ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ: ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^o

Ακαδημαϊκό έτος: 2014-2015
Διδάσκων: Χ. Κωνσταντόπουλος

---

1. Μήκος μονοπατιού (path length) ενός δένδρου T καλείται το άθροισμα των μηκών όλων των μονοπατιών, από τη ρίζα προς τις κορυφές του δένδρου. Περιγράψτε πώς είναι δυνατόν να υπολογισθεί το μήκος μονοπατιού, με τη βοήθεια της ΑπΒ.

2. Μία κορυφή ενός μη κατευθυνόμενου δένδρου T καλείται κέντρο (center) εάν ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόστασή του από τα φύλλα του T. Να σχεδιασθεί αλγόριθμος γραμμικού χρόνου που εντοπίζει τα κέντρα ενός δένδρου.

3. Έστω ένα σύνολο n εργασιών T, όπου για κάθε εργασία t_i είναι γνωστή η χρονική της διάρκεια x_i. Δίνεται το κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα G των εξαρτήσεων μεταξύ των t_i. Σχεδιάστε και αναλύστε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει τον ελάχιστο χρόνο ολοκληρώσεως του T.

4. Στα πλαίσια ενός ευρωπαϊκού προγράμματος, εκτελέστηκαν n υποέργα t_i από διαφορετικές συνεργαζόμενες ομάδες. Οι χρόνοι έναρξης και λήξης των υποέργων, καθώς και η μεταξύ τους σχέσεις (π.χ. το υποέργο t_i ολοκληρώθηκε πριν από την έναρξη του t_j, ή η εκτέλεση των υποέργων t_i και t_j για κάποιο διάστημα πραγματοποιούνταν παράλληλα) προκύπτουν από τακτικές ανεξάρτητες αναφορές. Με ποιο τρόπο μπορεί η επιτροπή ελέγχου να διαπιστώσει αν κάποια από τις αναφορές είναι ψευδής;

5. Μία κορυφή ενός μη κατευθυνόμενου συνεκτικού άκυκλου γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται κεντρική (central) εάν η αφαίρεση της διασπά το γράφημα σε υπογραφήματα μεγέθους το πολύ $V/2$. Σχεδιάστε και αναλύστε αλγόριθμο υπολογισμού των κεντρικών κορυφών.

6. Κάλυμμα κορυφής (vertex cover) ενός γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται ένα σύνολο $V' \subseteq V$, αν κάθε ακμή $e \in E$ είναι προσκείμενη σε μία τουλάχιστον κορυφή $v \in V'$.
α. Αποδείξτε ότι το πλήθος των ακμών σε κάθε απλό μονοπάτι είναι το πολύ διπλάσιο από το μέγεθος ενός καλύμματος κορυφής.
β. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος εντός γραμμικού χρόνου $O(V + E)$, υπολογίζει το μέγεθος του μικρότερου καλύμματος κορυφής ενός δένδρου.
γ. Αν ως βάρος κορυφής ορισθεί ο βαθμός της, προτείνετε αλγόριθμο ο οποίος εντός γραμμικού χρόνου $O(V + E)$, υπολογίζει το μέγεθος του ελαφρύτερου καλύμματος κορυφής ενός δένδρου.

7. Έστω Σ ένα σύστημα ανισοτήτων της μορφής $x_i < x_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο που θα αποφαίνεται αν το Σ είναι επιλύσιμο ή όχι.

8. Έστω ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$. Σχεδιάστε ένα αλγόριθμο που θα βρίσκει, εάν υπάρχει, κύκλο Euler σε χρόνο $O(E)$.

9. Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Το G ονομάζεται διμερές αν $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ και για κάθε $\{u, v\} \in E, u \in A, v \in B$. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο που θα αποφαίνεται αν ένα γράφημα είναι διμερές.

10. Μία ομάδα ερευνητών ασχολείται με την ανάπτυξη τεχνικών συντονισμού ενός σμήνους ρομπότ. Κάθε ρομπότ έχει ένα πομπό για την επικοινωνία του με το σταθμό βάσης. Όταν τα ρομπότ έρχονται κόντα το ένα στο άλλο δημιουργούνται προβλήματα παρεμβολών. Προκειμένου να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα παρεμβολής θα πρέπει κάθε ρομπότ να φτάσει στον προορισμό του, χωρίς όμως να προσεγγίσει κάποιο άλλο ρομπότ κατά τη διαδρομή του. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:
Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, το οποίο αναπαριστά τους ορόφους ενός κτιρίου και υπάρχουν δύο ρομπότ αρχικά τοποθετημένα στους κόμβους a και b αντίστοιχα. Το ρομπότ με αφετηρία τον κόμβο a έχει ως προορισμό τον κόμβο c και το ρομπότ με αφετηρία τον κόμβο b έχει ως προορισμό τον κόμβο d. Τα ρομπότ κινούνται με βάση κάποιο χρονικό προγραμματισμό, υπό την

έννοια ότι σε κάθε χρονική στιγμή ένα από τα δύο ρομπότ διασχίζει μία ακμή.
Θα πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή τα ρομπότ να βρίσκονται σε κόμβους που η μεταξύ τους απόσταση είναι μεγαλύτερη από r, όπου r σταθερή παράμετρος του προβλήματος. Υποθέτουμε ότι οι κόμβοι a και b έχουν απόσταση μεγαλύτερη από r, ομοίως και οι κόμβοι προορισμοί c και d.
Περιγράψτε ένα αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου όπου εντοπίζει αν υπάρχουν διαδρομές που πληρούν όλες τις παραπάνω προϋποθέσεις έτσι ώστε να μην δημιουργούνται προβλήματα παρεμβολών.

11. Μία ομάδα συλλεκτών πεταλούδας επιστρέφοντας από μία εξόρμηση έχει συλλέξει n πεταλούδες, οι οποίες πιστεύουν ότι ανήκουν σε 2 διαφερτικά είδη πεταλούδας, έστω A και B. Θα ήθελαν να διαχωρίσουν τα δείγματα σε 2 ομάδες, σε αυτά που ανήκουν στο είδος A και σε αυτά που ανήκουν στο είδος B. Για το λόγο αυτό ακολουθούν την εξής τακτική.
Μελετούν κάθε πιθανό ζεύγος δειγμάτων (i, j) χωριστά και αποφαίνονται αν τα δείγματα ανήκουν στο ίδιο είδος ή σε διαφορετικό. Υπάρχει βέβαια και η περίπτωση που δεν μπορεί να βγει κάποιο πόρισμα και ονομάζουν το ζεύγος (i, j) διφορούμενο.
Μετά την έρευνα των ζευγών (i, j) έχουν στα χέρια τους τα n δείγματα, αλλά και m κρίσεις ('ίδιο' ή 'διαφορετικό') για τα δείγματα που δεν δηλώθηκαν ως διφορούμενα. Θα ήθελαν να διαπιστώσουν με κάποιο τρόπο αν οι m κρίσεις τους είναι συνεπείς. Δηλαδή, αν όντως ένα ζευγάρι (i, j) που δηλώθηκε ως ίδιο, τα δείγματα i και j ανήκουν στο ίδιο είδος, είτε το A είτε το B, ή αν όντως ένα ζευγάρι (i, j) που δηλώθηκε ως διαφορετικό, τα δείγματα i και j ανήκουν σε διαφορετικό είδος.
Περιγράψτε ένα αλγόριθμο που σε γραμμικό χρόνο $O(m + n)$ διαπιστώνει αν οι m κρίσεις τους είναι συνεπείς.

12. Πολλές φορές υπάρχει σύγχυση μεταξύ των όρων *διάμετρος* δικτύου και *μέση απόσταση* δικτύου.
Η απόσταση $dist(u, v)$ μεταξύ δύο κόμβων u και v ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ο ελάχιστος αριθμός ακμών ενός μονοπατιού που συνδέει τους δύο κόμβους. Ως διάμετρος $diam(G)$ του γραφήματος G ορίζεται η μέγιστη απόσταση μεταξύ οποιωνδήποτε κόμβων του.
Ορίζουμε ως μέση απόσταση ζευγών (average pairwise distance) $apd(G)$ του G τη μέση απόσταση όλων των πιθανών ζευγών κόμβων:

$$apd(G) = \left[\sum_{[u,v] \subseteq V} dist(u, v) \right] / \binom{n}{2}$$

Ισχύει ότι υπάρχουν γραφήματα για τα οποία ισχύει ότι $diam(G) \neq apd(G)$. Για παράδειγμα έστω γράφημα G με τρεις κόμβους u, v και w, με δύο ακμές u, v και v, w. Τότε ισχύει ότι:

$$diam(G) = dist(u, w) = 2$$

Ενώ:

$$apd(G) = (dist(u, v) + dist(u, w) + dist(v, w))/3 = 4/3$$

Βέβαια οι αριθμοί αυτοί είναι πολύ κοντινοί και κάποιος θα μπορούσε να αναρωτηθεί αν ισχύει το ίδιο και για μεγάλα γραφήματα. Ζητείται λοιπόν, να επιβεβαιώσετε ή να απορρίψετε τον εξής ισχυρισμό:
Για όλα τα συνεκτικά γραφήματα G υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός c για τον οποίο ισχύει ότι:

$$diam(G)/apd(G) \leq c$$

13. Ο Marc Lombardi (1951-2000) ήταν ένας Αμερικανός εικαστικός καλλιτέχνης ο οποίος ειδικευόταν στην απεικόνιση της χρήσης και κατάχρησης της εξουσίας. Έχτιζε γραφήματα τα οποία απεικόνιζαν τη σχέση μεταξύ των ατόμων που συμμετείχαν σε διαφορετικά σκάνδαλα των τελευταίων δεκαετιών. Οι κόμβοι του γραφήματος αντιστοιχούσαν στους συμμετέχοντες σε ένα σκάνδαλο, και οι ακμές τη σχέση που τυχόν συνέδεε δύο συμμετέχοντες. Παρόμοια γραφήματα μπορούν να προκύψουν και από τα κοινωνικά δίκτυα.
Υπάρχει έντονο ενδιαφέρον για την εύρεση σύντομων μονοπατιών σε τέτοιου είδους δίκτυα. Στην περίπτωση των γραφημάτων του Marc Lombardi, τα σύντομα μονοπάτια μπορούν να καταδείξουν ότι

μόλις λίγα βήματα χωρίζουν κάποιον με καλή φήμη από κάποιον με κακή φήμη.

Κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι ένα σύντομο μονοπάτι τέτοιου είδους είναι απλώς σύμπτωση. Για το λόγο αυτό οι ερευνητές στράφηκαν προς την εύρεση του αριθμού των συντομότερων μονοπατιών.

Έστω λοιπόν ότι σας δίνεται ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ και επισημαίνονται δύο κόμβοι v και w του γραφήματος G. Περιγράψτε έναν αλγόριθμο που επιστρέφει τον αριθμό των συντομότερων μονοπατιών από τον κόμβο v στον κόμβο w σε χρόνο $O(m + n)$ (όπου m ο αριθμός των ακμών και n ο αριθμός των κορυφών).

14. Μία ομάδα αναλυτών ασφάλειας μελετά το πρόβλημα της εξάπλωσης ενός ιού σε ένα δίκτυο υπολογιστών. Έστω ότι υπάρχουν n υπολογιστές $C_1, C_2, ..., C_n$ στο σύστημα. Δίνεται ένα σύνολο δεδομένων όπου αναφέρεται η χρονική στιγμή και το ζευγός των υπολογιστών οι οποίοι επικοινώνησαν μεταξύ τους. Το σύνολο δεδομένων λοιπόν αποτελείται από m τριάδες C_i, C_j, t_k.

Έστω ότι το σύνολο των δεδομένων μας δίνεται ταξινομημένο ως προς το χρόνο. Για λόγους απλούστευσης επίσης, έστω ότι κάθε ζεύγος υπολογιστών επικοινωνεί το πολύ μία φορά στο χρονικό διάστημα το οποίο μελετάμε.

Μελετώντας τα δεδομένα θα θέλαμε να είμασταν σε θέση να απαντήσουμε σε ερωτήσεις της μορφής: αν ο ιός μόλυνε τον υπολογιστή C_a τη χρονική στιγμή x μπορεί να έχει μολύνει και τον υπολογιστή C_b τη χρονική στιγμή y; Αν ένας υπολογιστής C_j επικοινωνεί με ένα μολυσμένο υπολογιστή C_i τη χρονική στιγμή t_k (με άλλα λόγια αν η τριάδα C_i, C_j, t_k ή C_j, C_i, t_k υπάρχει στα δεδομένα), τότε και ο υπολογιστής C_j μολύνεται τη χρονική στιγμή t_k. Ο ιός μπορεί να εξαπλωθεί μέσω μιας ακολουθίας επικοινωνιών μεταξύ των υπολογιστών. Αν για παράδειγμα ο υπολογιστής C_i μολύνεται τη χρονική στιγμή t_k, και στα δεδομένα υπάρχουν οι τριάδες C_i, C_j, t_k και C_j, C_q, t_r με $t_k \leq t_r$, τότε και ο υπολογιστής C_q θα μολυνθεί μέσω του C_j.

Περιγράψτε ένα αλγόριθμο που μπορεί να απαντήσει στο ερώτημα εάν ο ιός έχει μολύνει τον υπολογιστή C_a τη χρονική στιγμή x μπορεί να έχει μολύνει και τον υπολογιστή C_b τη χρονική στιγμή y, δοθέντος του συνόλου των δεδομένων επικοινωνίας. Ο αλγόριθμος θα πρέπει να έχει πολυπλοκότητα $O(m + n)$.