Άσκηση 1

Μήκος μονοπατιού (path length) ενός δένδρου T καλείται το άθροισμα των μηκών όλων των μονοπατιών, από τη ρίζα προς τις κορυφές του δένδρου. Περιγράψτε πώς είναι δυνατόν να υπολογισθεί το μήκος μονοπατιού, με τη βοήθεια της ΑπΒ.

Υπολογισμός μήκος μονοπατιού δέντρου

- Μήκος μονοπατιού (path length) ενός δέντρου T καλείται το άθροισμα των μηκών όλων των μονοπατιών από την ρίζα προς τις κορυφές του δέντρου.

- Το μήκος μονοπατιού ενός δέντρου μπορεί να υπολογισθεί με τη βοήθεια της Αναζήτησης σε Βάθος (ΑσΒ).
    1. Για τον υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε μία μεταβλητή dist η οποία κρατά την απόσταση του τρέχοντος κόμβου (καθώς διασχίζουμε το δέντρο σύμφωνα με την ΑσΒ) από τη ρίζα και μία μεταβλητή pathlength που θα μετρά το μήκος μονοπατιού.
    2. Όποτε επισκεπτόμαστε ένα κόμβο για πρώτη φορά, η μεταβλητή pathlength θα αυξάνεται κατά την τρέχουσα τιμή της dist.

Άσκηση 2

Μία κορυφή ενός μη κατευθυνόμενου δένδρου T καλείται κέντρο (center) εάν ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόστασή του από τα φύλλα του T. Να σχεδιασθεί αλγόριθμος γραμμικού χρόνου που εντοπίζει τα κέντρα ενός δένδρου.

Υπολογισμός κέντρου ενός δέντρου

- ❖ Μία κορυφή ενός μη κατευθυνόμενου δένδρου T καλείται κέντρο (center) εάν ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόστασή του από τα φύλλα του T.

- Διαδικασία υπολογισμού κέντρου ενός δέντρου:
  - Αρχίζουμε να αφαιρούμε διαδοχικά τα φύλλα του δέντρου και όσες κορυφές κατά τη διαδικασία γίνουν φύλλα, μέχρι να μείνουν μία ή δύο γειτονικές κορυφές, στην περίπτωση που το μακρύτερο μονοπάτι είναι άρτιο.
  - Τα δύο κέντρα είναι γειτονικά, καθώς εάν υπήρχε ενδιάμεση κορυφή u που τα συνδέει τότε η u θα ήταν το κέντρο.
  - Επίσης, τρεις κορυφές αποκλείεται να αποτελούν κέντρο, καθώς εξ ορισμού θα σχημάτιζαν κύκλο.

Υπολογισμός κέντρου ενός δέντρου

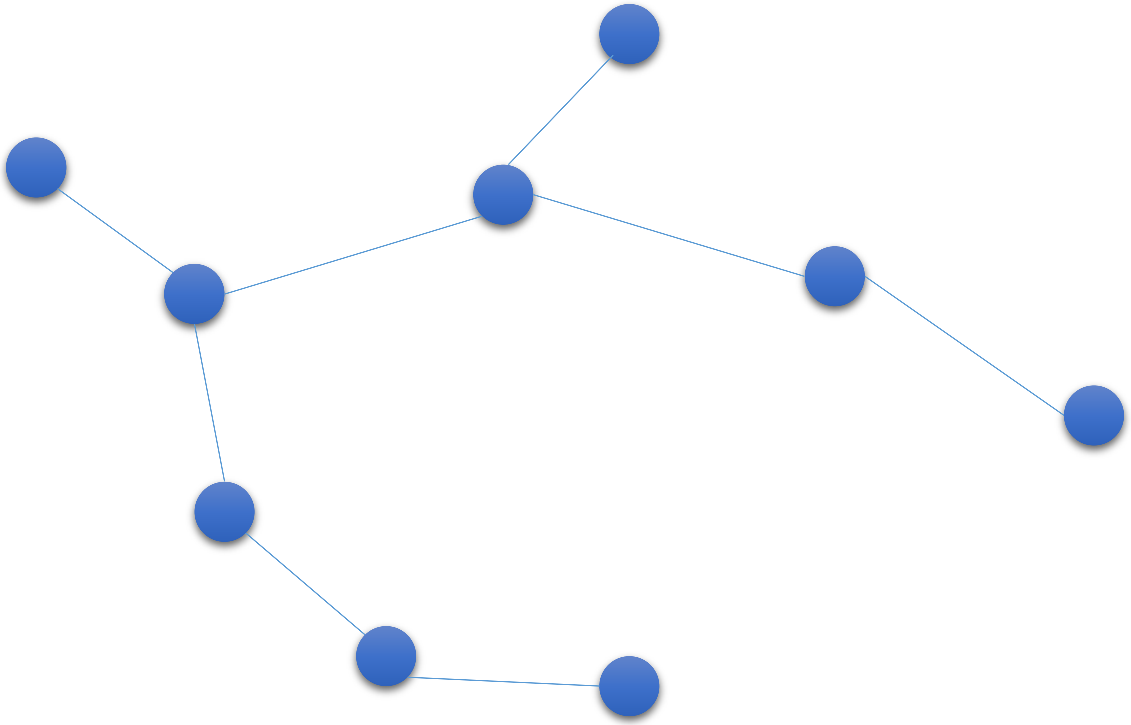
- Ουσιαστικά στον αλγόριθμο υπολογισμού του κέντρου ενός δέντρου πραγματοποιούμε μία ανάποδη διάσχιση του δέντρου σύμφωνα με την Αναζήτηση κατά Πλάτος (ΑκΠ), ξεκινώντας από το τελευταίο επίπεδο του δέντρου της ΑκΠ, και συνεχίζουμε «ξεφλουδίζοντας» το δέντρο κατά επίπεδα.
- Αρχικά αφαιρούνται τα φύλλα, κατόπιν οι κορυφές που έγιναν φύλλα εξ αιτίας της αφαίρεσης των κανονικών φύλλων κ.ο.κ.

❖ Χρονική πολυπλοκότητα αλγορίθμου:

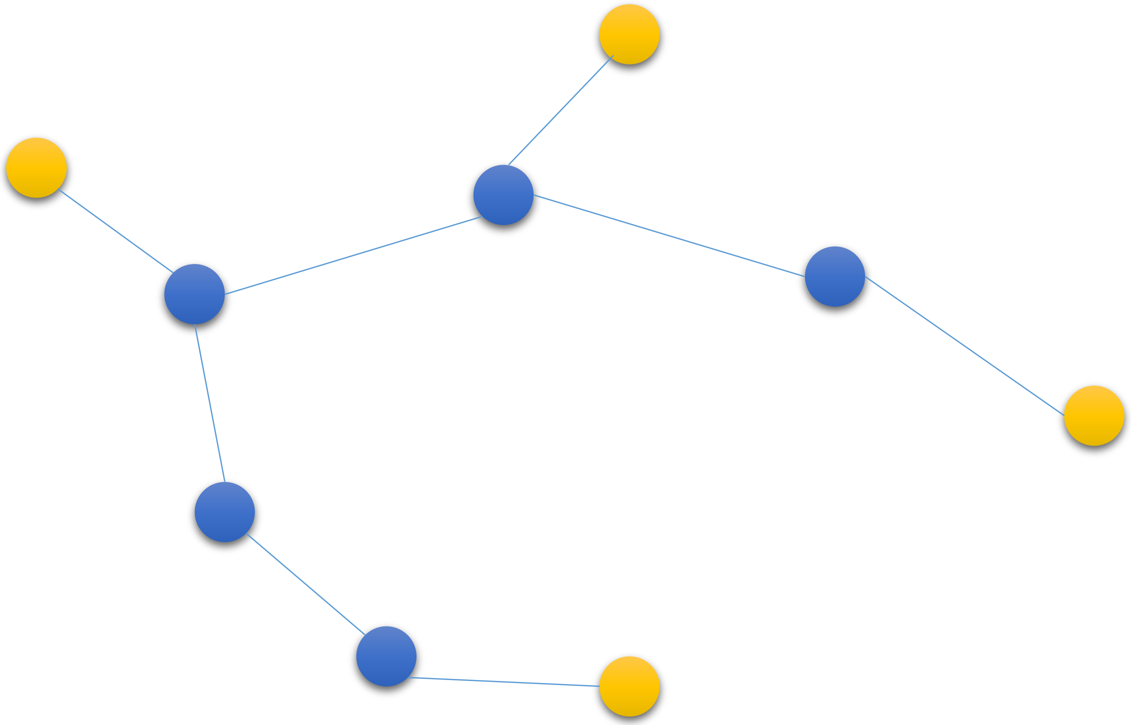
$$\mathrm{O}(V+E) = O(V),$$

καθώς σε κάθε δέντρο με V κορυφές και E ακμές, ισχύει ότι $\mathrm{E} = V - 1$

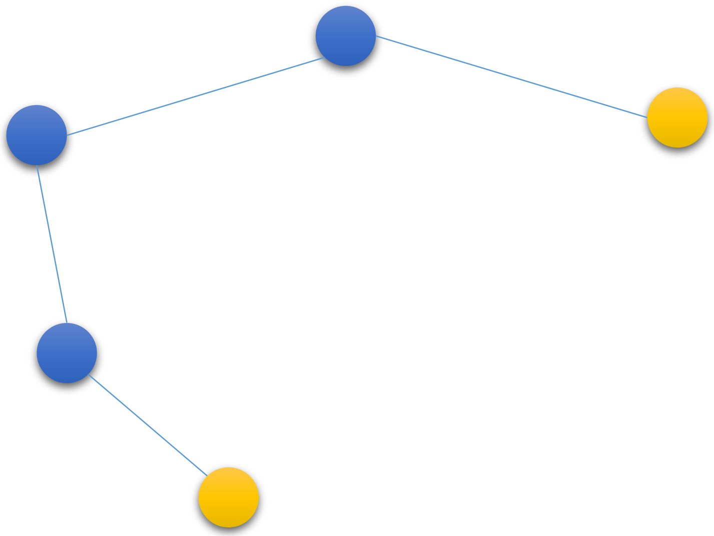
Υπολογισμός κέντρου ενός δέντρου



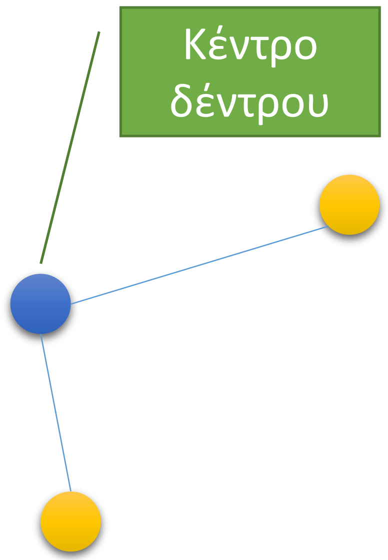
Υπολογισμός κέντρου ενός δέντρου



Υπολογισμός κέντρου ενός δέντρου



Υπολογισμός κέντρου ενός δέντρου



Άσκηση 3

Έστω ένα σύνολο n εργασιών T, όπου για κάθε εργασία t_i είναι γνωστή η χρονική της διάρκεια x_i. Δίνεται το κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα G των εξαρτήσεων μεταξύ των t_i. Σχεδιάστε και αναλύστε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει τον ελάχιστο χρόνο ολοκληρώσεως του T.

Ελάχιστος χρόνος περάτωσης έργου

❖Έστω ένα
γνωστή η
γράφημα
έναν αλγό
του T.

Τοπολογική διάταξη ενός **Κατευθυνόμενου Άκυκλου Γράφου** (Directed Acyclic Graph ή DAG), ονομάζεται στη Θεωρία Γράφων η γραμμική διάταξη των κόμβων, έτσι ώστε **κάθε πρόγονος ενός κόμβου v προηγείται του v στη διάταξη**.

Κάθε Κατευθυνόμενος Άκυκλος Γράφος μπορεί να έχει μία ή περισσότερες τοπολογικές διατάξεις.

- Χρειάζεται αρχικά μία τοπολογική διάταξη του γραφήματος.
- Παρατηρούμε ότι για μία κορυφή u ο ελάχιστος χρόνος τ(u) που απαιτείται είναι:

$$\boldsymbol{x_u + \max(\tau(w))}, \textbf{ όπου } \boldsymbol{w} \textbf{ γείτονας της } \boldsymbol{u}$$

Ελάχιστος χρόνος περάτωσης έργου

- Επομένως για τον υπολογισμό του ελάχιστου χρόνου περάτωσης των εργασιών αρκεί μία **ΑσΒ** του γραφήματος **κατά τοπολογική διάταξη**. Ο χρόνος του κάθε κόμβου u θα καθορίζεται από την προηγούμενη σχέση.

- Χρονική πολυπλοκότητα αλγορίθμου:

γραμμική $O(V)$

Άσκηση 4

Στα πλαίσια ενός ευρωπαϊκού προγράμματος, εκτελέστηκαν n υποέργα t_i από διαφορετικές συνεργαζόμενες ομάδες. Οι χρόνοι έναρξης και λήξης των υποέργων, καθώς και η μεταξύ τους σχέσεις (π.χ. το υποέργο t_i ολοκληρώθηκε πριν από την έναρξη του t_j, ή η εκτέλεση των υποέργων t_i και t_j για κάποιο διάστημα πραγματοποιούνταν παράλληλα) προκύπτουν από τακτικές ανεξάρτητες αναφορές. Με ποιο τρόπο μπορεί η επιτροπή ελέγχου να διαπιστώσει αν κάποια από τις αναφορές είναι ψευδής;

Άσκηση 4

❖ Ιδέα: Θα πρέπει να κατασκευάσω ένα γράφημα που αναπαριστά το προς επίλυση πρόβλημα.

1. Με κάθε υποέργο συσχετίζουμε 2 κορυφές, η μία αντιστοιχεί στην έναρξή του και η άλλη στην περάτωσή του. Η κορυφή της έναρξης συνδέεται με κατευθυνόμενη ακμή με την κορυφή της περάτωσης.
2. Για κάθε σχέση της μορφής «το υποέργο t_i ολοκληρώθηκε πριν την έναρξη του t_j», η κορυφή περάτωσης του t_i συνδέεται με κατευθυνόμενη ακμή με την κορυφή έναρξης του t_j.
3. Για κάθε σχέση της μορφής «η εκτέλεση των t_i, t_j για κάποιο διάστημα γινόταν παράλληλα», οι κορυφές έναρξης των t_i, t_j συνδέονται με τις κορυφές περάτωσης των t_j,t_i αντίστοιχα.

Λύση: Αν το προκύπτον γράφημα δεν είναι Κατευθυνόμενο Άκυκλο Γράφημα (μία ΑσΒ δεν ανακαλύπτει οπισθοακμές), τότε οι αναφορές είναι ψευδείς.

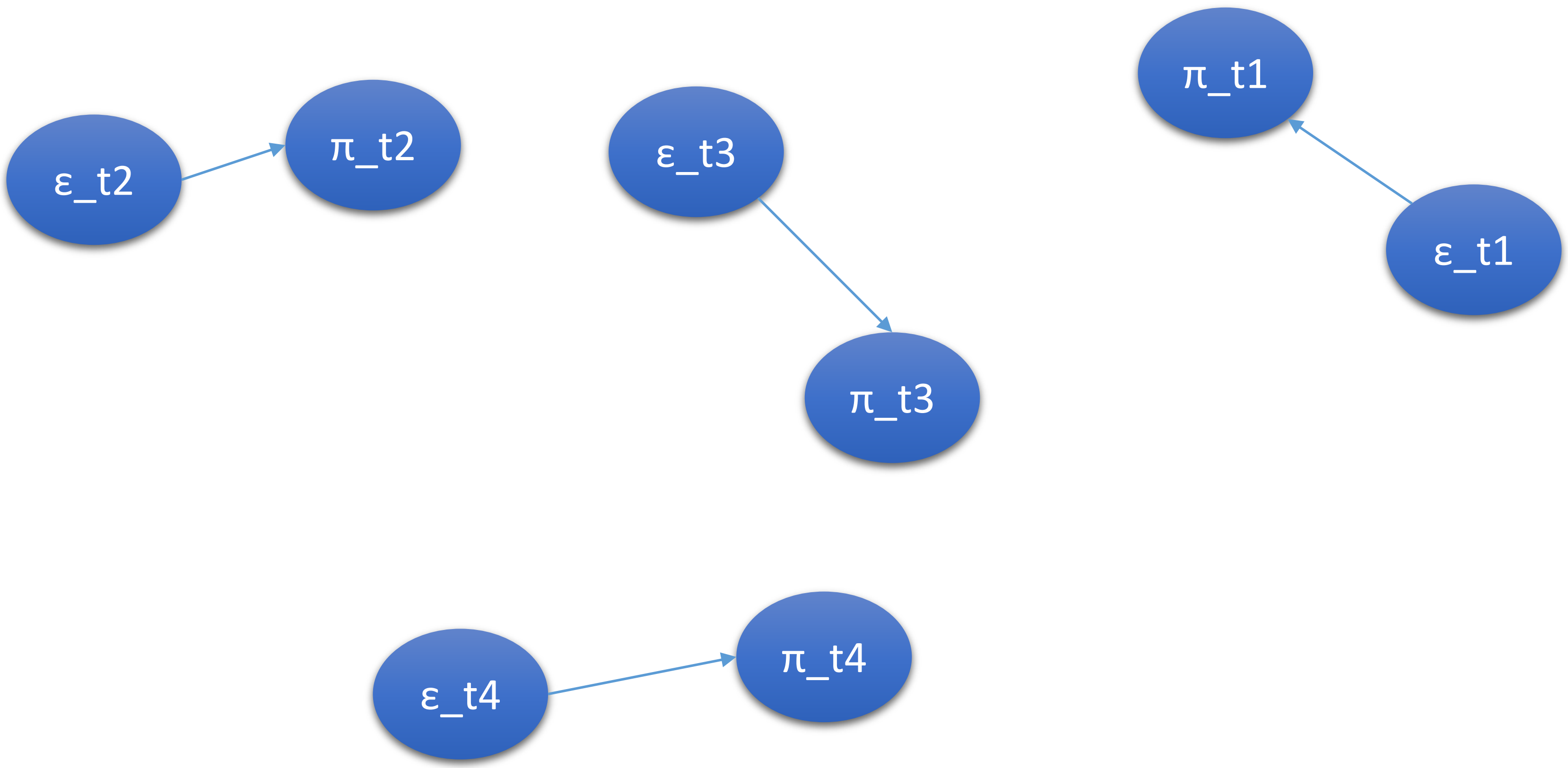
Άσκηση 4

Παράδειγμα

- το υποέργο t_2 ολοκληρώθηκε πριν την έναρξη του t_4
- το υποέργο t_3 ολοκληρώθηκε πριν την έναρξη του t_4
- το υποέργο t_4 ολοκληρώθηκε πριν την έναρξη του t_1
- η εκτέλεση των t_1, t_3 για κάποιο διάστημα γινόταν παράλληλα
- η εκτέλεση των t_2, t_3 για κάποιο διάστημα γινόταν παράλληλα

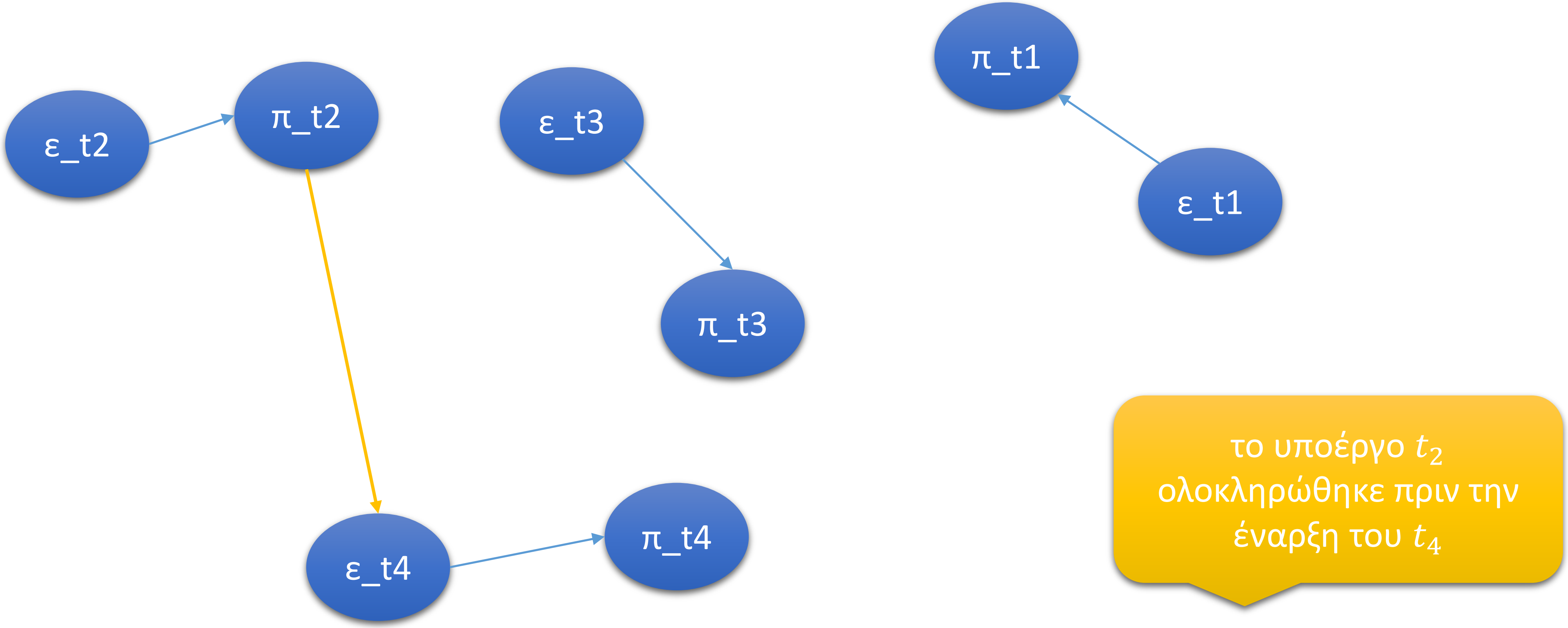
Άσκηση 4

Γράφημα Παραδείγματος



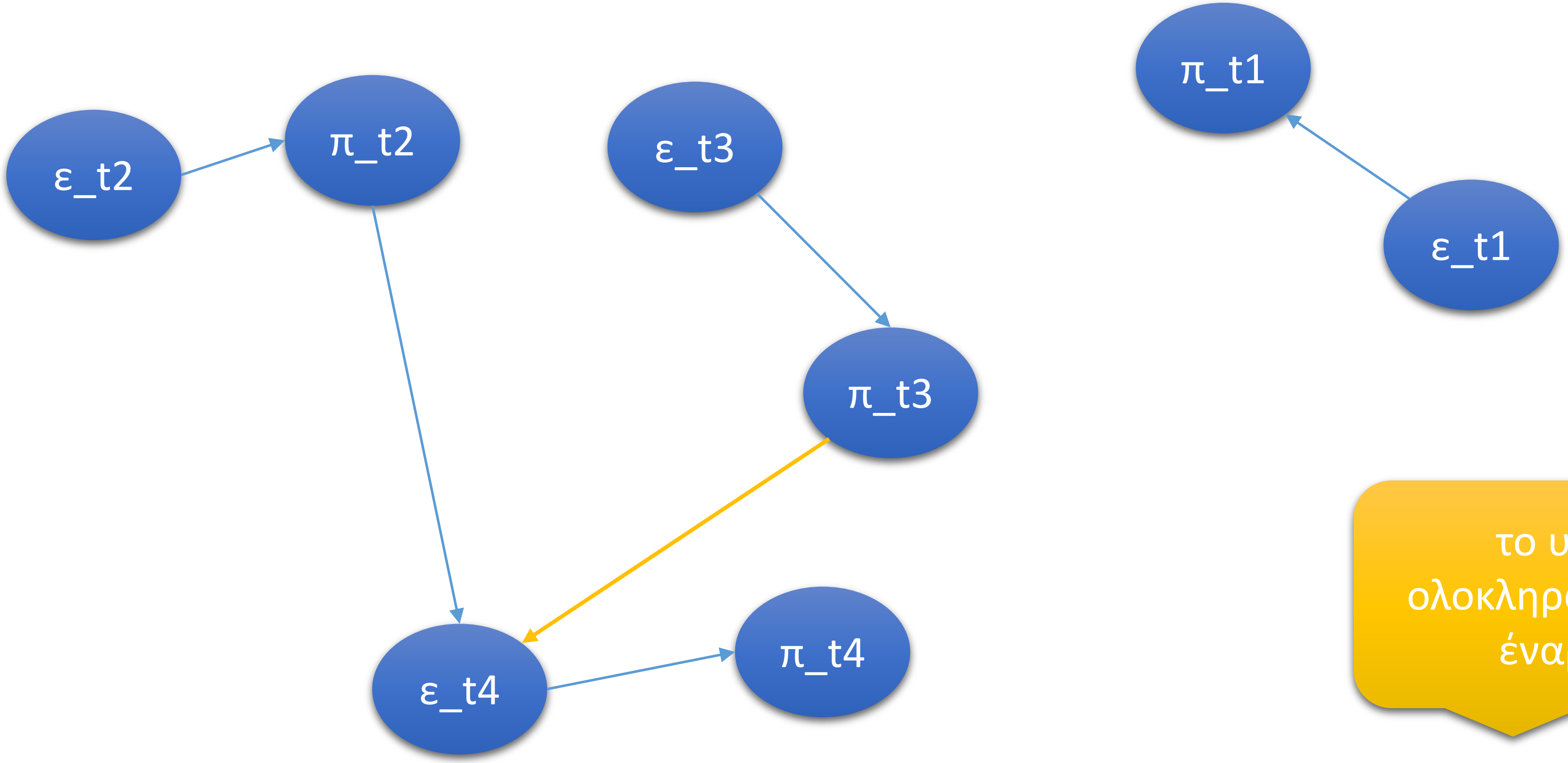
Άσκηση 4

Γράφημα Παραδείγματος



Άσκηση 4

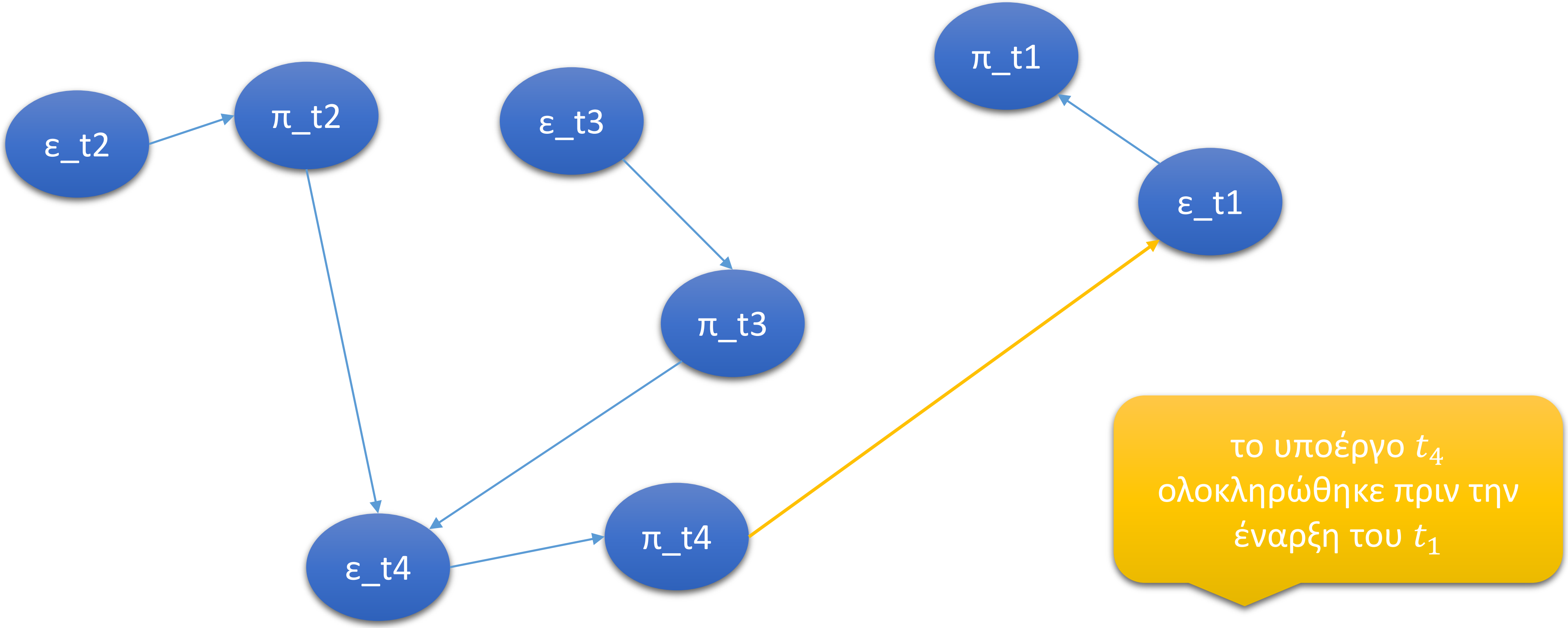
Γράφημα Παραδείγματος



το υποέργο t_3 ολοκληρώθηκε πριν την έναρξη του t_4

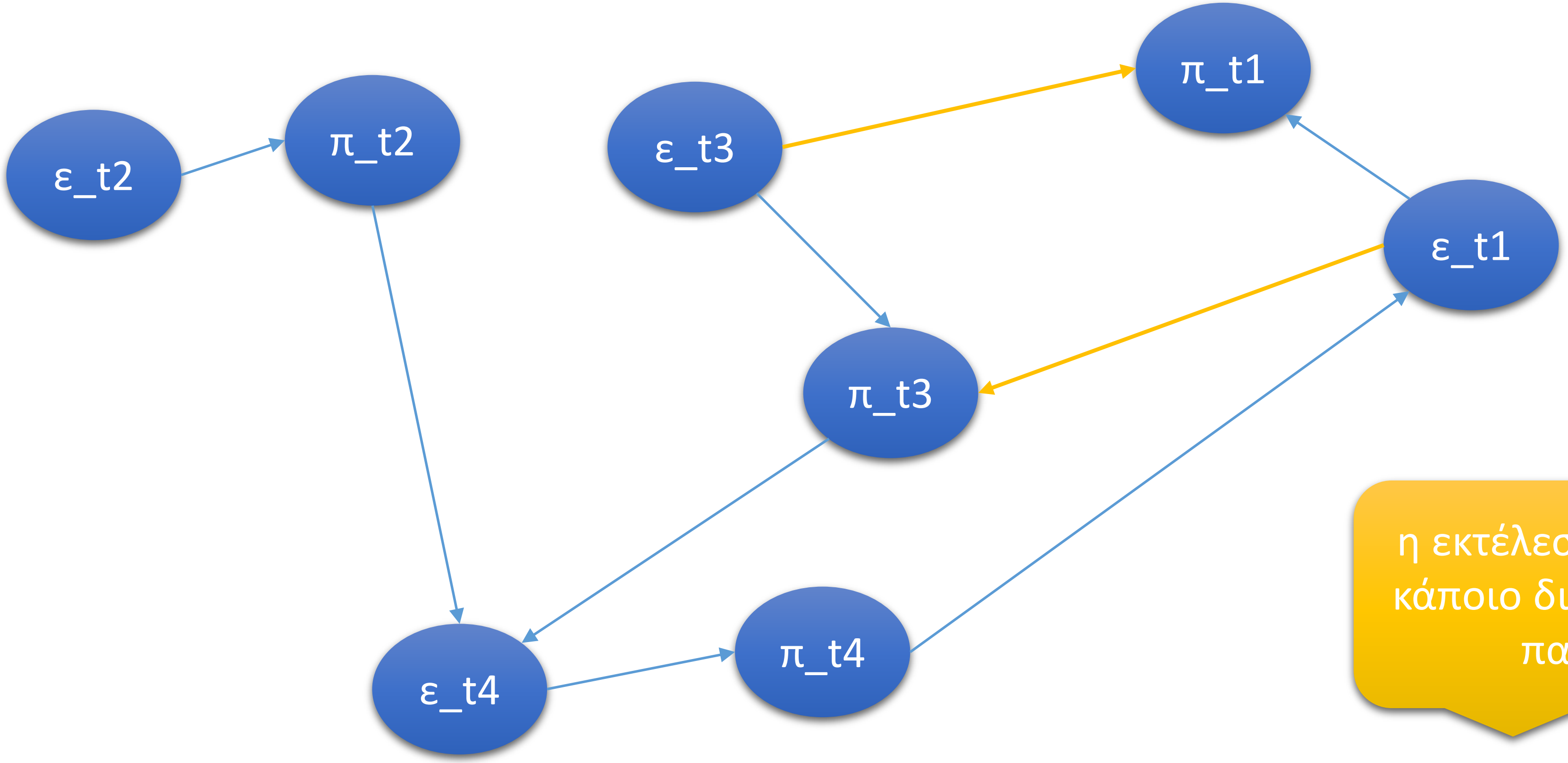
Άσκηση 4

Γράφημα Παραδείγματος



Άσκηση 4

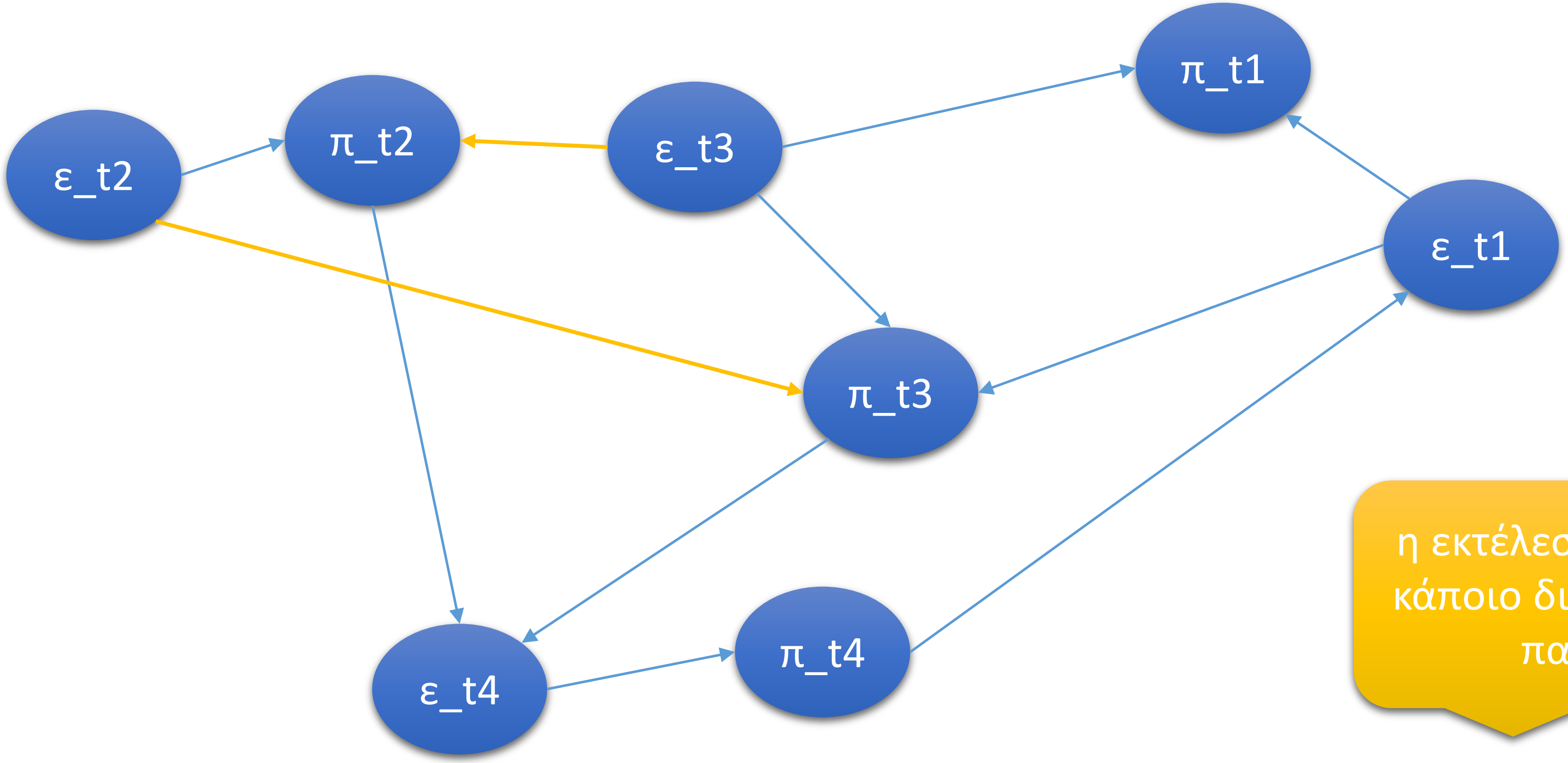
Γράφημα Παραδείγματος



η εκτέλεση των t_1, t_3 για κάποιο διάστημα γινόταν παράλληλα

Άσκηση 4

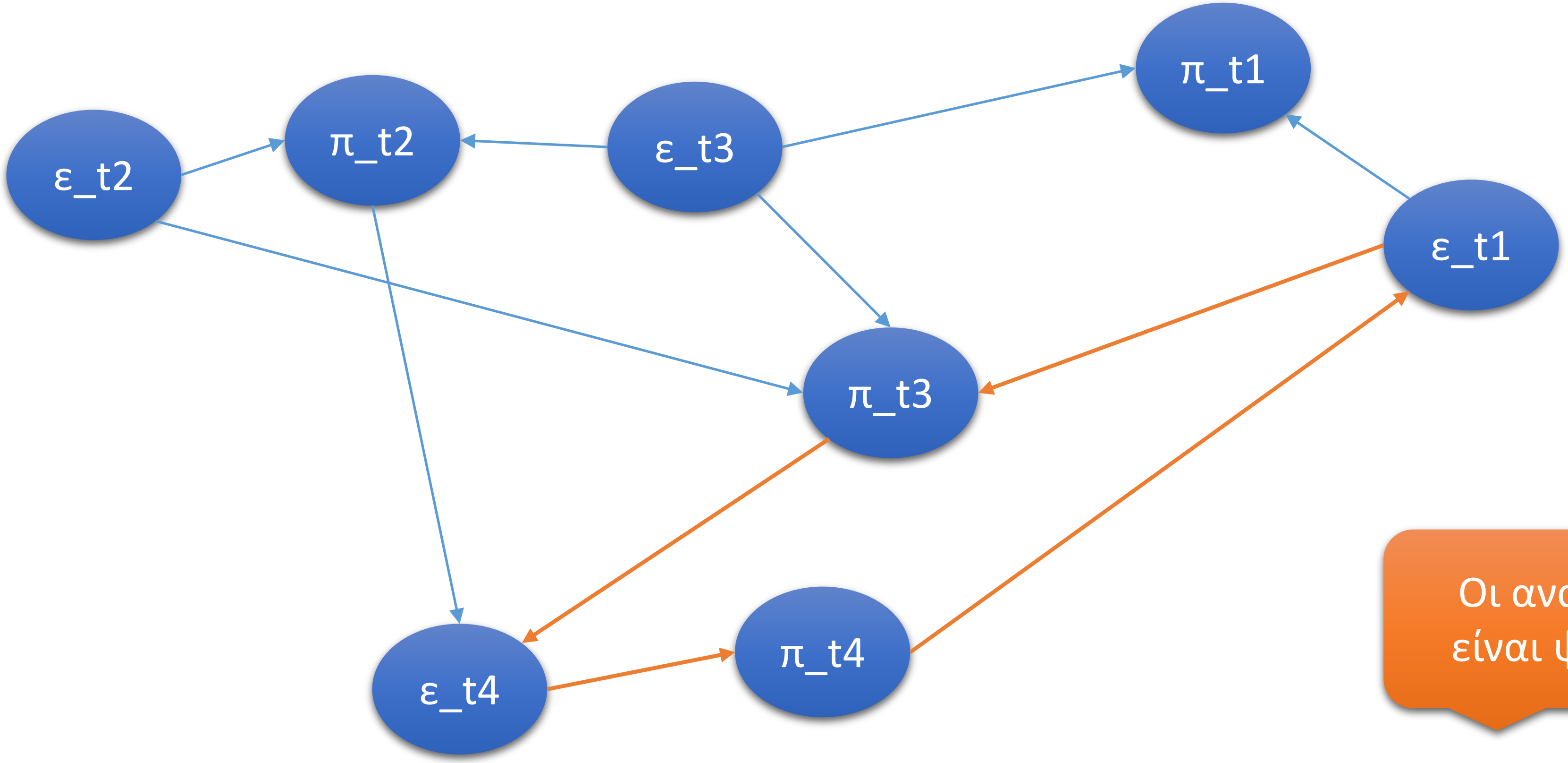
Γράφημα Παραδείγματος



η εκτέλεση των t_2, t_3 για κάποιο διάστημα γινόταν παράλληλα

Άσκηση 4

Γράφημα Παραδείγματος



Οι αναφορές είναι ψευδείς

Άσκηση 5

Μία κορυφή ενός μη κατευθυνόμενου συνεκτικού άκυκλου γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται κεντρική (central) εάν η αφαίρεση της διασπά το γράφημα σε υπογραφήματα μεγέθους το πολύ $V/2$. Σχεδιάστε και αναλύστε αλγόριθμο υπολογισμού των κεντρικών κορυφών.

Υπολογισμός κεντρικών κορυφών

❖ Μία κορυφή ενός μη κατευθυνόμενου συνεκτικού άκυκλου γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται κεντρική (central) εάν η αφαίρεση της διασπά το γράφημα σε υπογραφήματα μεγέθους το πολύ $V/2$.

- Το γράφημα εισόδου είναι δέντρο.
- Η λύση προκύπτει με μία μικρή τροποποίηση της ΑσΒ.
- Δεσμεύουμε έναν πίνακα c, όπου το $c[u]$ μας δίνει το πλήθος των κορυφών του υποδέντρου T_u με κορυφή u στο δέντρο ΑσΒ.
- Ο υπολογισμός του c γίνεται κατά τη διάρκεια της ΑσΒ: Αρχική τιμή του $c[u]$ είναι η μονάδα, ενώ προσθέτουμε στο $c[u]$ την τιμή του $c[w]$ κάθε φορά που επιστρέφουμε από γειτονική κορυφή w.

Υπολογισμός κεντρικών κορυφών

- Όταν ολοκληρωθούν οι επισκέψεις προς τις γειτονικές κορυφές είμαστε έτοιμοι να διαπιστώσουμε ότι η u είναι κέντρο, καθώς θα πρέπει:

α) $c[u] \geq V/2$ και β) $c[w] \leq V/2$

Για κάθε γειτονική κορυφή w που η u προκάλεσε την επίσκεψή της.

- Το α) εξασφαλίζει ότι στο τμήμα του δέντρου ΑσΒ που περιέχει τον πατέρα της u το πλήθος των κορυφών είναι μικρότερο ή ίσο με V/2, ενώ το β) είναι αναγκαίο εξ ορισμού.

- Χρονική πολυπλοκότητα αλγορίθμου:

O(V+E)

Άσκηση 6

Κάλυμμα κορυφής (vertex cover) ενός γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται ένα σύνολο $V' \subseteq V$, αν κάθε ακμή $e \in E$ είναι προσκείμενη σε μία τουλάχιστον κορυφή $v \in V'$.

α. Αποδείξτε ότι το πλήθος των ακμών σε κάθε απλό μονοπάτι είναι το πολύ διπλάσιο από το μέγεθος ενός καλύμματος κορυφής.

β. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο ο οποίος εντός γραμμικού χρόνου $O(V + E)$, υπολογίζει το μέγεθος του μικρότερου καλύμματος κορυφής ενός δένδρου.

γ. Αν ως βάρος κορυφής ορισθεί ο βαθμός της, προτείνετε αλγόριθμο ο οποίος εντός γραμμικού χρόνου $O(V + E)$, υπολογίζει το μέγεθος του ελαφρύτερου καλύμματος κορυφής ενός δένδρου.

Κάλυμμα κορυφής

- Κάλυμμα κορυφής (vertex cover) ενός γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται ένα σύνολο $V' \subseteq V$, αν κάθε ακμή $e \in E$ είναι προσκείμενη σε μία τουλάχιστον κορυφή $v \in V'$.

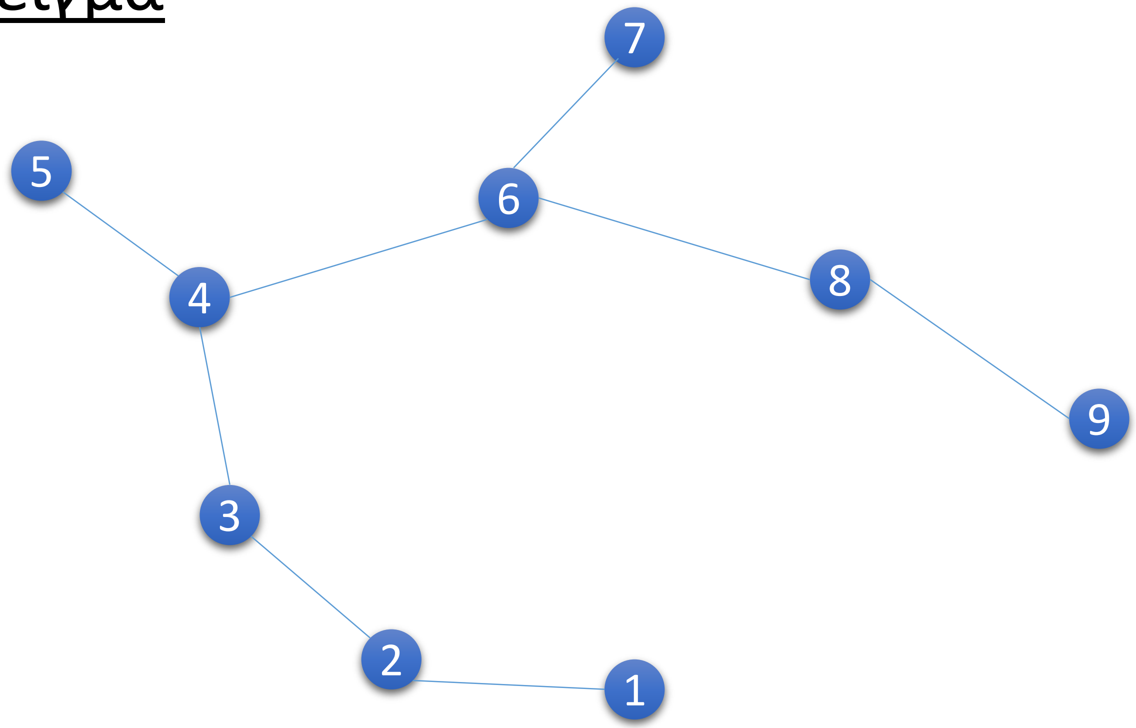
α. Έστω ένα μονοπάτι με διαδοχικές κορυφές $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$

Ποιο είναι το ελάχιστο κάλυμμα κορυφής του μονοπατιού;

Η πιο αραιή κάλυψη των ακμών προκύπτει αν επιλεγούν οι ζυγές κορυφές.

Κάλυμμα κορυφής

<u>Παράδειγμα</u>



Προτείνετε ένα κάλυμμα κορυφής

Κάλυμμα κορυφής

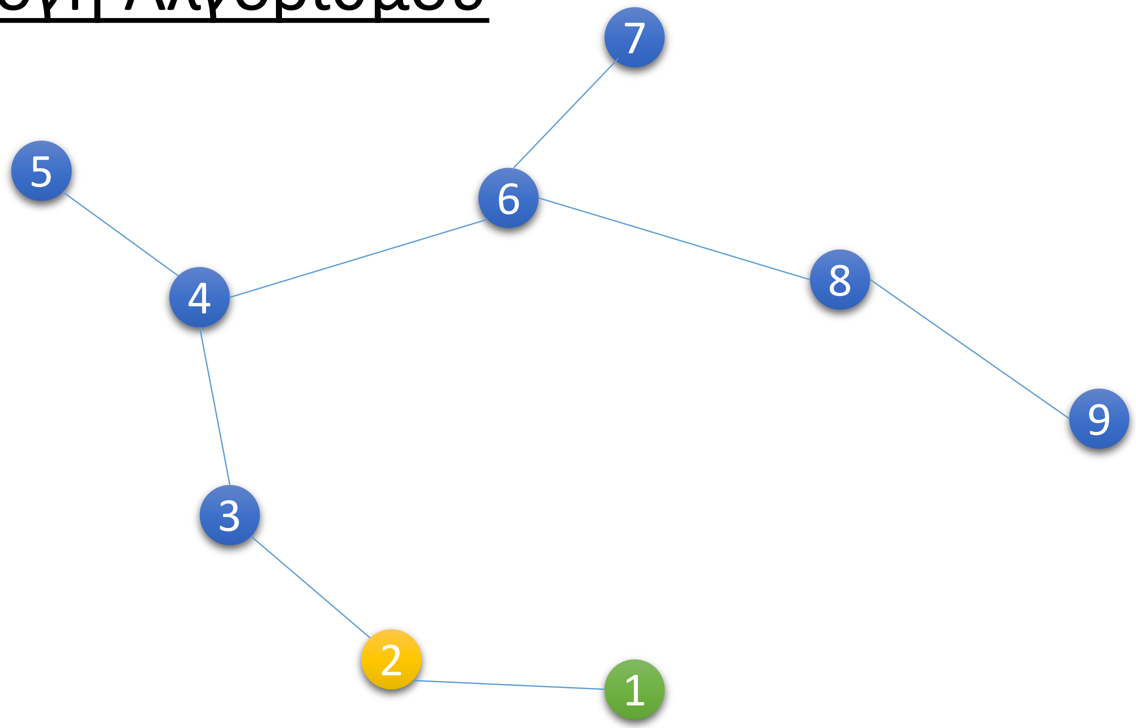
β. Η λύση βασίζεται στην έλλειψη κύκλων, κάθε ακμή για να καλυφθεί χρειάζεται τουλάχιστον μία κορυφή.

Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στον εξής άπληστο αλγόριθμο:

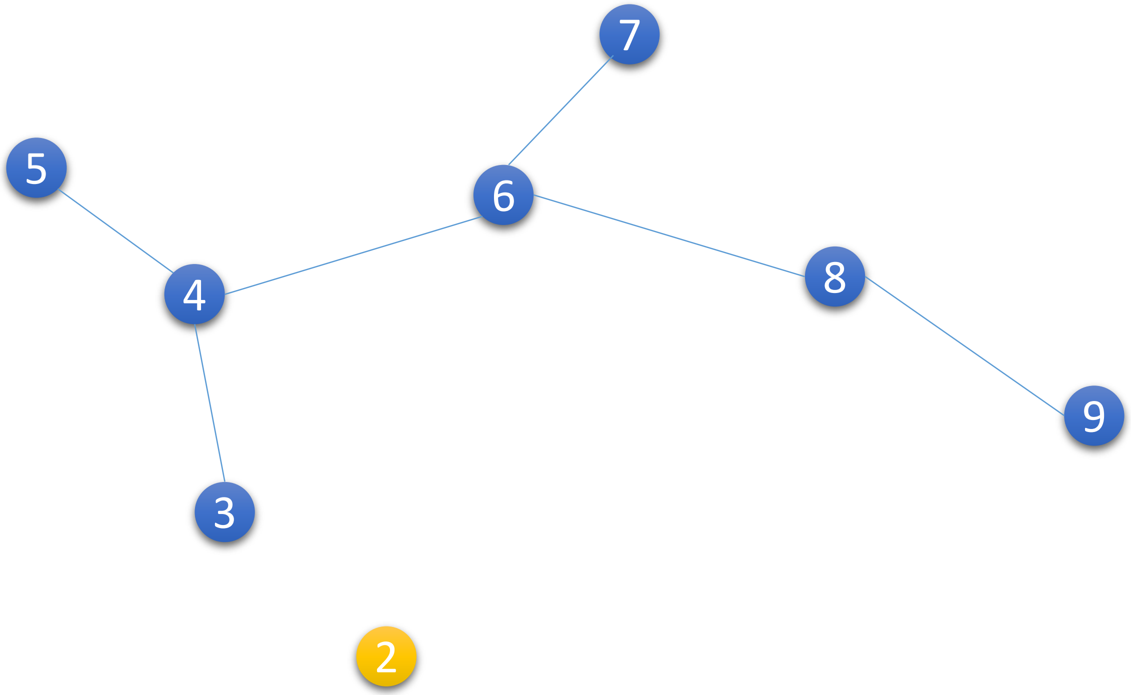
Εκκινώντας από ένα φύλλο, μεταβαίνουμε στον πατέρα του, τον οποίο συμπεριλαμβάνουμε στο υπό διαμόρφωση κάλυμμα κορυφής. Εν συνεχεία, διαγράφουμε τις καλυπτόμενες ακμές και συνεχίζουμε αναδρομικά στο «κλαδεμένο» δέντρο, έως ότου απομείνει μία ακμή. Τότε επιλέγουμε μία τυχαία κορυφή της και ο αλγόριθμος τερματίζει. Οι κορυφές που συλλέγει ο αλγόριθμος προφανώς συνιστούν ένα κάλυμμα.

Κάλυμμα κορυφής

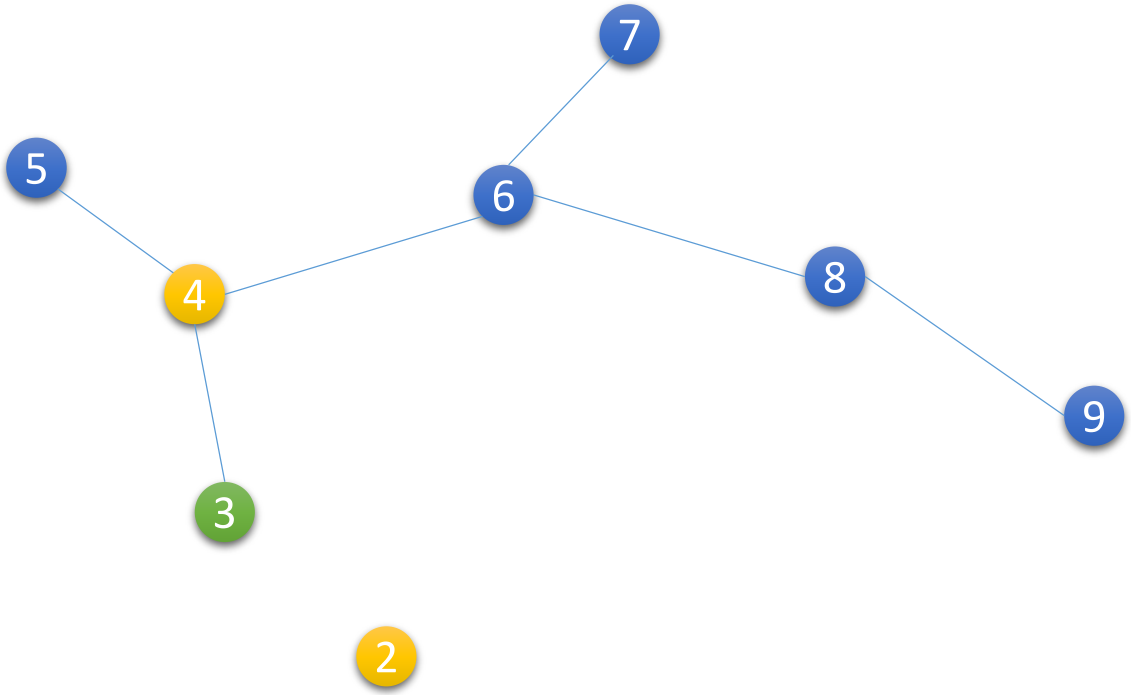
Εφαρμογή Αλγορίθμου



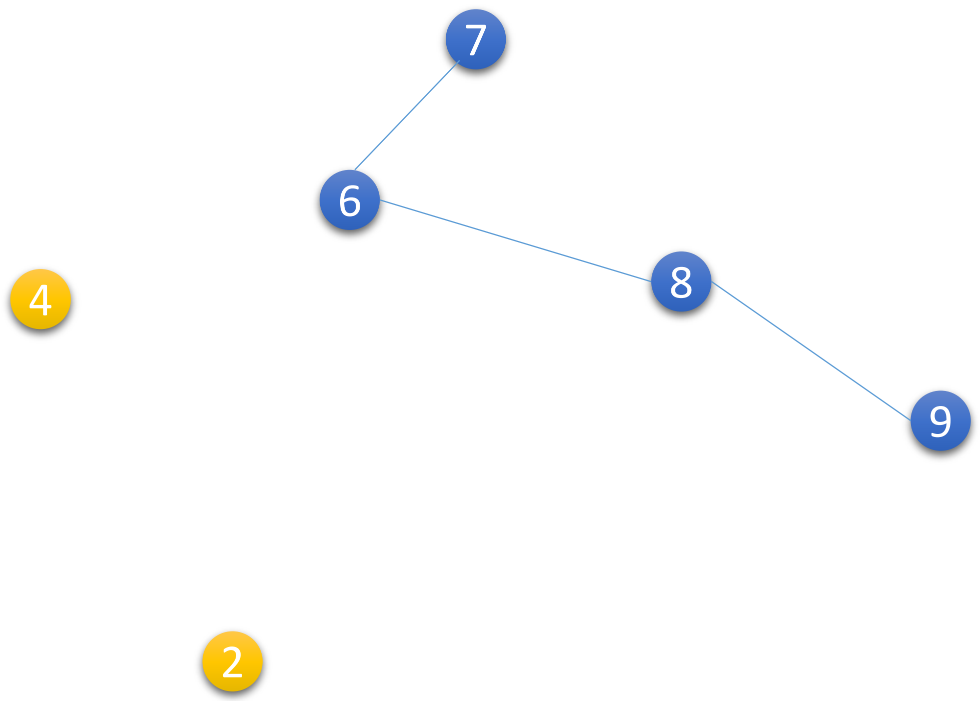
Κάλυμμα κορυφής



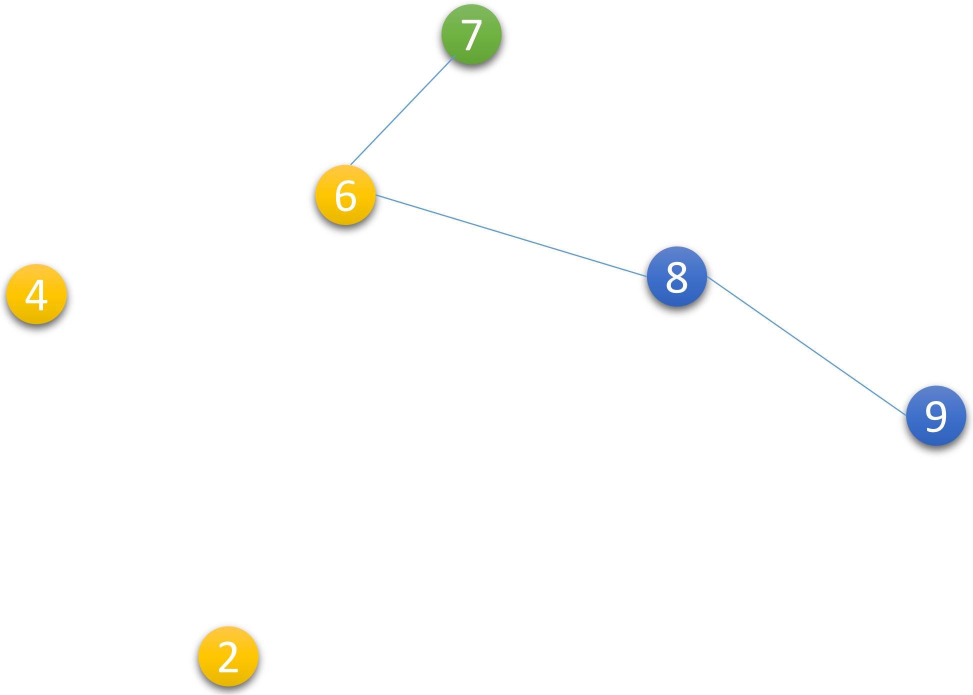
Κάλυμμα κορυφής



Κάλυμμα κορυφής



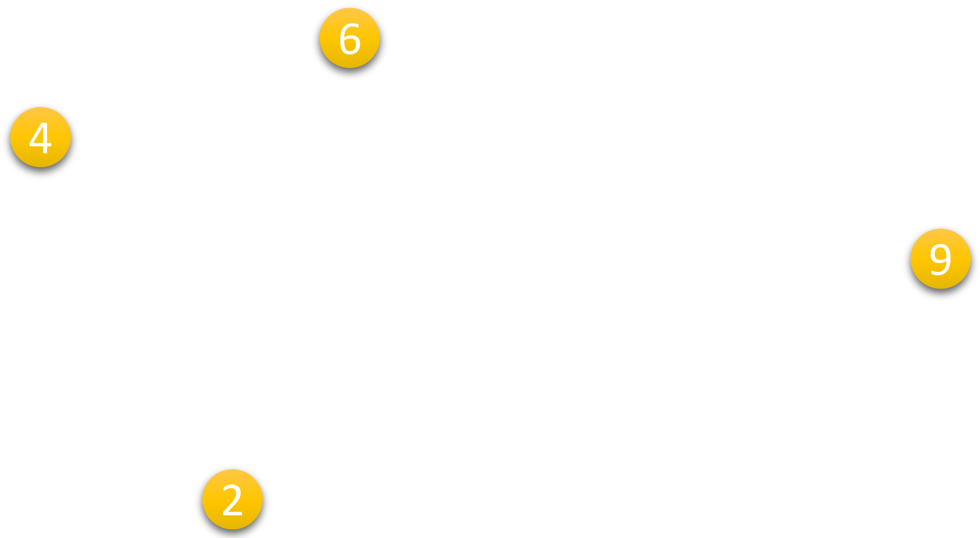
Κάλυμμα κορυφής



Κάλυμμα κορυφής

Κάλυμμα κορυφής

Κάλυμμα κορυφής



Τελική λύση:
Κάλυμμα κορυφής={2,4,6,9}

Κάλυμμα κορυφής

γ. Εφόσον κάθε ακμή πρέπει να καλυφθεί από κορυφή, το ελάχιστο βάρος καλύμματος ισούται τουλάχιστον με το πλήθος των ακμών του δέντρου.

Προκειμένου να πετύχουμε κάτι τέτοιο, αρκεί να εκτελέσουμε μία ΑκΠ και να πάρουμε όλες τις κορυφές περιττού επιπέδου. Με αυτόν τον τρόπο, κάθε ακμή καλύπτεται από ακριβώς μόνο μία κορυφή.

Χρονική πολυπλοκότητα:

$$O(V + E)$$

Άσκηση 7

Έστω Σ ένα σύστημα ανισοτήτων της μορφής $x_i < x_j$, $1 \leq i, j \leq n$. Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο που θα αποφαίνεται αν το Σ είναι επιλύσιμο ή όχι.

Επίλυση συστήματος ανισοτήτων

- Ιδέα: Θα πρέπει να κατασκευάσω ένα γράφημα που αναπαριστά το προς επίλυση πρόβλημα.

- Κάθε x_i αντιστοιχείται σε κορυφή u_i, ενώ για κάθε ανισότητα $x_i < x_j$ εισάγουμε την ακμή (u_i, u_j).

- Λύση: Το σύστημα ανισοτήτων είναι επιλύσιμο αν και μόνο αν το προκύπτον γράφημα είναι Κατευθυνόμενο Άκυκλο Γράφημα. Δηλαδή μία ΑσΒ δεν ανακαλύπτει οπισθοακμές.

Επίλυση συστήματος ανισοτήτων

❖Απόδειξη λύσης:

- Έστω ότι το προκύπτον γράφημα είναι ΚΑΓ. Τότε οι κορυφές μπορούν να διαταχθούν τοπολογικά. Αν στις αντίστοιχες μεταβλητές ανατεθεί ο αύξων αριθμός της τοπολογικής διάταξης, εξ ορισμού το σύστημα θα ικανοποιείται.

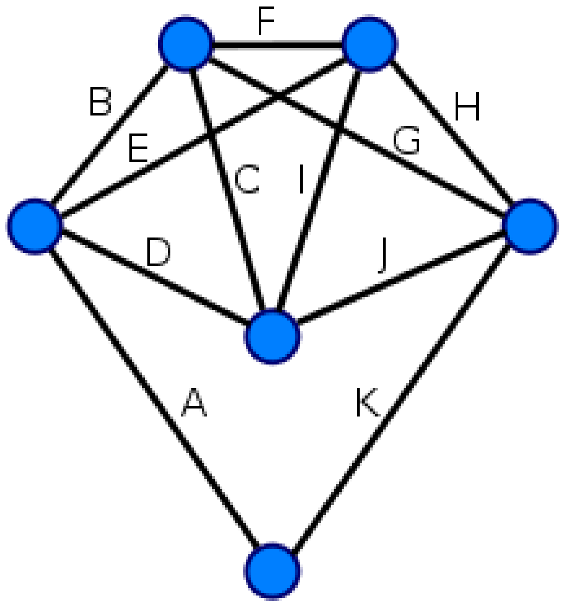
- Αντίστροφα, έστω ότι το σύστημα είναι επιλύσιμο. Δοθέντων των τιμών της λύσης, τις ταξινομούμε και αναθέτουμε την προκύπτουσα σειρά στις αντίστοιχες κορυφές. Προκύπτει εύκολα ότι έτσι βρήκαμε μία τοπολογική διάταξη στο ισοδύναμο γράφημα, και επομένως το γράφημα είναι ΚΑΓ.

Άσκηση 8

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$. Σχεδιάστε ένα αλγόριθμο που θα βρίσκει, εάν υπάρχει, κύκλο Euler σε χρόνο $O(E)$.

Κύκλος Euler

❖ Κύκλος Euler: ονομάζεται ένας κύκλος που περνάει ακριβώς μία φορά από κάθε ακμή του γραφήματος.



Κύκλος Euler

- Κύκλος Euler: ονομάζεται ένας κύκλος που περνάει ακριβώς μία φορά από κάθε ακμή του γραφήματος.

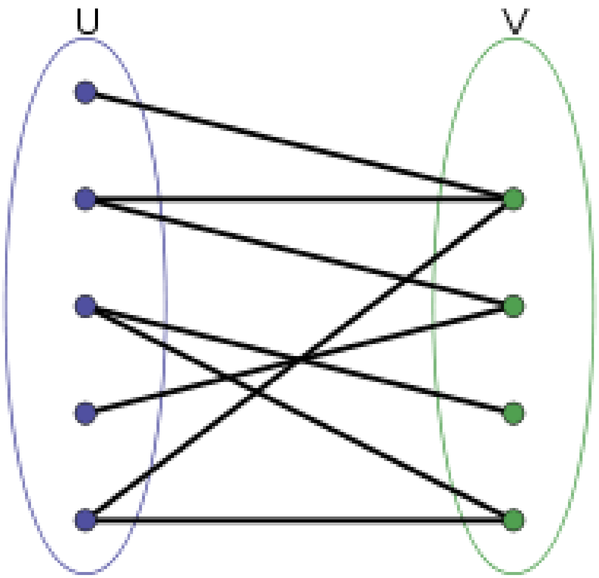
- Θεώρημα υπάρξεως κύκλου Euler: Υπάρχει τέτοιος κύκλος αν και μόνο αν όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.
- Κατά συνέπεια, αφού ελέγξουμε σε γραμμικό χρόνο ότι ισχύει το θεώρημα, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε διαδοχικές ΑσΒ. Κάθε ΑσΒ θα σταματά μόλις βρει ένα κύκλο. Αφού αφαιρέσουμε τις ακμές του κύκλου, θα συνεχίσουμε με νεά ΑσΒ, έτσι ώστε εν τέλει, το γράφημα μας να διασπαστεί σε συλλογή διαζευγμένων κύκλων, ο συνδυασμός των οποίων λόγω συνεκτικότητας, μας δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 9

Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Το G ονομάζεται διμερές αν $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ και για κάθε $\{u, v\} \in E, u \in A, v \in B$. Περιγράψτε ένα αλγόριθμο που θα αποφαίνεται αν ένα γράφημα είναι διμερές.

Διμερές Γράφημα

- **Διμερές Γράφημα**: Έστω γράφημα $G = (V, E)$. Το G ονομάζεται διμερές αν $V = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ και για κάθε $\{u, v\} \in E, u \in A, v \in B$.



Ένα διμερές γράφημα είναι ένα γράφημα το οποίο δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους.

Διμερές Γράφημα

- Πως διαπιστώνουμε ότι ένα γράφημα είναι διμερές;

Χρωματισμός γραφήματος σε μπλε και πράσινους κόμβους

1. Αρχικά υποθέτουμε ότι το γράφημα είναι συνεκτικό, ειδάλλως βρίσκουμε τα συνεκτικά υπογραφήματα και τα εξετάζουμε ξεχωριστά.
2. Ξεκινούμε από ένα τυχαίο κόμβο s του γραφήματος και τον χρωματίζουμε με μπλε. Κατά συνέπεια όλοι οι γείτονες του s πρέπει να χρωματιστούν με πράσινο. Ακολούθως όλοι οι γείτονες των κόμβων αυτών πρέπει να χρωματιστούν με μπλε και η διαδικασία συνεχίζει ούτω καθεξής μέχρι να χρωματιστούν όλοι οι κόμβοι του γραφήματος.
3. Μετά τον χρωματισμό του γραφήματος θα πρέπει να ελέγξουμε αν κάθε ακμή του γραφήματος έχει άκρα με διαφορετικό χρώμα. Αν βρεθεί ακμή με άκρα ιδίου χρώματος τότε το γράφημα δεν είναι διμερές.

Διμερές Γράφημα

- Η διαδικασία χρωματισμού με ποια διαδικασία μοιάζει;

ΑκΠ

Ουσιαστικά στη διαδικασία χρωματισμού ξεκινούμε από τη ρίζα του δέντρου της ΑκΠ την οποία χρωματίζουμε με μπλε και έπειτα συνεχίζουμε χρωματίζοντας εναλλάξ με πράσινο τους κόμβους των άρτιων επιπέδων και με μπλε τους κόμβους των περιττών επιπέδων.

Στο τέλος της διαδικασίας απαιτείται ο έλεγχος όλων των ακμών.

❖ Χρονική πολυπλοκότητα αλγορίθμου:

$$O(V + E)$$