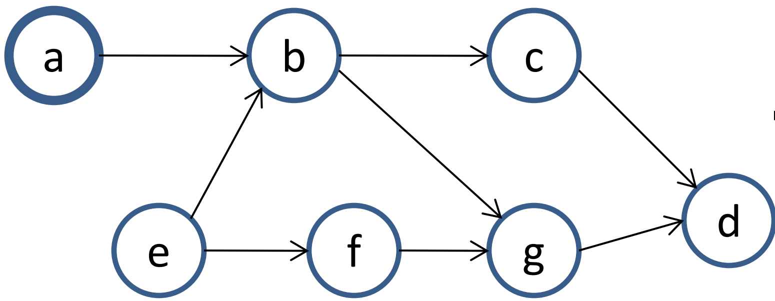
- Αν η ΑΠΒ δεν βρει πίσω τόξα → ΔΑΓ

Τοπολογική Διάταξη κ’ Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος

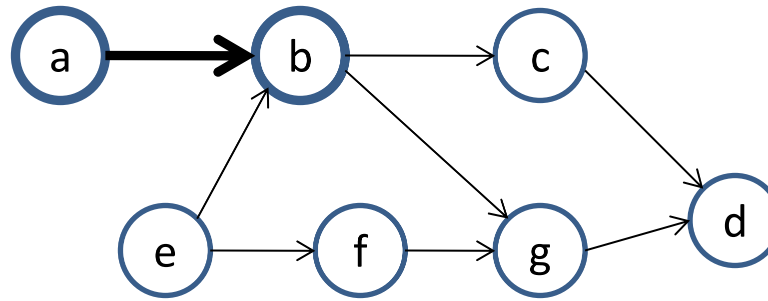
- Με μια απλή τροποποίηση της ΑΠΒ, εύρεση της τοπολογικής διάταξης του ΔΑΓ G(V,E) όπου V={V_1, V_2, … , V_n}
- Ο αλγόριθμος θα επιστρέφει ένα πίνακα ΤΠ n θέσεων και στο στοιχείο ΤΠ(i) του πίνακα θα αποθηκεύεται η σειρά της κορυφής V_j στην τοπολογική διάταξη που προκύπτει π.χ. ΤΠ(3)=6 σημαίνει ότι η κορυφή V_3 είναι έκτη στην τοπολογική διάταξη

```
ΑΠΒ
Για κάθε κορυφή v του γραφήματος G
  Σημείωσε την v ως unvisited
 Τέλος_Για
counter=n
Για κάθε κορυφή v του γραφήματος G
   Αν v είναι σημειωμένη ως unvisited τότε ΑΠΒ(v)
Τελος_Για
Τέλος_ΑΠΒ

Διαδικασία ΑΠΒ(v)
Σημείωσε την v ως visited
Για κάθε γείτονα w του v
   Αν η w είναι σημειωμένη ως unvisited τότε ΑΠΒ(w)
Τέλος_Για
ΤΠ[v]=counter
counter=counter-1
Τελος_Διαδικασία
```

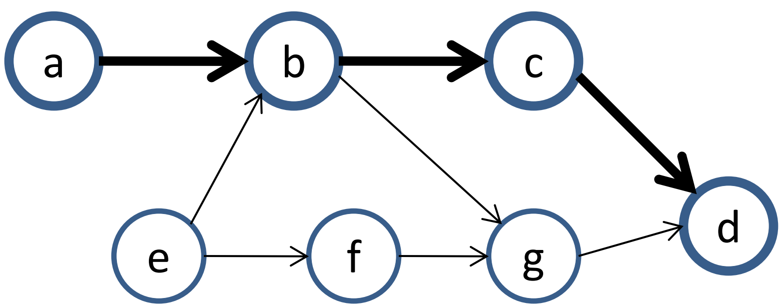
Τοπολογική Διάταξη - Παράδειγμα



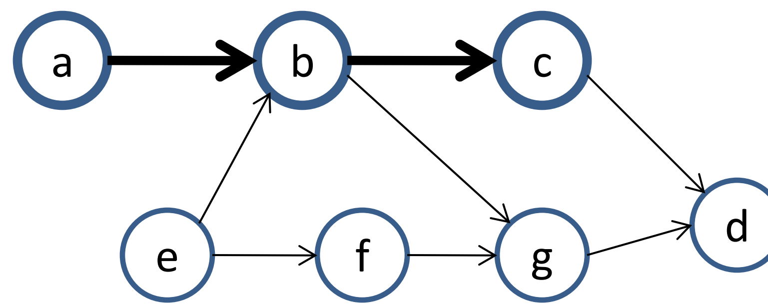
Αναδρομικές κλήσεις σε εξέλιξη: ΑΠΒ(a)



Αναδρομικές κλήσεις σε εξέλιξη: ΑΠΒ(a), ΑΠΒ(b)

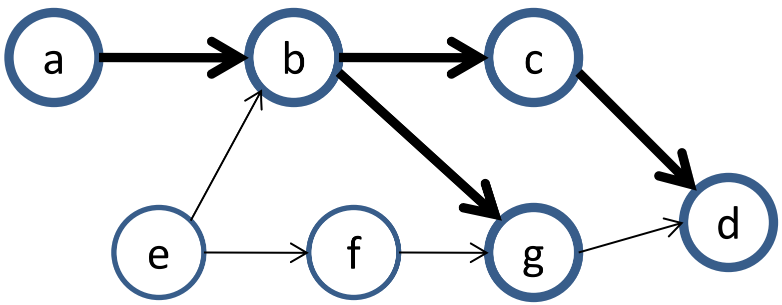


Αναδρομικές κλήσεις σε εξέλιξη: ΑΠΒ(a), ΑΠΒ(b), ΑΠΒ(c), ΑΠΒ(d)

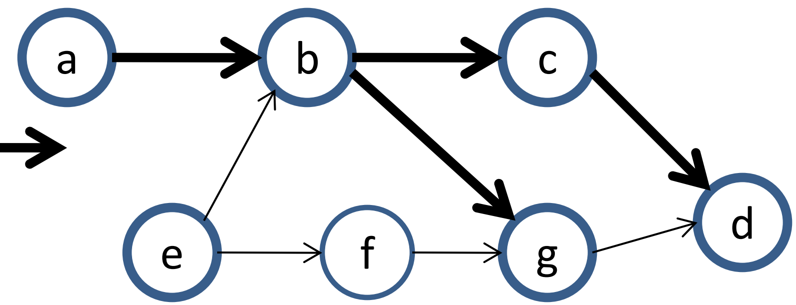


Αναδρομικές κλήσεις σε εξέλιξη: ΑΠΒ(a), ΑΠΒ(b), ΑΠΒ(c)

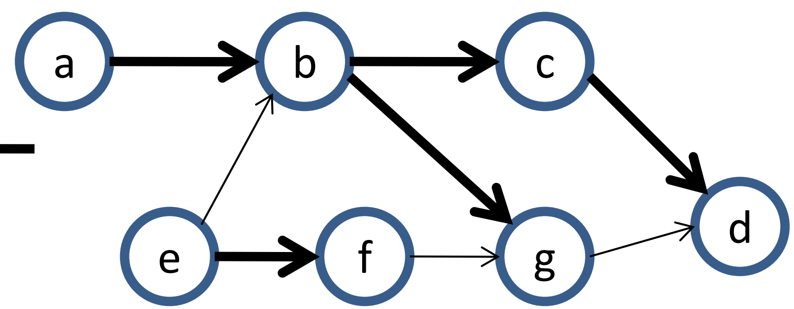
Τοπολογική Διάταξη – Παράδειγμα (Συν.)



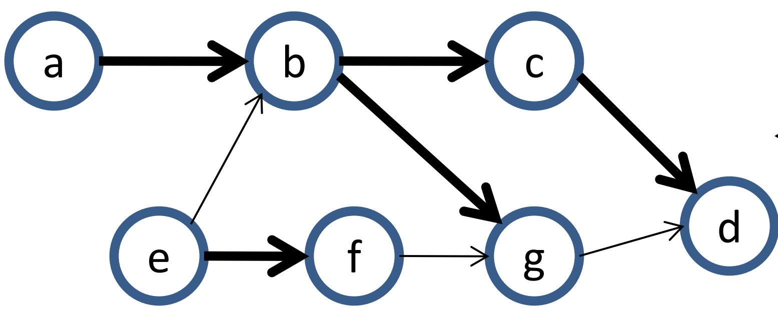
Αναδρομικές κλήσεις σε εξέλιξη:
ΑΠΒ(a), ΑΠΒ(b), ΑΠΒ(g)
ΤΠ(d)=7, ΤΠ(c)=6



Αναδρομικές κλήσεις σε εξέλιξη: ΑΠΒ(e)
ΤΠ(d)=7, ΤΠ(c)=6, ΤΠ(g)=5, ΤΠ(b)=4, ΤΠ(a)=3



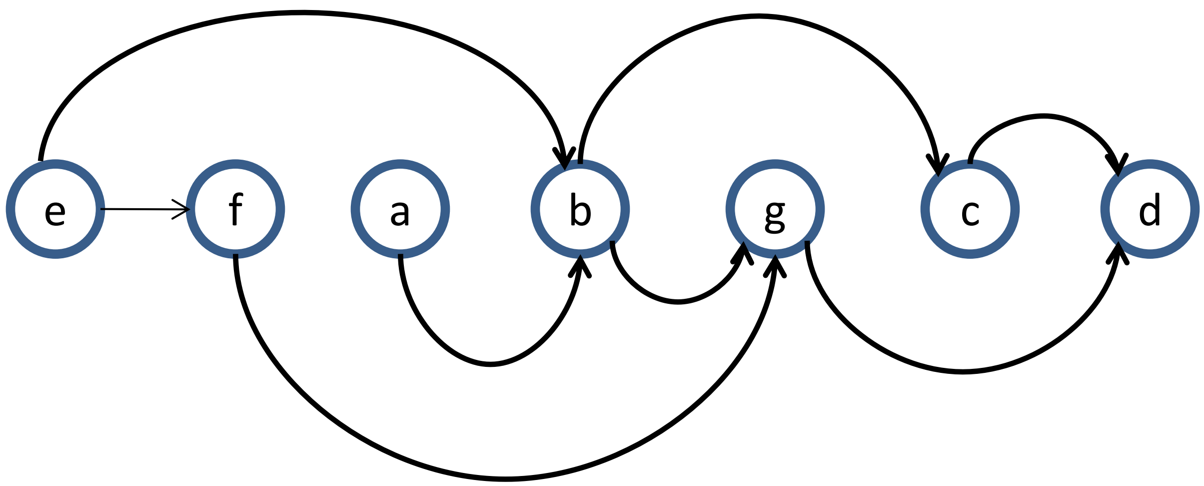
Αναδρομικές κλήσεις σε εξέλιξη: ΑΠΒ(e), ΑΠΒ(f)
ΤΠ(d)=7, ΤΠ(c)=6, ΤΠ(g)=5, ΤΠ(b)=4, ΤΠ(a)=3



Αναδρομικές κλήσεις σε εξέλιξη: {}
ΤΠ(d)=7, ΤΠ(c)=6, ΤΠ(g)=5, ΤΠ(b)=4,
ΤΠ(a)=3, ΤΠ(f)=2, ΤΠ(e)=1

Τοπολογική Διάταξη – Παράδειγμα (Συν.)

- Τοποθέτηση των κόμβων του γραφήματος σύμφωνα με τη τοπολογική διάταξη.
- Όλες οι ακμές του γραφήματος έχουν κατεύθυνση από αριστερά προς τα δεξιά



Τοπολογική διάταξη

- «εγκατ»= η αρίθμηση της μεταδιάταξης από ΑΠΒ
- ΔΑΓ:
  - Δεν υπάρχουν πίσω τόξα
  - Εγκατάλειψη απογόνων προηγείται εγκατάλειψης προγόνων
  - Για διασυνδετικά τόξα e_{ij} ισχύει εγκατ(i)>εγκατ(j)

$$\Downarrow$$

  - Για οποιοδήποτε τόξο e_{ij} ισχύει εγκατ(i)>εγκατ(j)

- Διάνυσμα δείκτης: εκφράζει την αρίθμηση των κορυφών με την αντίθετη σειρά εγκατάλειψης

  δείκτης(i):=n+1-εγκατ(i)

Λήμμα: Αν σε ένα ΔΑΓ υπάρχει τόξο e_{ij} τότε η V_j εγκαταλείφθηκε πριν από τη V_i, δηλαδή δείκτης(i)<δείκτης(j)

Τοπολογική διάταξη-Εφαρμογή

- Γράφημα προτεραιότητας: έστω n έργα (Tasks) $T_1, \ldots T_n$ όπου μερικά έργα χρειάζονται τα αποτελέσματα κάποιων άλλων επομένως πρέπει να προηγηθούν.

  Έργα=κορυφές

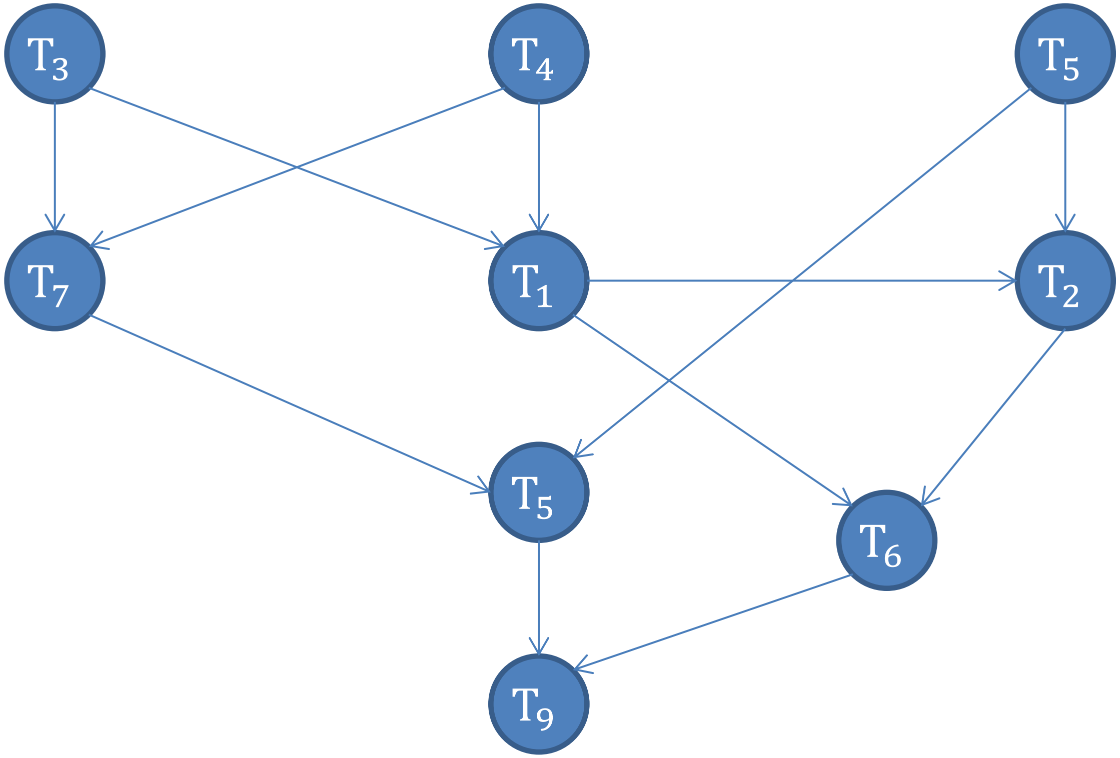
  Τόξο $e_{ij}\rightarrow T_i$ πρέπει να προηγηθεί T_j

- Πρόβλημα τοπολογικής διάταξης σε «γράφημα προτεραιότητας»: η εκ νέου αρίθμηση των κορυφών έτσι ώστε αν το έργο-κορυφή T_i πρέπει να προηγηθεί του T_j θα πρέπει η νέα αρίθμηση του T_i να είναι μικρότερη από αυτή του T_j

Λύση:

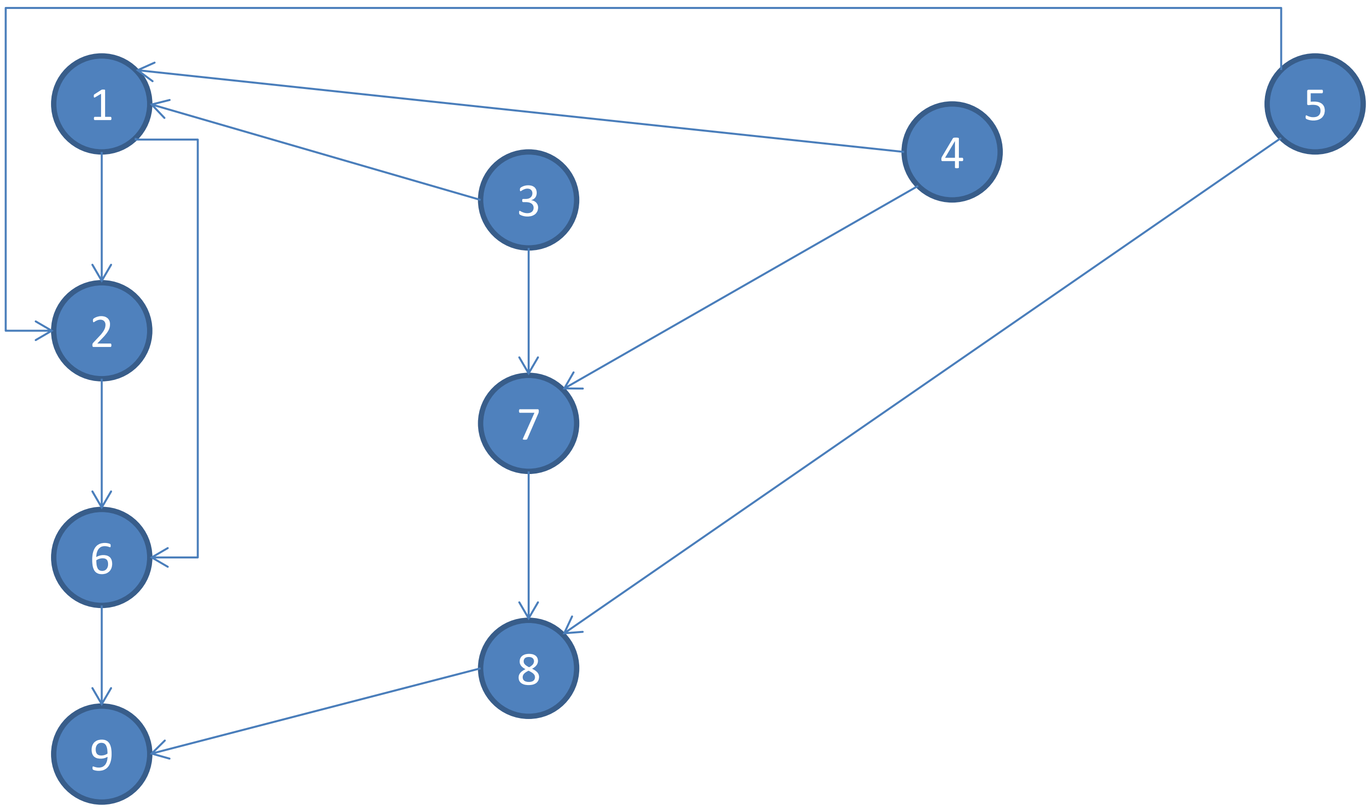
Αν έχουμε ΔΑΓ το διάνυσμα δείκτης δίνει τη σωστή νέα αρίθμηση

Τοπολογική διάταξη-Παράδειγμα



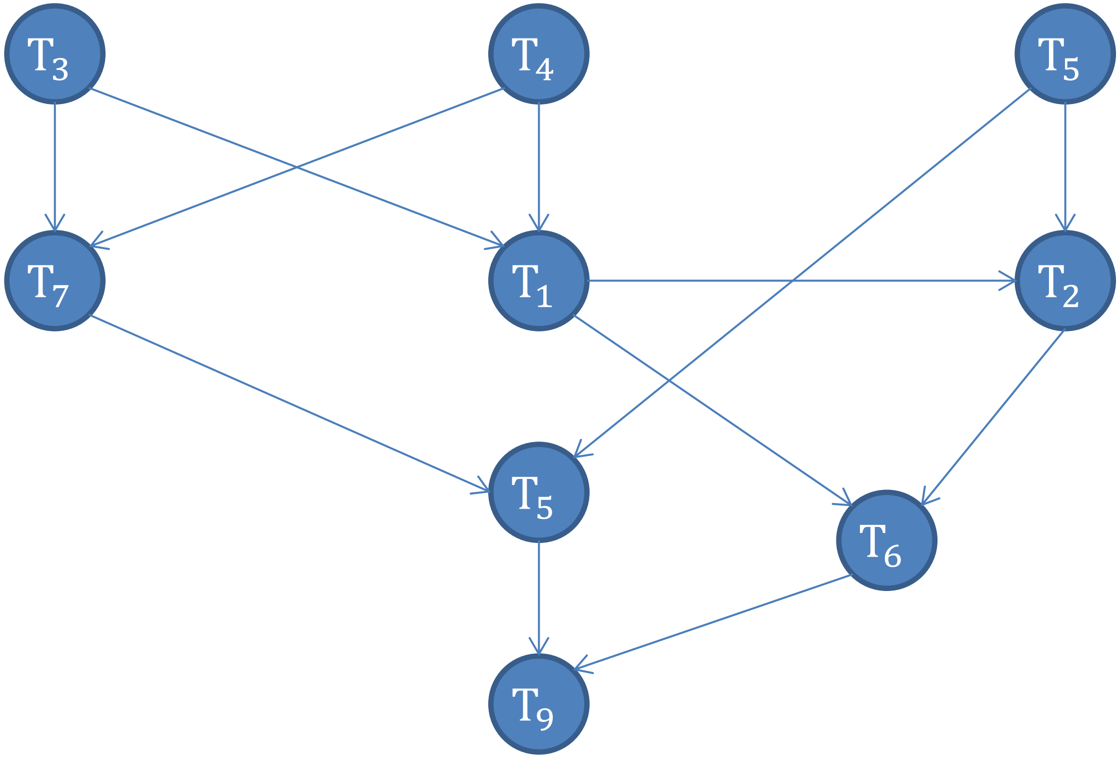
Τοπολογική διάταξη-Παράδειγμα

- Εφαρμογή ΑΠΒ



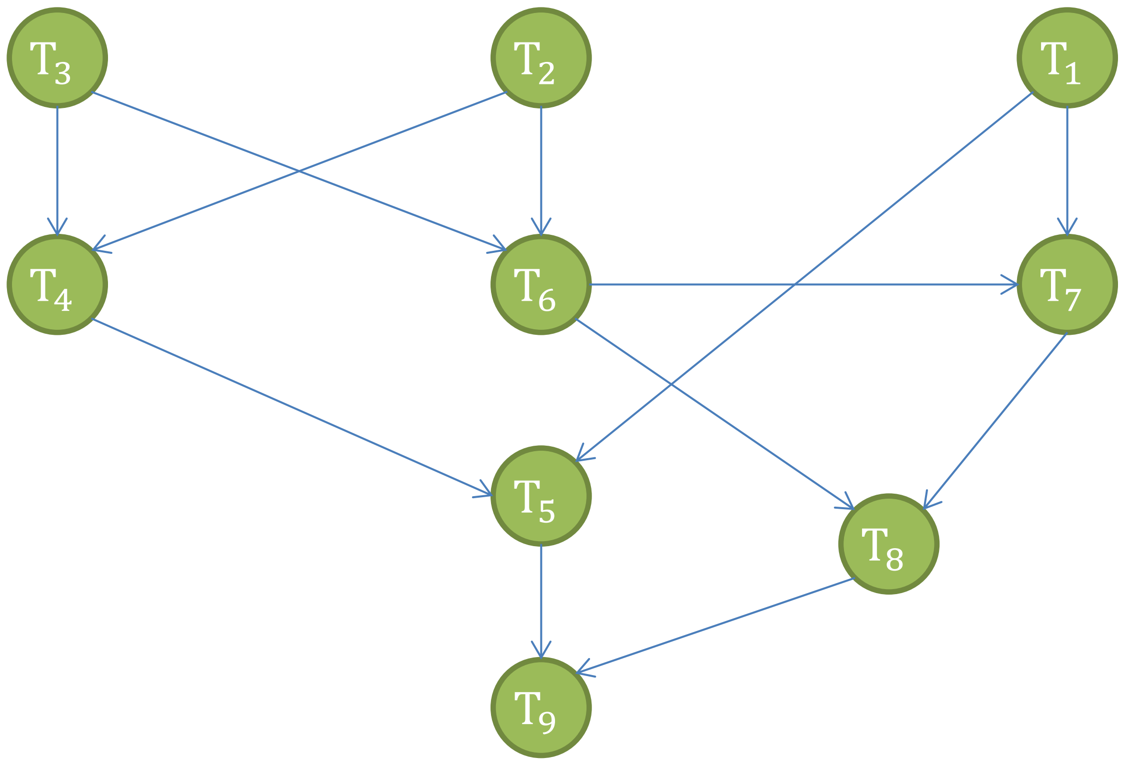
- Σειρά μεταδιάταξης («εγκατ): 9,6,2,1,8,7,3,4,5

Τοπολογική διάταξη-Παράδειγμα



- Σειρά εγκατάλειψης («δείκτης»): 5,4,3,7,8,1,2,6,9

Τοπολογική διάταξη-Παράδειγμα



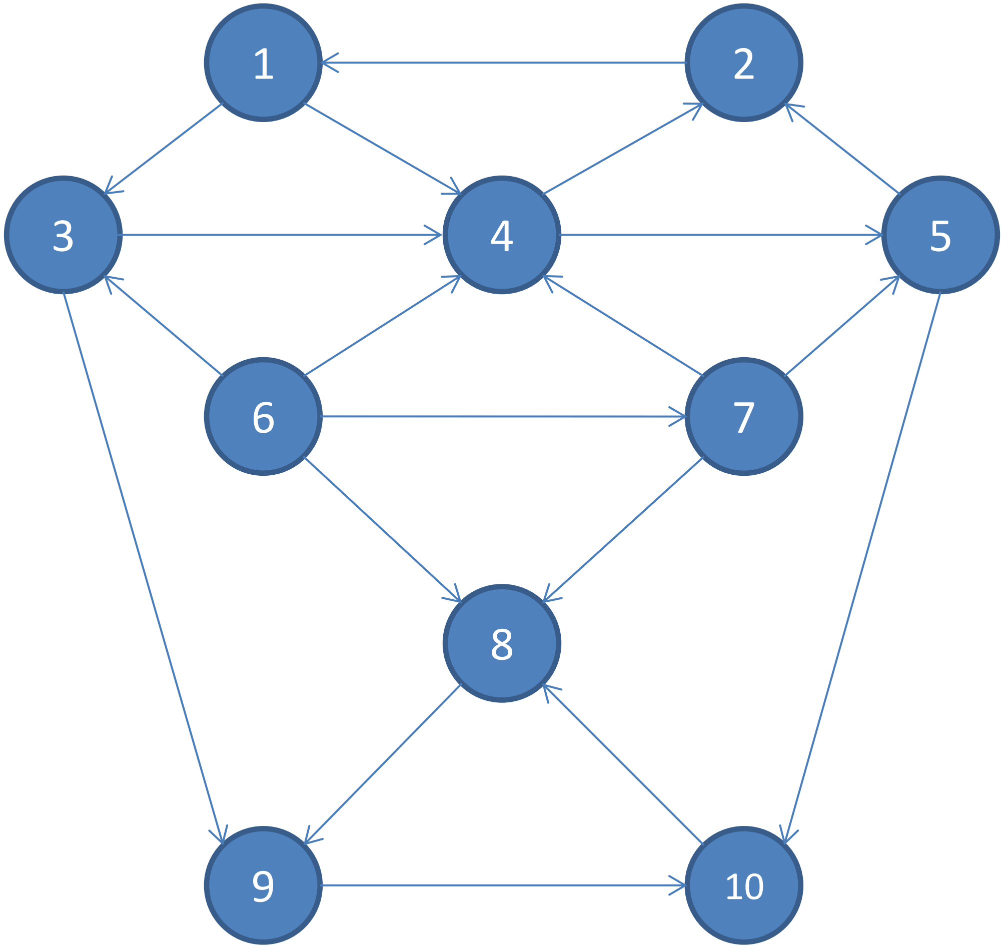
- Σειρά εγκατάλειψης («δείκτης»): 5,4,3,7,8,1,2,6,9

Ισχυρές Συνιστώσες

- Ένα υπογράφημα του διγραφήματος G που είναι ισχυρά συνεκτικό και «μέγιστο» ως προς αυτή την ιδιότητα, δηλαδή δεν περιέχεται σε άλλο ισχυρά συνεκτικό υπογράφημα, το καλούμε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα, ή απλά ισχυρή συνιστώσα του G.

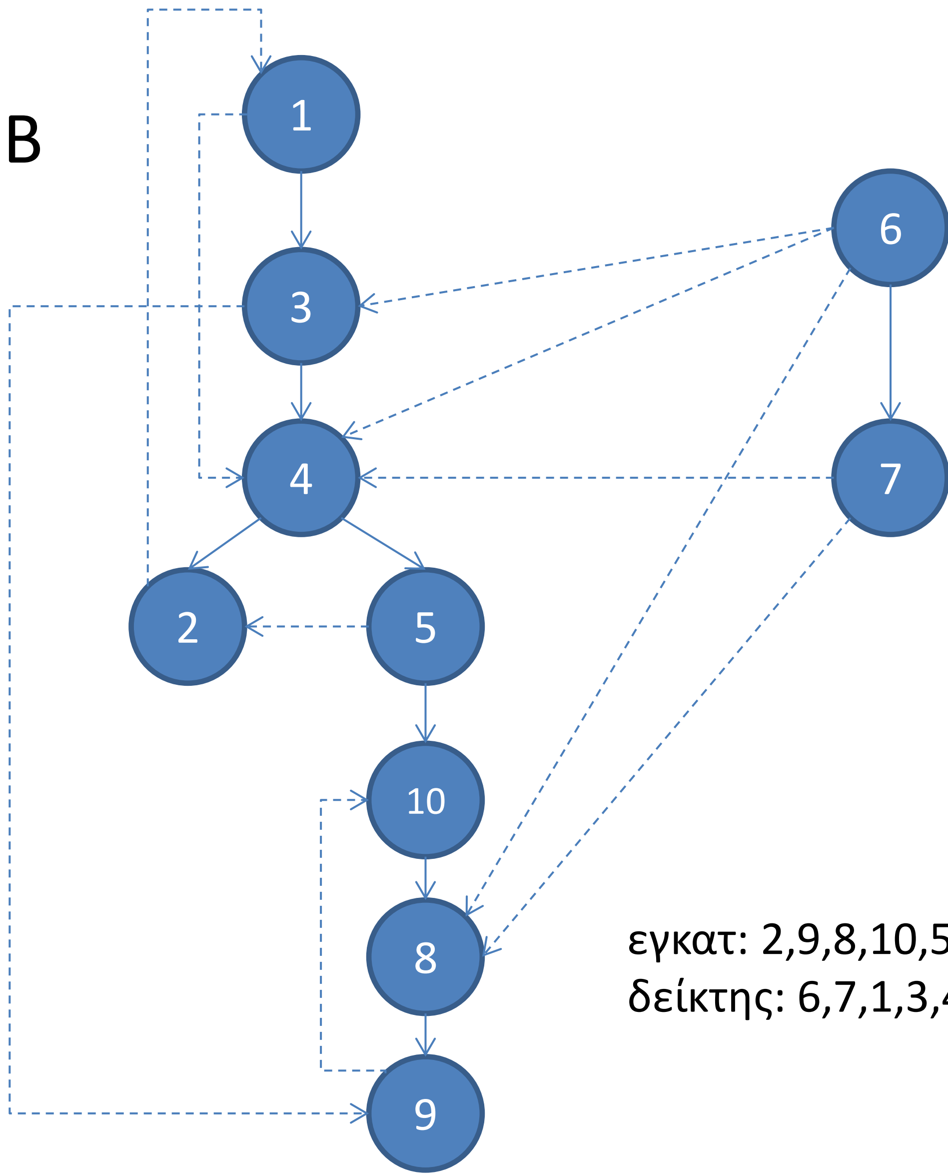
- Αλγόριθμος «Ισχυρές Συνιστώσες»
  - ΑΠΒ για το G (*καθορισμός του διανύσματος δείκτης*)
  - ΑΠΒ για το G’ (με σειρά προτεραιότητας όπως ορίζει ο δείκτης)

Ισχυρές Συνιστώσες-Παράδειγμα



Ισχυρές Συνιστώσες-Παράδειγμα

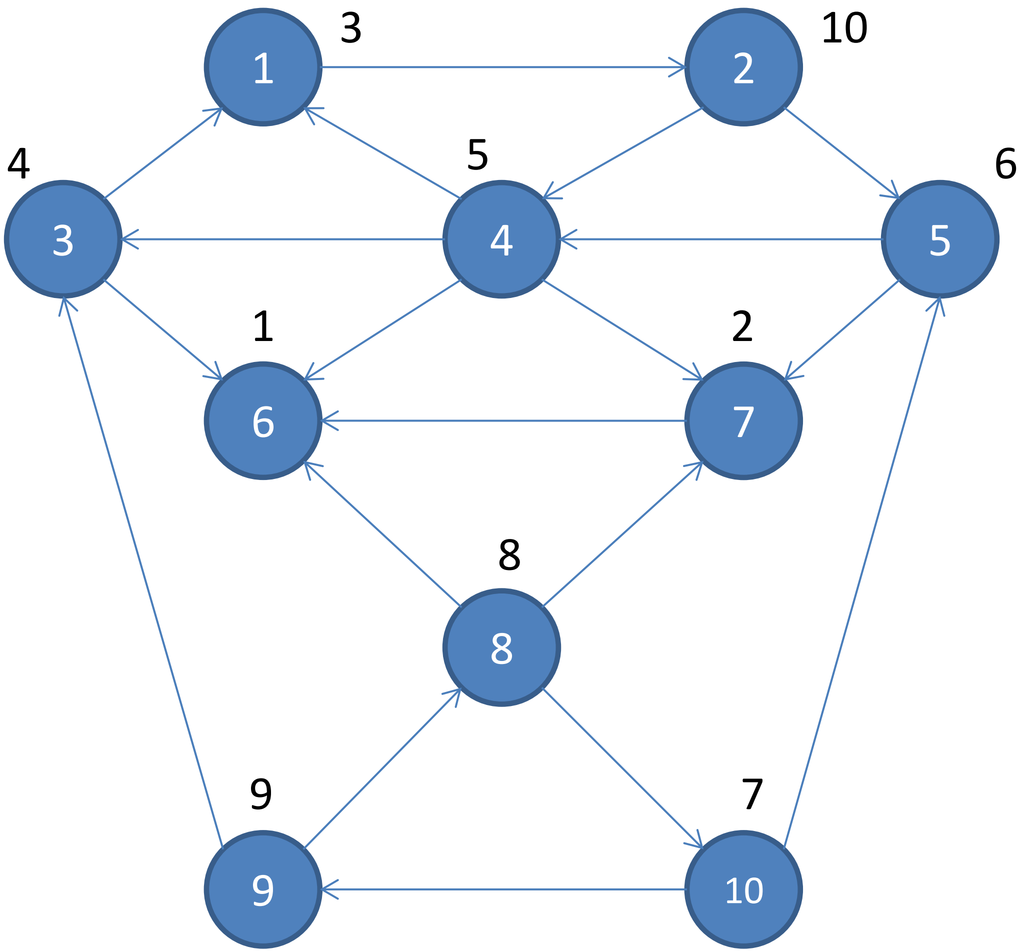
- Εφαρμογή ΑΠΒ



εγκατ: 2,9,8,10,5,4,3,1,7,6
δείκτης: 6,7,1,3,4,5,10,8,9,2

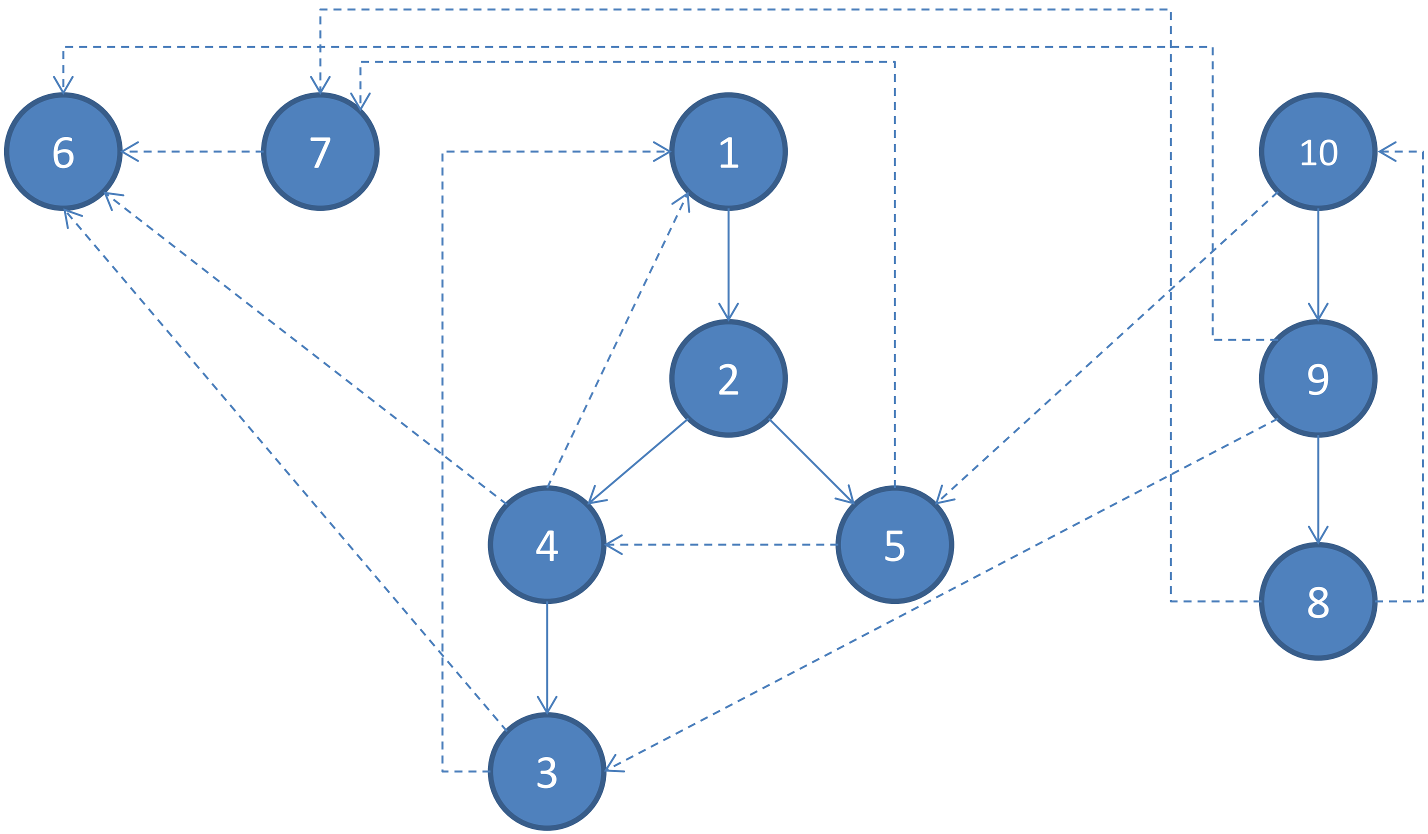
Ισχυρές Συνιστώσες-Παράδειγμα

- G’



Ισχυρές Συνιστώσες-Παράδειγμα

- Εφαρμογή ΑΠΒ για το G’ με βάση το «δείκτη»



Ισχυρές Συνιστώσες – Απόδειξη Ορθότητας

- Λήμμα
  - Έστω Δ’ ένα από τα δέντρα μετά την εφαρμογή του ΑΠΒ στο G’. Έστω Vr η ρίζα αυτού του δέντρου και Vi ένας άλλος κόμβος στο Δ’. Ισχύουν
    - Υπάρχει διαδρομή από το Vi στο Vr στο G
    - Υπάρχει διαδρομή από το Vr στο Vi στο G
  - Το δέντρο Δ’ είναι ισχυρή συνιστώσα: δεν μπορεί να «μεγαλώσει» με επιπρόσθετους κόμβους

Σημεία κοπής & Δισυνεκτικές συνιστώσες

Υποθέτουμε γράφημα G συνεκτικό

- Σημείο άρθρωσης ή σημείο κοπής: η εκδίωξη της κορυφής-σημείου συνεπάγεται και την καταστροφή της συνεκτικότητας του γραφήματος.
- Ισοδύναμα, μία κορυφή V_i, είναι σημείο κοπής τότε και μόνο τότε όταν υπάρχουν δύο άλλες κορυφές, διαφορετικές μεταξύ τους και από την V_i τέτοιες ώστε η V_i να βρίσκεται πάνω σε όλες τις διαδρομές που συνδέουν τις δύο αυτές κορυφές.
- Ένα γράφημα που δεν έχει σημεία κοπής λέγεται δισυνεκτικό ή διπλά συνεκτικό.
- Εύρεση σημείων κοπής γραφήματος = εύρεση δισυνεκτικών συνιστωσών (μέγιστα δισυνεκτικά υπογραφήματα)

Σημεία κοπής

Ας υποθέσουμε ότι εφαρμόζουμε ΑΠΒ, οπότε έχουμε μόνο ένα δέντρο T γιατί το G συνεκτικό.

- Ρίζα = σημείο κοπής?

Αν και μόνο αν έχει πάνω από ένα υποδέντρα

- Φύλλο = σημείο κοπής?

Όχι

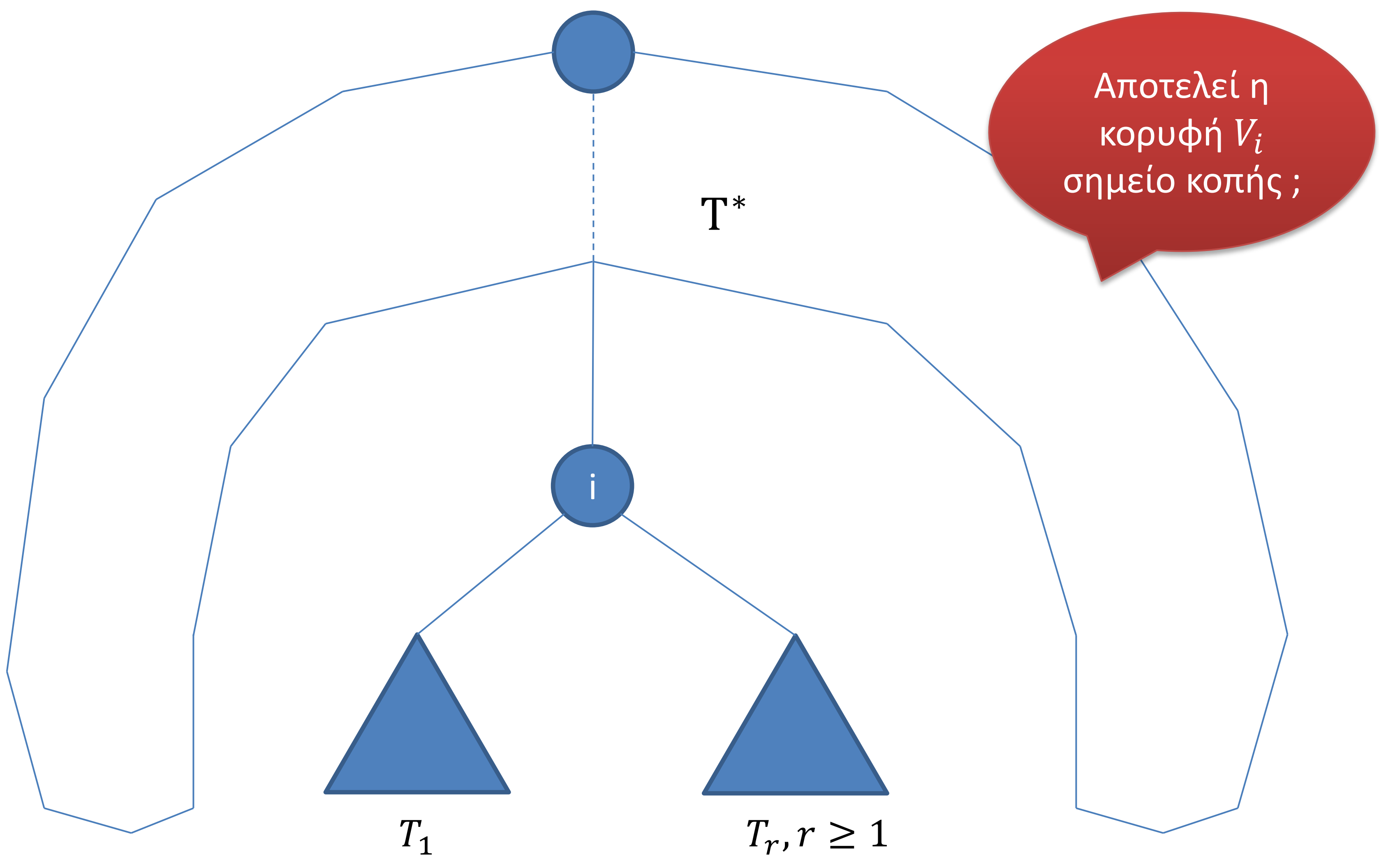
Λήμμα: Ας είναι V_i όχι ρίζα, όχι φύλλο. Τότε:

Η V_i είναι σημείο κοπής $\leftrightarrow$ υπάρχει υποδέντρο της V_i που δεν συνδέεται με γνήσιο πρόγονο της V_i με πίσω τόξο

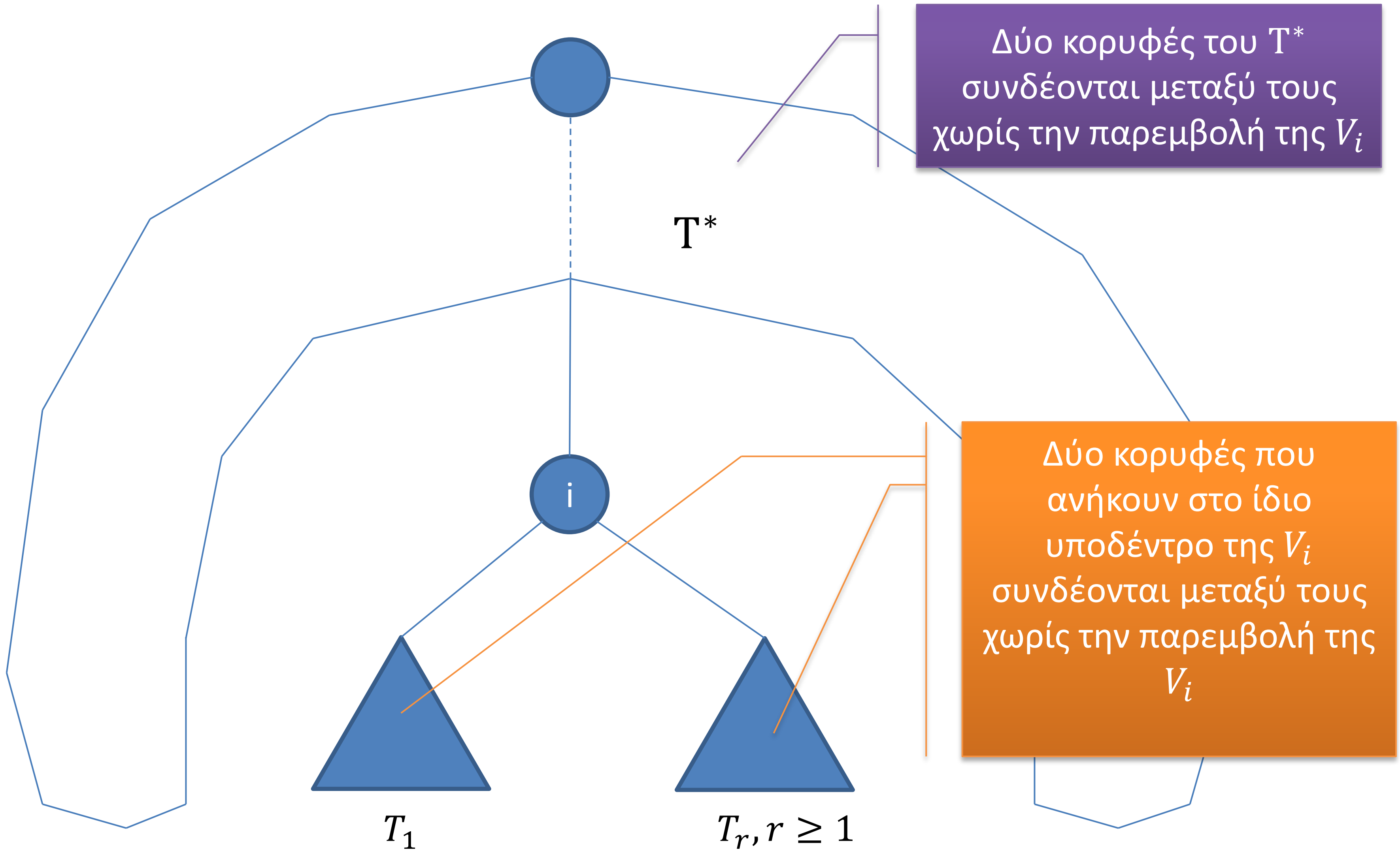
Σημεία κοπής

- Έστω V_i ούτε ρίζα, ούτε φύλλο.
- T^* υπογράφημα του T (και του G), που προκύπτει αν από το δέντρο διωχτεί η V_i και όλα τα υποδέντρα της.

Σημεία κοπής



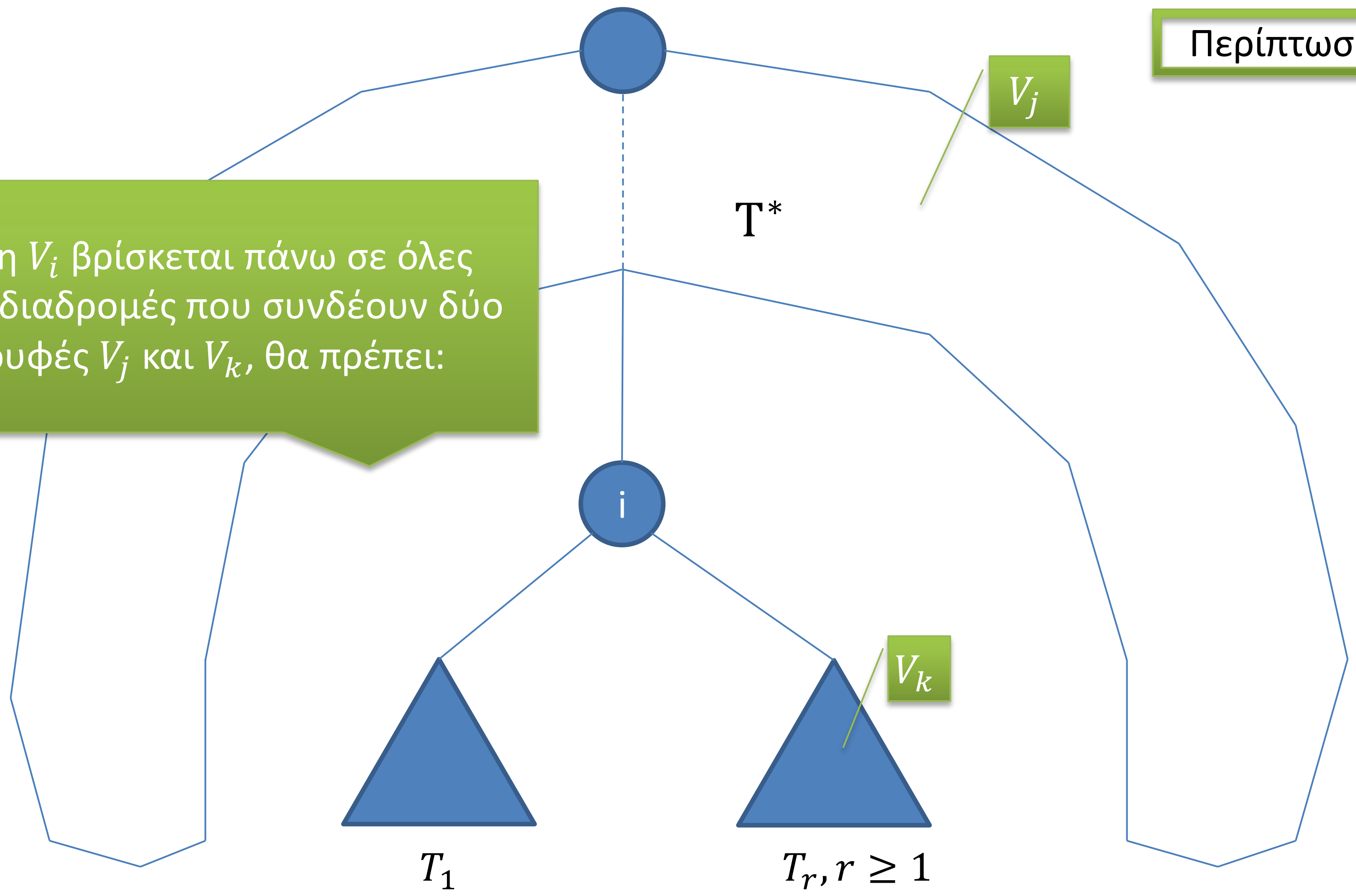
Σημεία κοπής



Σημεία κοπής

Περίπτωση i

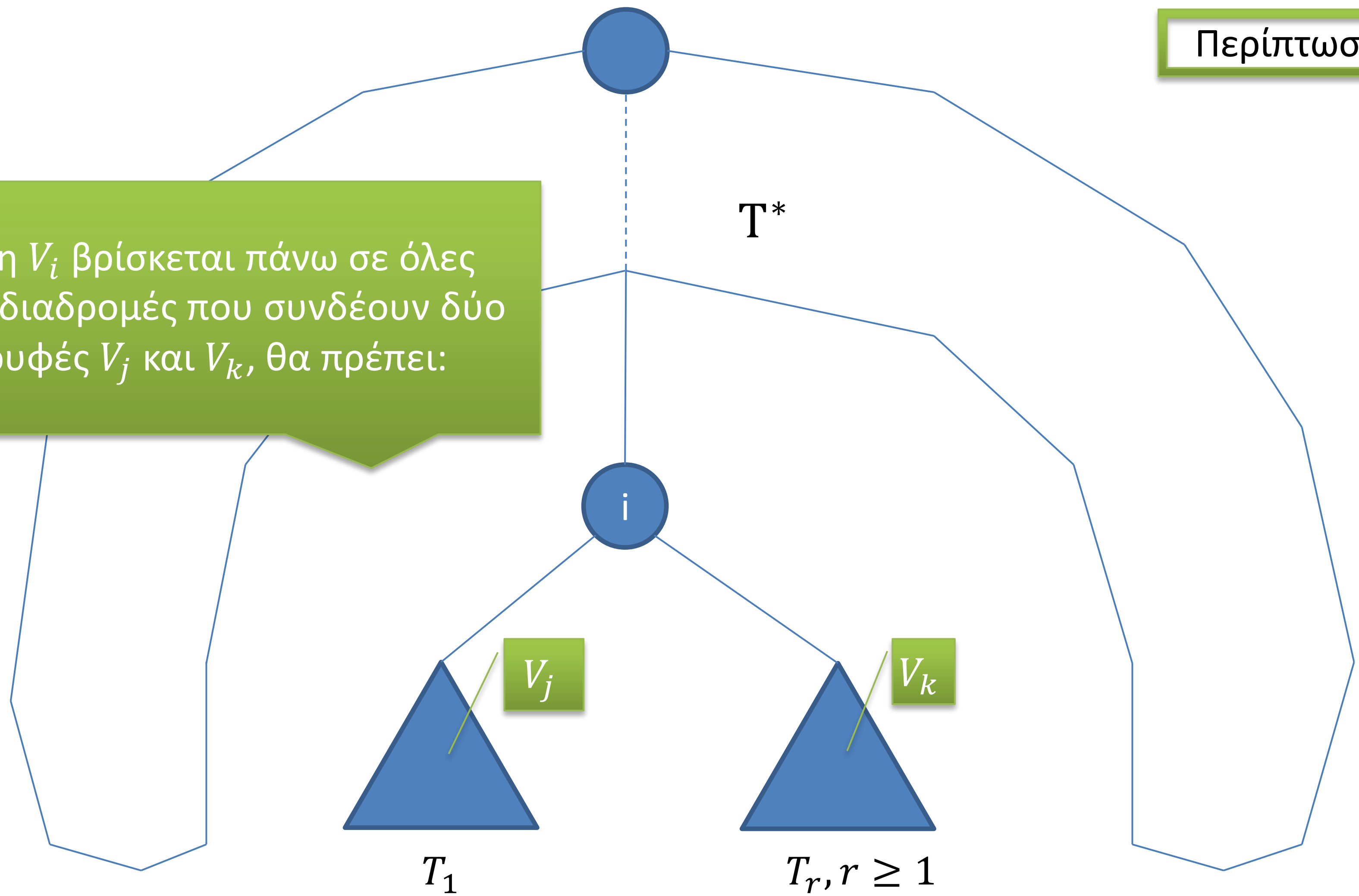
Αν η V_i βρίσκεται πάνω σε όλες τις διαδρομές που συνδέουν δύο κορυφές V_j και V_k, θα πρέπει:



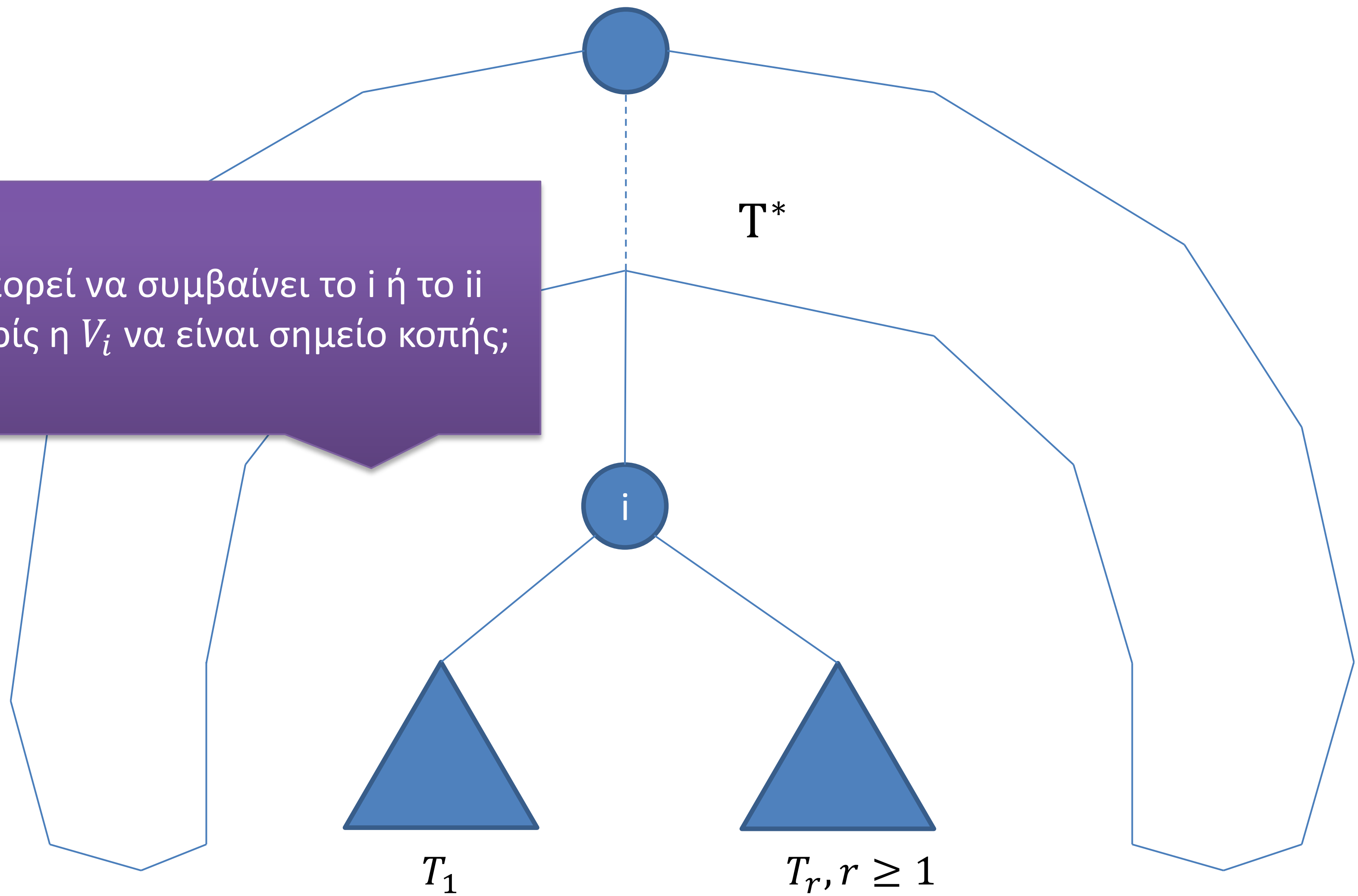
Σημεία κοπής

Περίπτωση ii

Αν η V_i βρίσκεται πάνω σε όλες τις διαδρομές που συνδέουν δύο κορυφές V_j και V_k, θα πρέπει:



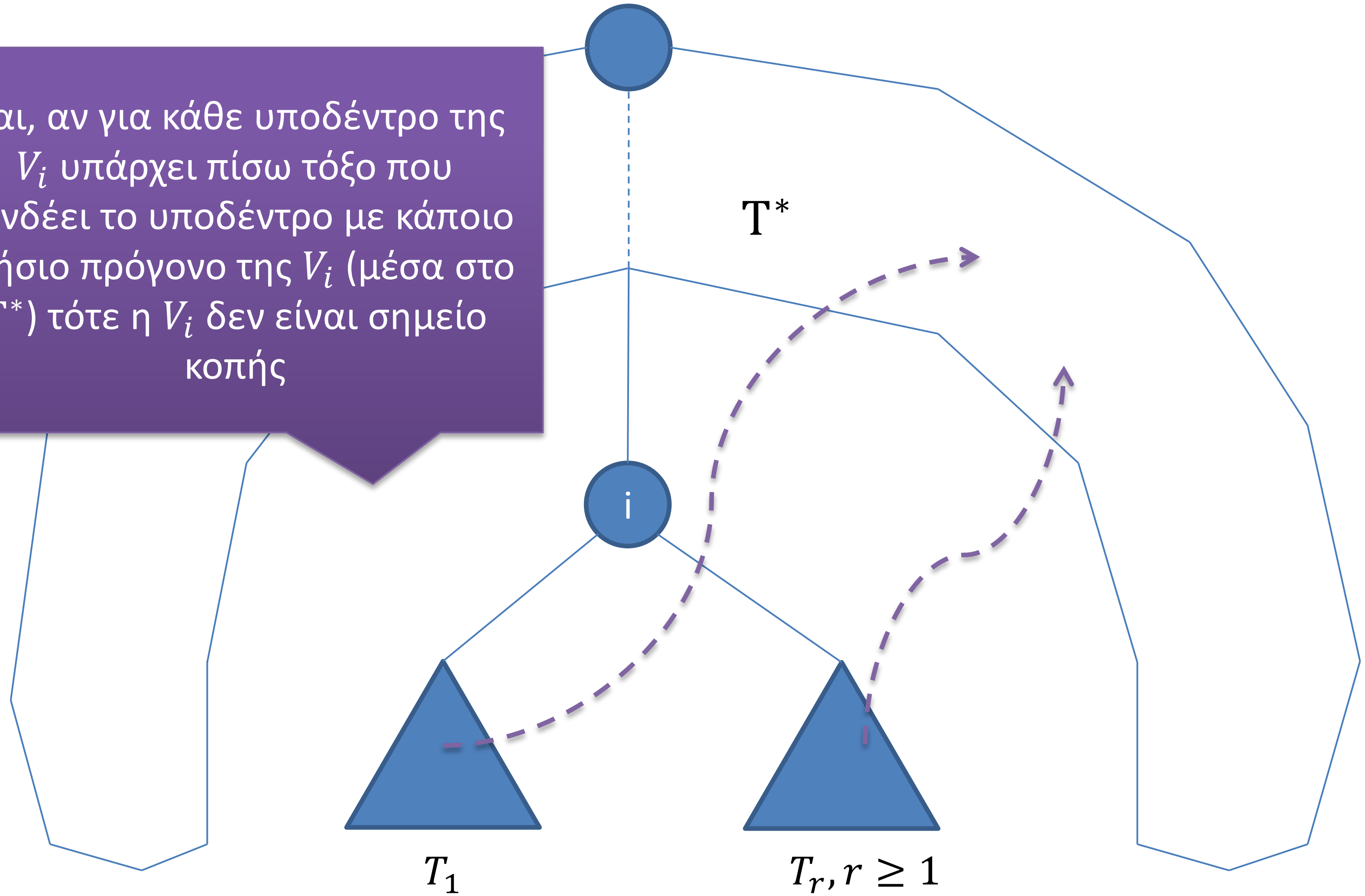
Σημεία κοπής



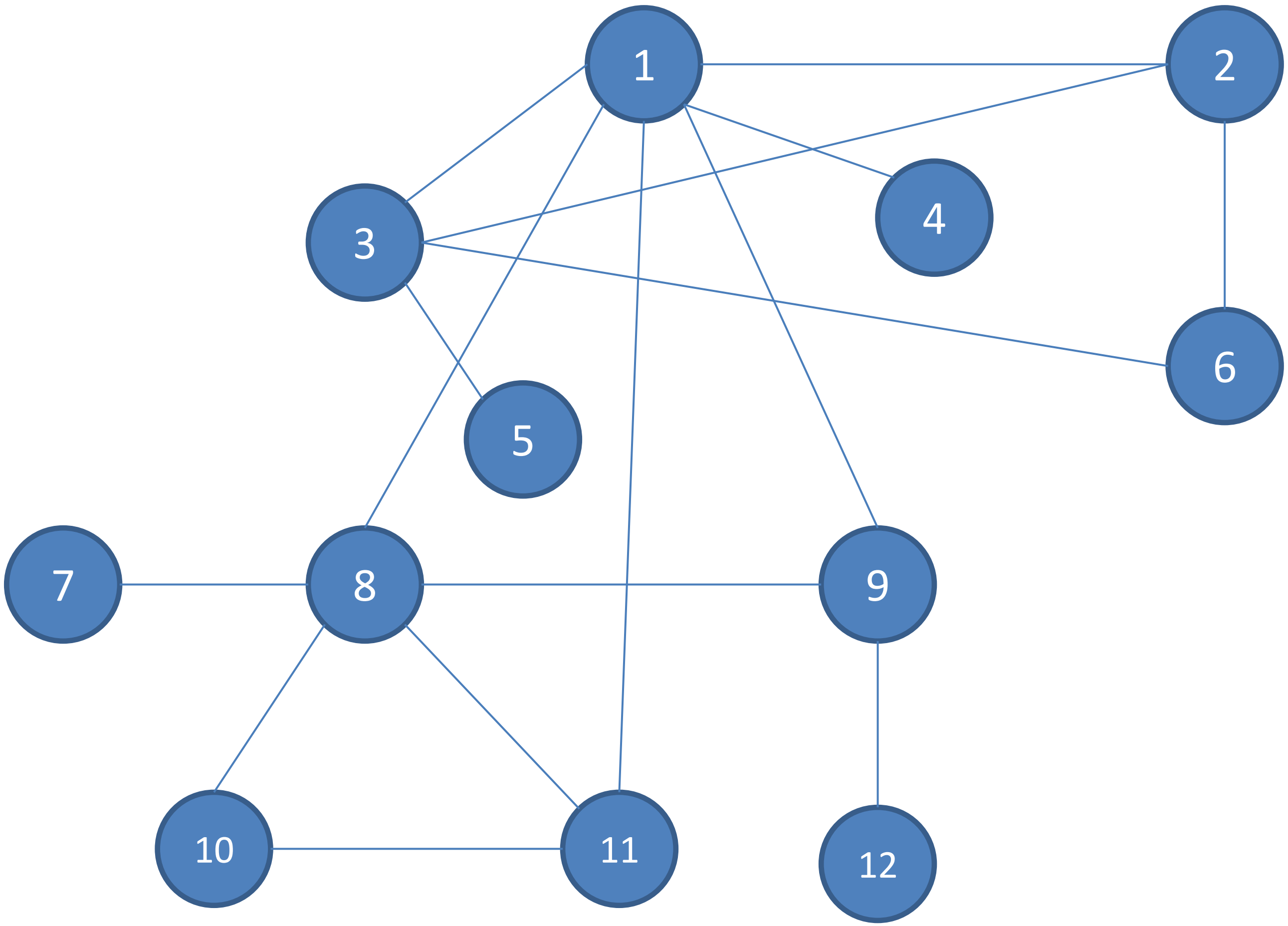
Μπορεί να συμβαίνει το i ή το ii χωρίς η V_i να είναι σημείο κοπής;

Σημεία κοπής

Ναι, αν για κάθε υποδέντρο της V_i υπάρχει πίσω τόξο που συνδέει το υποδέντρο με κάποιο γνήσιο πρόγονο της V_i (μέσα στο T^*) τότε η V_i δεν είναι σημείο κοπής



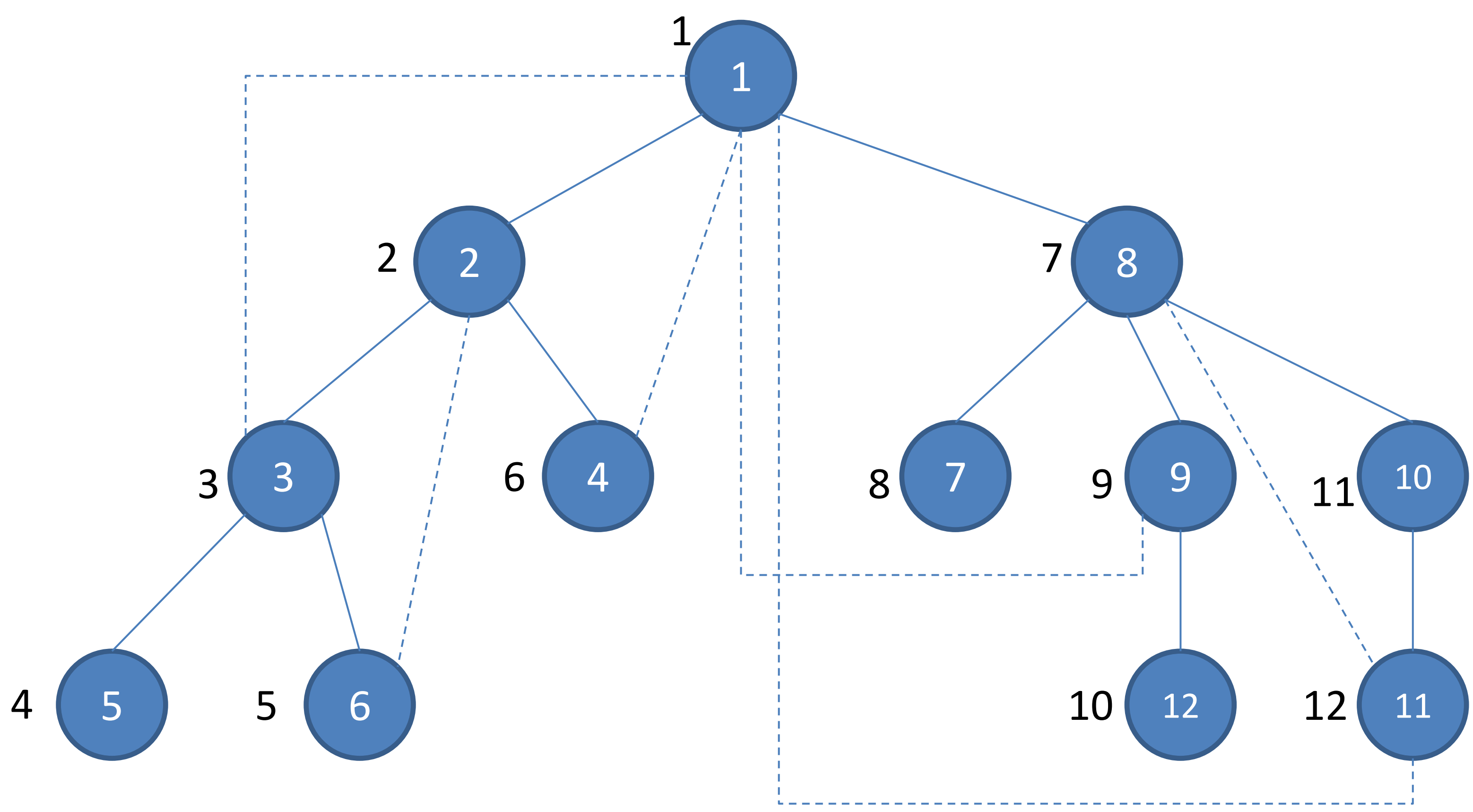
Σημεία κοπής-Εφαρμογή



Γράφημα G

Σημεία κοπής-Εφαρμογή

- Αρίθμηση προδιάταξης για το G



Σημεία κοπής-Εφαρμογή

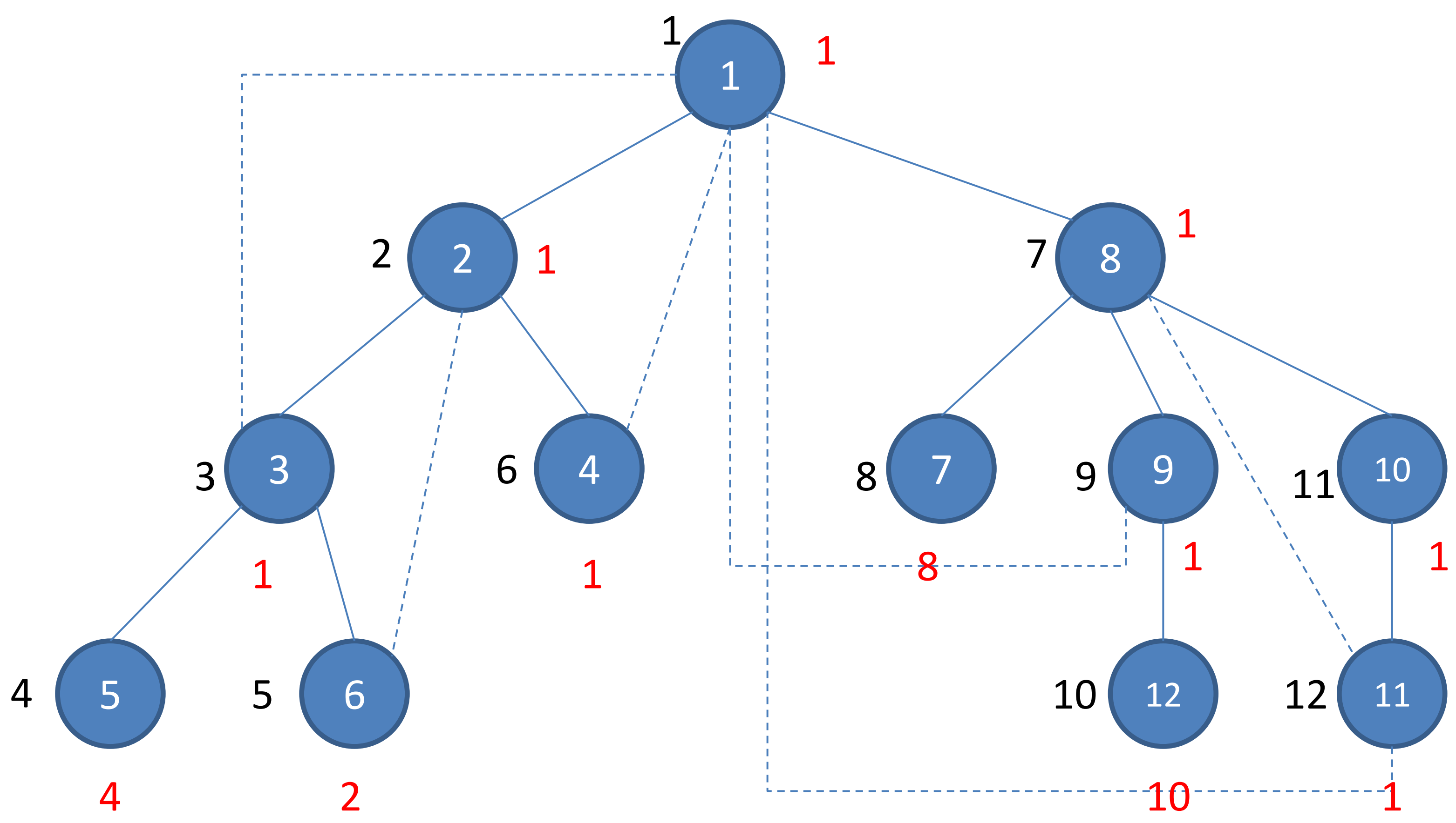
Ορίζουμε ένα νέο δείκτη σ(i):

1. Αν η V_i είναι φύλλο, τότε ο σ(i) είναι ο ελάχιστος μεταξύ νέο(i) και νέο(j) για όλα τα j, για τα οποία υπάρχει πίσω τόξο από V_i σε V_j
2. Αν η V_i δεν είναι φύλλο, οπότε έχει παιδιά, τότε ο σ(i), είναι ο ελάχιστος όχι μόνο μεταξύ των νέο(i) και όλων των νέο(j), όπως στο (1), αλλά και μεταξύ των σ(k) για όλα τα παιδιά V_k της V_i.

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα σ κατασκευάζεται επαγωγικά, αρχίζοντας από τα παιδιά προς τους προγόνους, άρα η φυσιολογική σειρά κατασκευής είναι αυτή της **μεταδιάταξης**

Σημεία κοπής-Εφαρμογή

- Αρίθμηση δείκτη για το G, με σειρά μεταδιάταξης (5,6,3,4,2,7,12,9,11,10,8,1)



Σημεία κοπής

Λήμμα: Για κάθε κορυφή V_r που έχει παιδιά, ισχύει σ(r)≤σ(k), για όλα τα παιδιά V_k της κορυφής.

Απόδειξη: Από την κατασκευή του, ο σ(r) είναι ο ελάχιστος μεταξύ όλων των σ(k) καθώς και άλλων αριθμών.

Σημεία κοπής

Λήμμα: Ας είναι V_i όχι ρίζα, όχι φύλλο. Τότε:

η V_i είναι σημείο κοπής $\leftrightarrow$ υπάρχει υποδέντρο της V_i τέτοιο ώστε σ(m)≥νεο(i) για όλες τις κορυφές V_m του υποδέντρου.

<u>Απόδειξη</u>: Από προηγούμενο λήμμα,

- η V_i είναι σημείο κοπής $\leftrightarrow$
- υπάρχει υποδέντρο της V_i που για κάθε κορυφή του V_m δεν υπάρχει πίσω τόξο που συνδέει την V_m με πρόγονο V_j της V_i $\leftrightarrow$
- υπάρχει υποδέντρο της V_i τέτοιο ώστε για κάθε κορυφή V_m του υποδέντρου, δεν συμμετέχουν αριθμοί μικρότεροι του νεο(i) κατά το σχηματισμό του σ(m) $\leftrightarrow$
- υπάρχει υποδέντρο της V_i τέτοιο ώστε για κάθε κορυφή V_m του υποδέντρου να ισχύει σ(m)≥νεο(i).

Σημεία κοπής

Θεώρημα:

Ας είναι V_i όχι ρίζα, όχι φύλλο. Τότε:

η V_i είναι σημείο κοπής $\leftrightarrow$ υπάρχει παιδί V_j της V_i τέτοιο ώστε σ(j)≥νεο(i).

Απόδειξη:

- Αν η V_i είναι σημείο κοπής τότε ας πάρουμε για V_j τη ρίζα του υποδέντρου που μας δίνει το προηγούμενο λήμμα, οπότε ισχύει: σ(j)≥νεο(i).
- Αντίστροφα, έστω V_j ένα παιδί της V_i, για το οποίο ισχύει σ(j)≥νεο(i).
- Η V_j είναι ρίζα ενός υποδέντρου της V_i.
- Για κάθε παιδί V_m της V_j, ισχύει σ(m) ≥ σ(j) από προηγούμενο λήμμα.
- Επαγωγικά αυτό ισχύει για όλες τις κορυφές του υποδέντρου, οπότε έχουμε και σ(m) ≥ νεο(i) για όλες τις κορυφές του υποδέντρου.
- Τότε από το προηγούμενο λήμμα η V_i είναι σημείο κοπής.

Σημεία κοπής-Αλγόριθμος

Αλγόριθμος Δισυν. Συν.

1. ΑΠΒ (παράγονται τα «νεο» και «εγκατ»).
2. Επίσκεψη με αρίθμηση μεταδιάταξης (διάνυσμα «εγκατ») και παραγωγή του διανύσματος σ.
3. Τότε: Σημείο κοπής είναι κάθε κορυφή V_i για την οποία ισχύει ότι υπάρχει παιδί V_j της V_i τέτοιο ώστε σ(j)$\geq$νεο(i), και η ρίζα, αν αυτή έχει πάνω από ένα παιδί.

Σημεία κοπής-Εφαρμογή

- Σημεία κοπής: 1,3,8,9