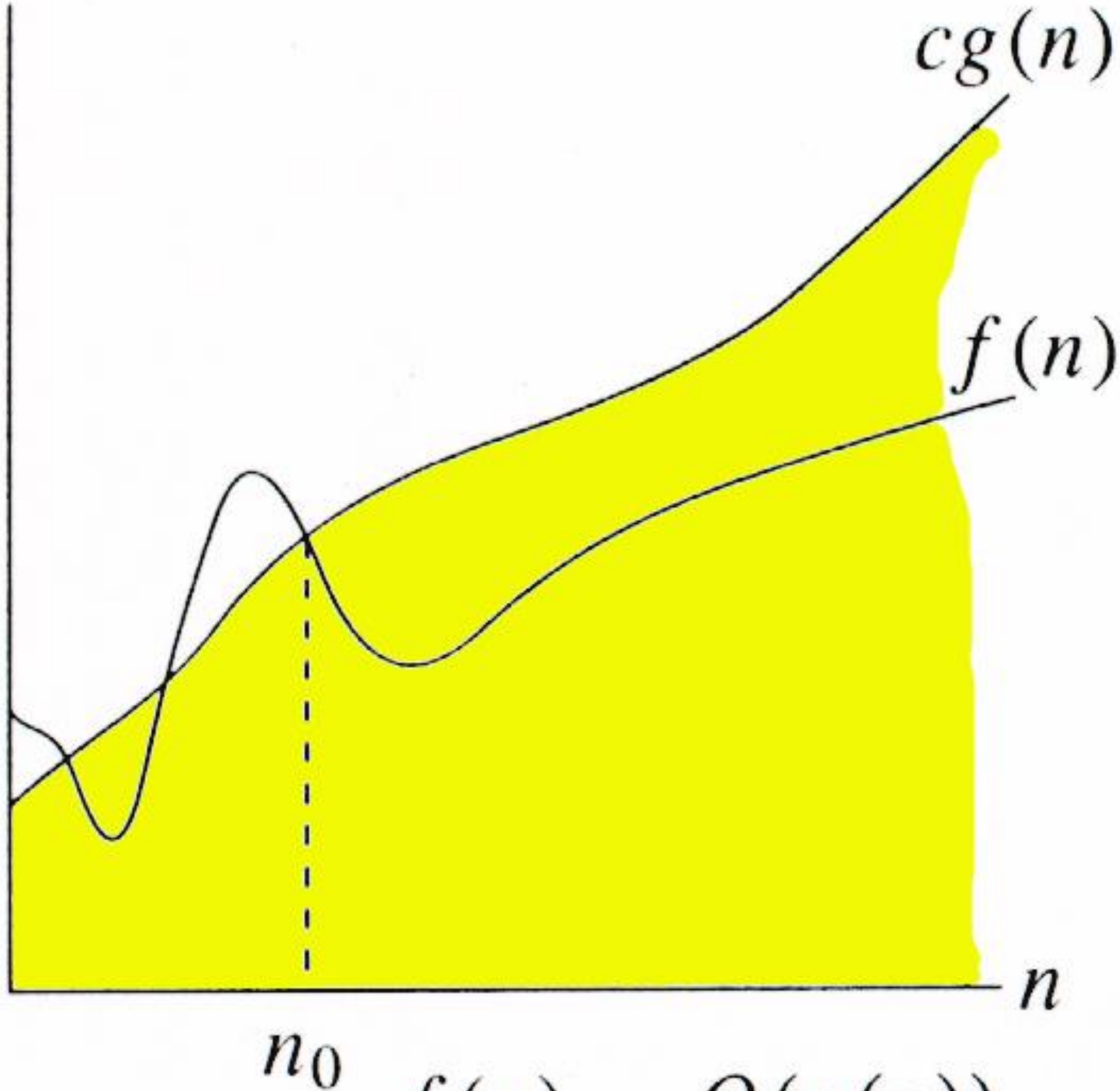
Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές του ακόλουθου μαθήματος:

Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Συμβολισμός O (πάνω όρια):
Γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν σταθερές $c > 0, n_0 > 0$ τέτοιες ώστε $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ $n \geq n_0$



$f(n) = O(g(n))$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Συμβολισμός O (πάνω όρια):
Γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν σταθερές $c > 0, n_0 > 0$ τέτοιες ώστε $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ $n \geq n_0$

Παράδειγμα: $2n^2 = O(n^3)$ $(c = 1, n_0 = 2)$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Συμβολισμός O (πάνω όρια):
Γράφουμε $f(n) = O(g(n))$ αν υπάρχουν σταθερές $c > 0, n_0 > 0$ τέτοιες ώστε $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ $n \geq n_0$

Παράδειγμα: $2n^2 = O(n^3)$ $(c = 1, n_0 = 2)$

συναρτήσεις,
όχι τιμές

Συμβολισμός O – Ορισμός ως Σύνολο

$O(g(n))=\{f(n)$: υπάρχουν σταθερές $c>0$, $n_0>0$ τέτοιες ώστε $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ για όλα τα $n > n_0\}$

EXAMPLE: $2n^2 \in O(n^3)$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Σύμβαση: Ένα σύνολο σε μια εξίσωση αντιπροσωπεύει μία «ανώνυμη» συνάρτηση από το σύνολο

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Σύμβαση: Ένα σύνολο σε μια εξίσωση αντιπροσωπεύει μία «ανώνυμη» συνάρτηση από το σύνολο

Παράδειγμα: $f(n) = n^3 + O(n^2)$

σημαίνει

$f(n) = n^3 + h(n)$

για κάποιο $h(n) \in O(n^2)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Σύμβαση: Ένα σύνολο σε μια εξίσωση αντιπροσωπεύει μία «ανώνυμη» συνάρτηση από το σύνολο

Παράδειγμα: $n^2 + O(n) = O(n^2)$

σημαίνει

για οποιαδήποτε $f(n) \in O(n)$:

$n^2 + f(n) = h(n)$

για κάποια $h(n) \in O(n^2)$.

Συμβολισμός Ω **(κάτω όρια)**

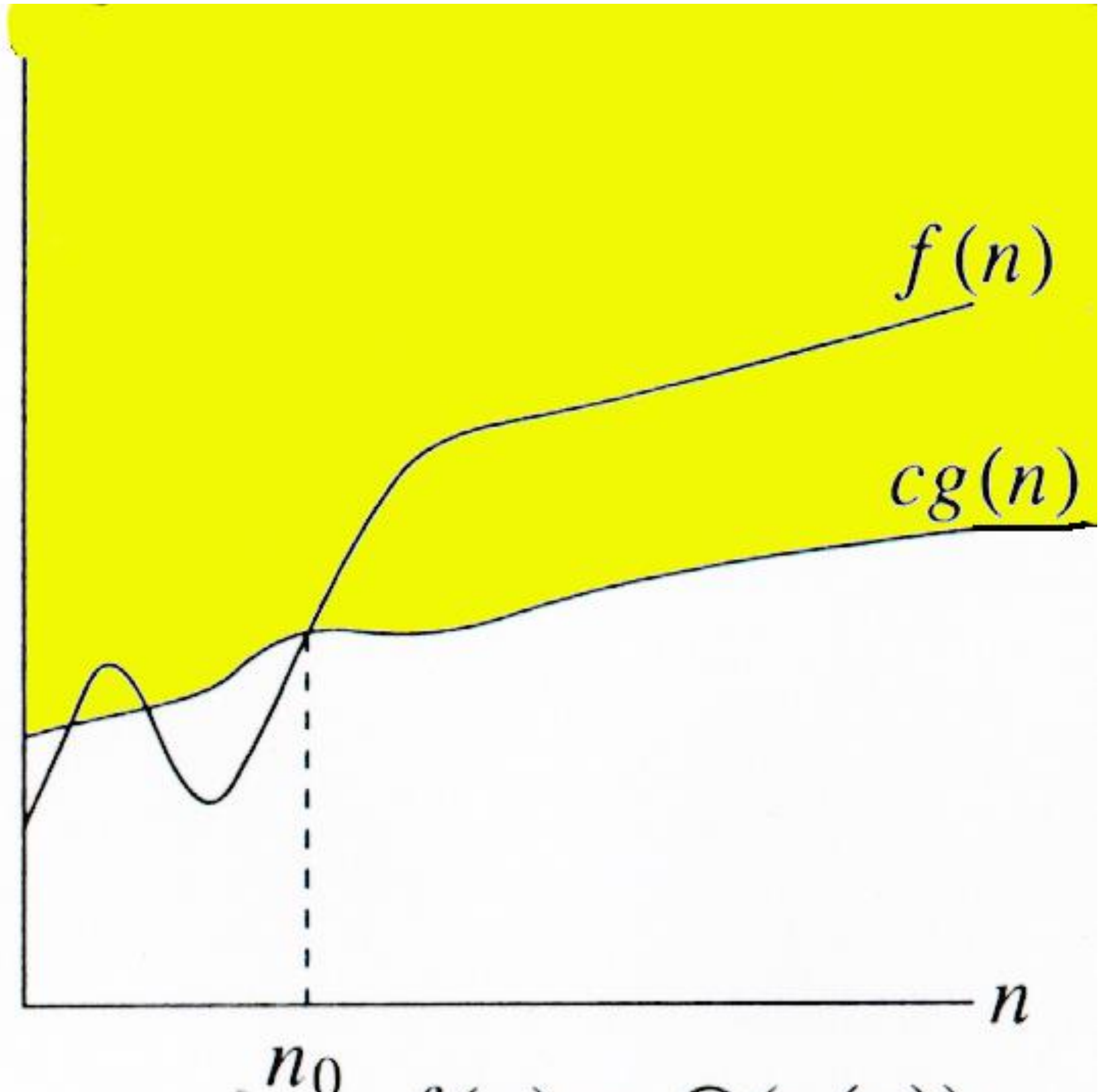
- Ο συμβολισμός *O* χρησιμοποιείται για να δηλώσει πάνω όρια.
- Δεν έχει νόημα να πούμε ότι η $f(n)$ είναι τουλάχιστον $O(n^2)$.

Συμβολισμός Ω (**κάτω όρια**)

- Ο συμβολισμός O χρησιμοποιείται για να δηλώσει πάνω όρια.
- Δεν έχει νόημα να πούμε ότι η $f(n)$ είναι τουλάχιστον $O(n^2)$.

$\Omega(g(n))=\{f(n)$: υπάρχουν σταθερές $c>0$, $n_0>0$ τέτοιες ώστε $0\leq cg(n)\leq f(n)$ για όλα τα $n > n_0\}$

Παράδειγμα: $\sqrt{n} = \Omega(\lg n)$ $\quad (c = 1,\ n_0 = 16)$

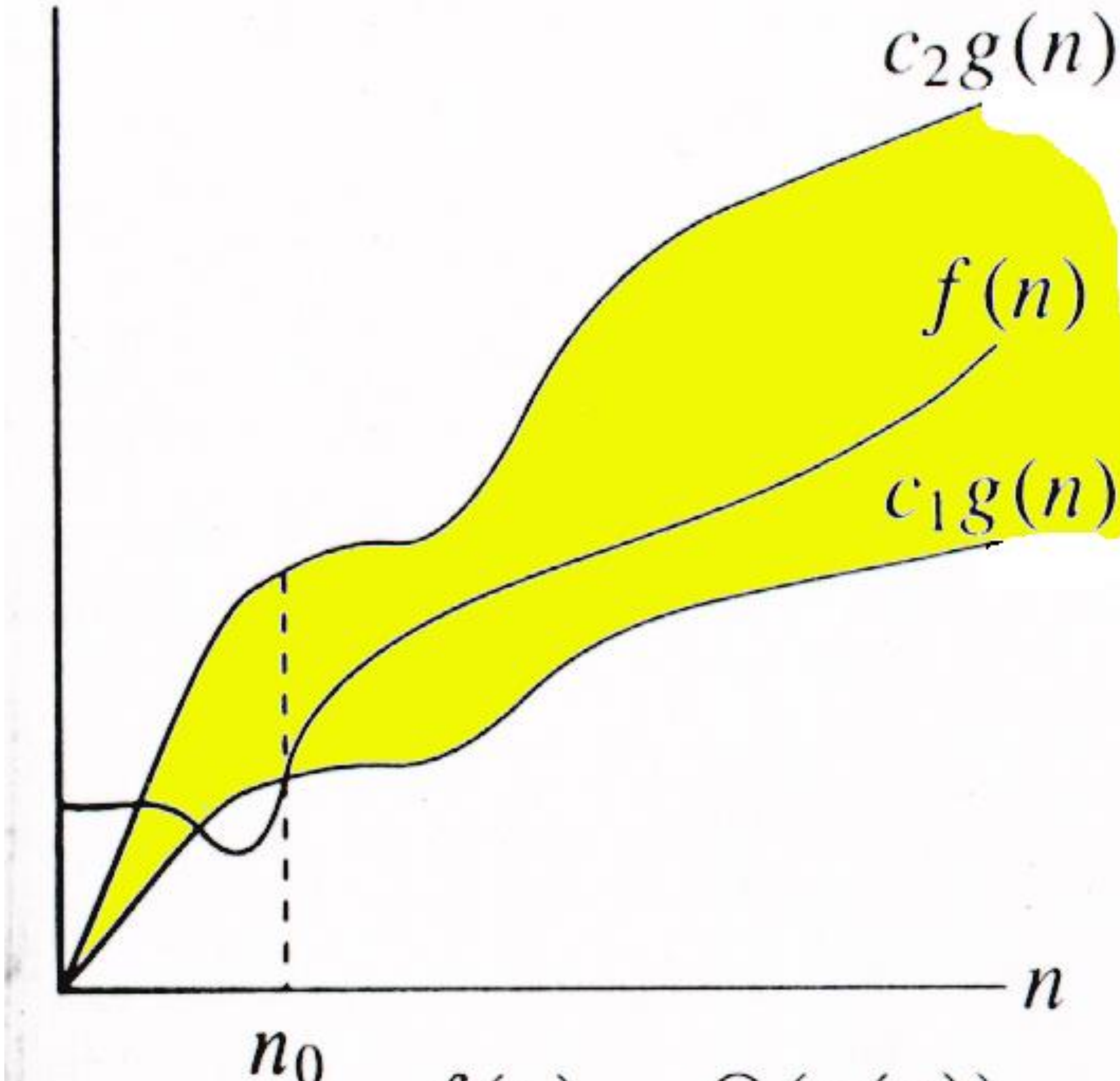


$f(n) = \Omega(g(n))$

Συμβολισμός Θ (**«σφιχτά όρια»**)

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$$

Παράδειγμα: $\frac{1}{2}n^2 - 2n = \Theta(n^2)$



$f(n) = \Theta(g(n))$

Συμβολισμός ο και ω

Συμβολισμός O και Ω είναι όπως $\leq$ και $\geq$.
Συμβολισμός o και ω είναι όπως το $<$ και $>$.

$o(g(n))=\{f(n)$: για οποιαδήποτε σταθερά $c>0$, υπάρχει μία σταθερά $n_0>0$ τέτοια ώστε $0\leq f(n) < cg(n)$ για όλα τα $n \geq n_0$.

Παράδειγμα: $2n^2 = o(n^3)$ $(n_0 = 2/c)$

Συμβολισμός ο και ω

Συμβολισμός O και Ω είναι όπως $\leq$ και $\geq$.
Συμβολισμός o και ω είναι όπως το $<$ και $>$.

$\omega(g(n))=\{f(n)$: για οποιαδήποτε σταθερά $c>0$, υπάρχει μία σταθερά $n_0>0$ τέτοια ώστε $0\leq cg(n) < f(n)$ για όλα τα $n\geq n_0$.

Παράδειγμα: $\sqrt{n} = \omega(\lg n) \quad (n_0 = 1+1/c)$

Επίλυση αναδρομικών εξισώσεων

- Η ανάλυση της συγχωνευτικής ταξινόμησης απαίτησε την επίλυση αναδρομικής εξίσωσης
- Όπως και στην εύρεση των ολοκληρωμάτων ή στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων, χρειάζονται κάποια «κόλπα».
- Εφαρμογή των αναδρομικών εξισώσεων στους αλγορίθμους διαίρει και βασίλευε.

Η μέθοδος της αντικατάστασης

Η πιο γενική μέθοδος:

1. ***Μάντεψε*** τον τύπο της λύσης
2. ***Εξακρίβωσε*** με επαγωγή.
3. ***Επίλυσε*** για σταθερές.

Η μέθοδος της αντικατάστασης

Η πιο γενική μέθοδος:

1. ***Μάντεψε*** τον τύπο της λύσης
2. ***Εξακρίβωσε*** με επαγωγή.
3. ***Επίλυσε*** για σταθερές.

Παράδειγμα: $T(n) = 4T(n/2) + n$

- [Υποθέτουμε ότι $T(1) = \Theta(1)$.]
- Μάντεψε $O(n^3)$.(Απόδειξε O και Ω ξεχωριστά.)
- Υπόθεσε ότι $T(k) \le ck^3$ για $k < n$.
- Απόδειξε ότι $T(n) \le cn^3$ με επαγωγή.

Παράδειγμα αντικατάστασης

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \\
&\le 4c(n/2)^3 + n \\
&= (c/2)n^3 + n \\
&= cn^3 - ((c/2)n^3 - n) \longleftarrow \textit{επιθυμητό} - \textit{υπόλοιπο} \\
&\le cn^3 \longleftarrow \textit{επιθυμητό}
\end{aligned}
$$

Οποτεδήποτε $(c/2)n^3 - n \ge 0$, για παράδειγμα, αν $c \ge 2$ και $n \ge 1$.

υπόλοιπο

Παράδειγμα (συν.)

- Θα πρέπει να χειριστούμε τις αρχικές συνθήκες.
- ***Βάση:*** $T(n) = \Theta(1)$ για όλα τα $n < n_0$, όπου n_0 είναι μία κατάλληλη σταθερά.
- Για $1 \le n < n_0$, έχουμε "$\Theta(1)$" $\le cn^3$, αν διαλέξουμε c αρκετά μεγάλο.

Αυτό το όριο δεν είναι «σφιχτό».

Ένα πιο σφιχτό πάνω όριο

Θα αποδείξουμε ότι $T(n) = O(n^2)$.

Υποθέτουμε ότι $T(k) \le ck^2$ για $k < n$:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \\
&\le 4c(n/2)^2 + n \\
&= cn^2 + n \\
&= \cancel{O(n^2)} \quad \textbf{\textit{Wrong!}} \\
&= cn^2 - (-n) \quad [\text{ επιθυμητό} - \text{υπόλοιπο }] \\
&\le cn^2 \quad \text{Δεν ισχύει για καμία επιλογή } c > 0.
\end{aligned}
$$

Ένα πιο σφιχτό πάνω όριο

ΙΔΕΑ: Ενισχύουμε την υπόθεση επαγωγής.

- Αφαιρούμε ένα χαμηλότερης τάξης όρο.

Υπόθεση επαγωγής: $T(k) \leq c_1 k^2 - c_2 k$ για $k < n$.

Ένα πιο σφιχτό πάνω όριο

ΙΔΕΑ: Ενισχύουμε την υπόθεση επαγωγής.

- Αφαιρούμε ένα χαμηλότερης τάξης όρο.

Υπόθεση επαγωγής: $T(k) \le c_1 k^2 - c_2 k$ για $k < n$.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n \\
&= 4\left(c_1 (n/2)^2 - c_2 (n/2)\right) + n \\
&= c_1 n^2 - 2c_2 n + n \\
&= c_1 n^2 - c_2 n - (c_2 n - n) \\
&\le c_1 n^2 - c_2 n \quad \text{αν } c_2 \ge 1.
\end{aligned}
$$

Διάλεξε το c_1 αρκετά μεγάλο για να χειριστείς τις αρχικές συνθήκες.

Μέθοδος δένδρου Αναδρομής

- Ένα δένδρο αναδρομής μοντελοποιεί τα κόστη (χρόνος) μίας αναδρομικής εκτέλεσης του αλγορίθμου.
- Το δένδρο αναδρομής είναι καλό για να μαντεύει κανείς τον τελικό τύπο για τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Παράδειγμα δένδρου αναδρομής

Επίλυση της $T(n) = T(n/4) + T(n/2) + n^2$:

$$n^2 \quad \cdots\cdots \quad n^2$$

$$(n/4)^2 \qquad (n/2)^2 \quad \cdots\cdots \quad \frac{5}{16}n^2$$

$$(n/16)^2 \qquad (n/8)^2 \qquad (n/8)^2 \qquad (n/4)^2 \quad \cdots\cdots \quad \frac{25}{256}n^2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\Theta(1)$$

$$\text{Σύνολο} = n^2\left(1 + \frac{5}{16} + \left(\frac{5}{16}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \Theta(n^2)$$

Γεωμετρική σειρά

Η μέθοδος του κυρίαρχου όρου

Η μέθοδος του κυρίαρχου όρου εφαρμόζεται στις αναδρομικές σχέσεις της μορφής

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)\ ,$$

όπου $a \geq 1$, $b > 1$, και f είναι ασυμπτωτικά θετική.

Τρεις συχνές περιπτώσεις

Σύγκρινε $f(n)$ με $n^{\log_b a}$:

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$.
   - $f(n)$ αυξάνει αργότερα σε σχέση με το $n^{\log_b a}$ (κατά ένα όρο n^{ε}).

   Λύση: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ για κάποια σταθερά $k \geq 0$.
   - $f(n)$ και $n^{\log_b a}$ αυξάνονται με τον ίδιο ρυθμό.

   Λύση: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

Τρεις συχνές περιπτώσεις (συν.)

3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ για κάποια σταθερά $\varepsilon > 0$.
   - $f(n)$ αυξάνεται γρηγορότερα από την $n^{\log_b a}$ (κατά ένα όρο n^{ε}),

   και η $f(n)$ ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικότητας ότι $af(n/b) \leq cf(n)$ για κάποια σταθερά $c < 1$.

   Λύση: $T(n) = \Theta(f(n))$.

Παραδείγματα

$T(n) = 4T(n/2) + n$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n.$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ για $\varepsilon = 1$.

$\therefore\ T(n) = \Theta(n^2).$

$T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^2.$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: $f(n) = \Theta(n^2 \lg^0 n)$, δηλ., $k = 0$.

$\therefore\ T(n) = \Theta(n^2 \lg n).$

Παραδείγματα

$T(n) = 4T(n/2) + n^3$

$a = 4$, $b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2$; $f(n) = n^3$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: $f(n) = \Omega(n^{2+\varepsilon})$ for $\varepsilon = 1$

και $4(n/2)^3 \leq cn^3$ (συνθ. κανον.) for $c = 1/2$.

$\therefore\ T(n) = \Theta(n^3)$.

Παραδείγματα

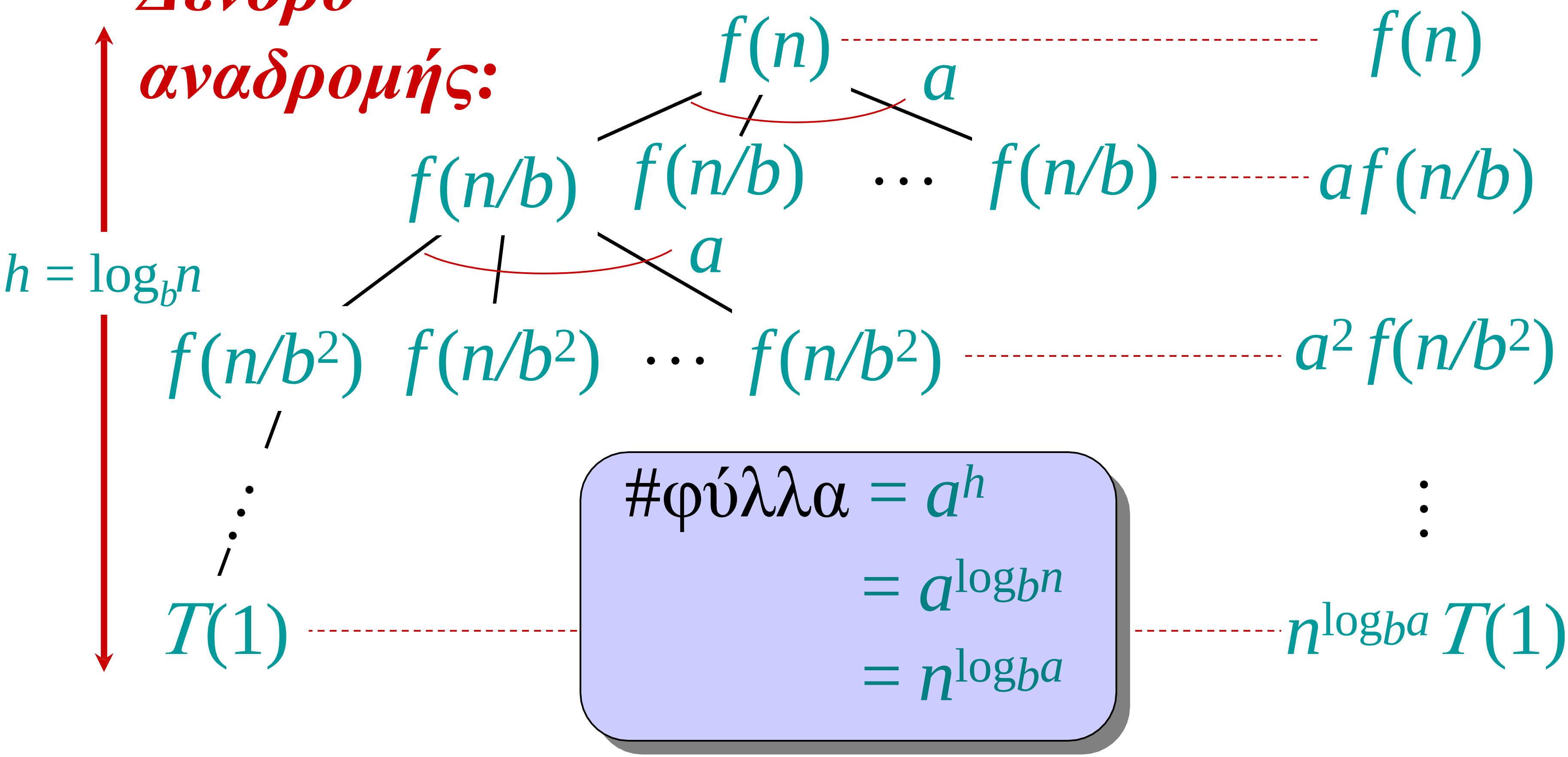
$T(n) = 4T(n/2) + n^2/\lg n$

$a = 4$, $b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2$; $f(n) = n^2/\lg n$.

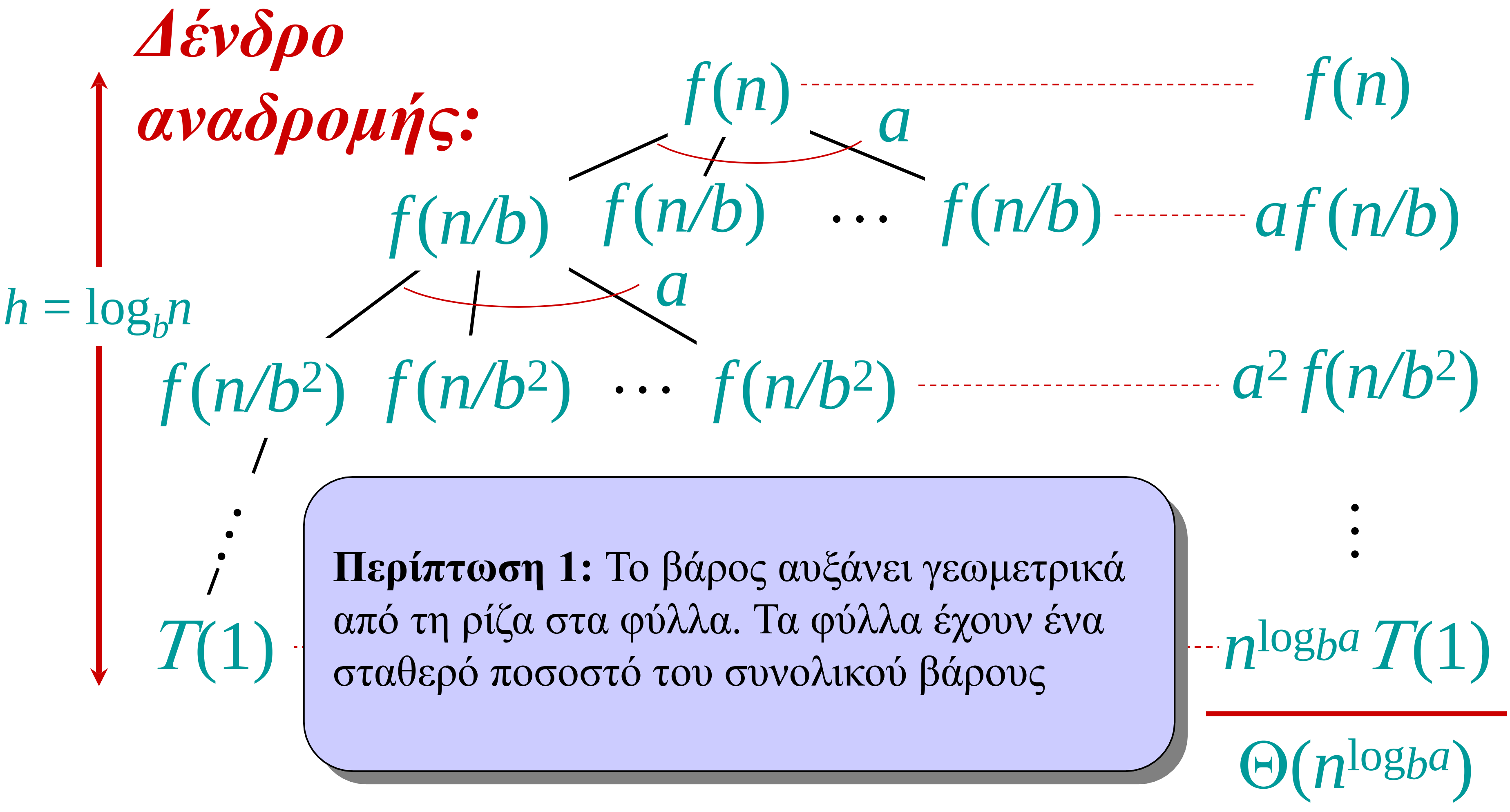
Η μέθοδος του κυρίαρχου όρου δεν μπορεί να εφαρμοσθεί. Συγκεκριμένα, για κάθε σταθερά $\varepsilon > 0$ έχουμε $n^{\varepsilon} = \omega(\lg n)$.

Η ιδέα του θεωρήματος κυρίαρχου όρου

Δένδρο αναδρομής:



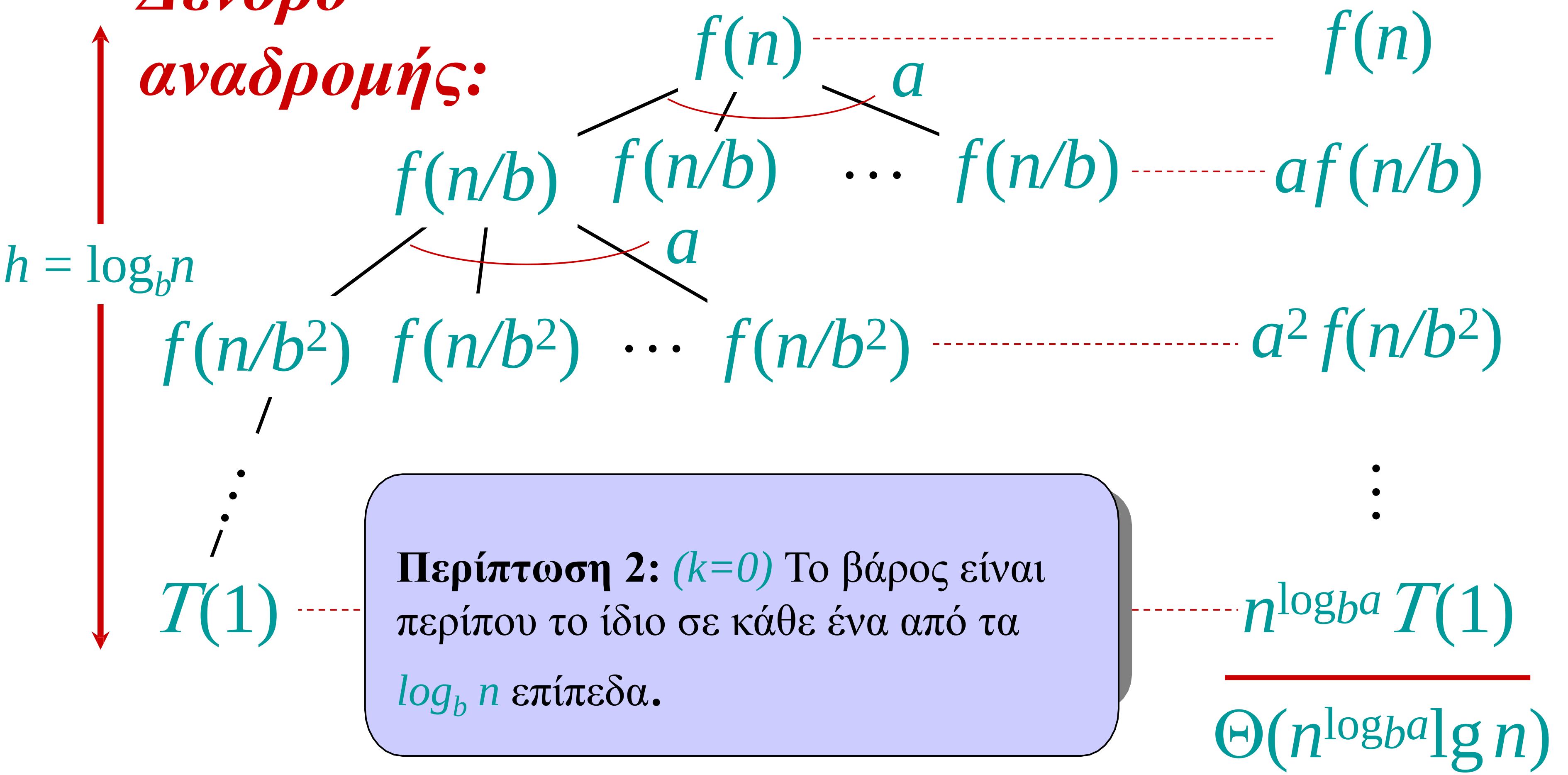
Η ιδέα του θεωρήματος κυρίαρχου όρου



Περίπτωση 1: Το βάρος αυξάνει γεωμετρικά από τη ρίζα στα φύλλα. Τα φύλλα έχουν ένα σταθερό ποσοστό του συνολικού βάρους

Η ιδέα του θεωρήματος κυρίαρχου όρου

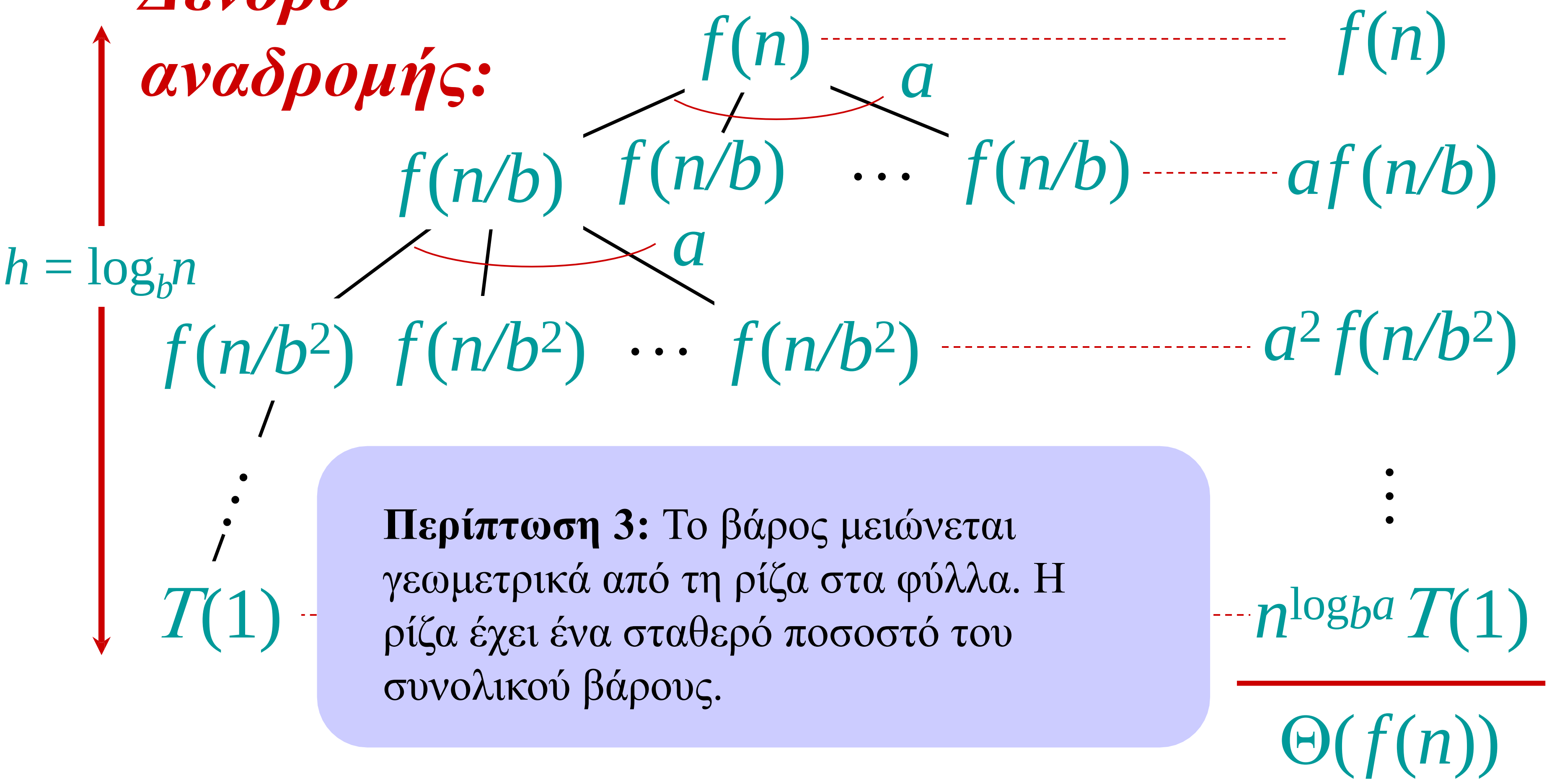
Δένδρο αναδρομής:



Περίπτωση 2: *(k=0)* Το βάρος είναι περίπου το ίδιο σε κάθε ένα από τα $\log_b n$ επίπεδα.

Η ιδέα του θεωρήματος κυρίαρχου όρου

Δένδρο αναδρομής:



Περίπτωση 3: Το βάρος μειώνεται γεωμετρικά από τη ρίζα στα φύλλα. Η ρίζα έχει ένα σταθερό ποσοστό του συνολικού βάρους.

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Για ακεραίους *a και b*, $a \le b$,

$$\sum_{i=a}^{b} 1 = b - a + 1$$

- Αριθμητική πρόοδος: Για $n \ge 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Για $n \ge 0$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Για $n \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Γεωμετρική πρόοδος: For real $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

For $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Αριθμητική-Γεωμετρική πρόοδος:
  - Για $n \geq 0$, πραγματικό $c \neq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} ic^i = c + 2c^2 + \cdots + nc^n = \frac{-(n+1)c^{n+1} + nc^{n+2} + c}{(c-1)^2}$$

- Αρμονική σειρά:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + O(1)$$

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Τηλεσκοπική σειρά

$$\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} = a_n - a_0$$

- Για $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

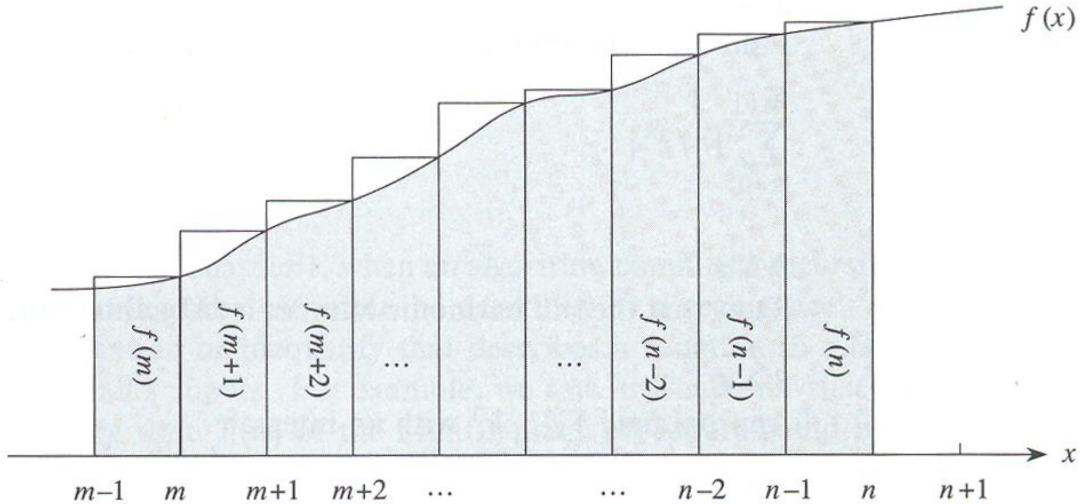
Επανάληψη στα αθροίσματα

- Προσέγγιση με ολοκληρώματα
- Για μονότονα αυξανόμενη συνάρτηση *f(x)*

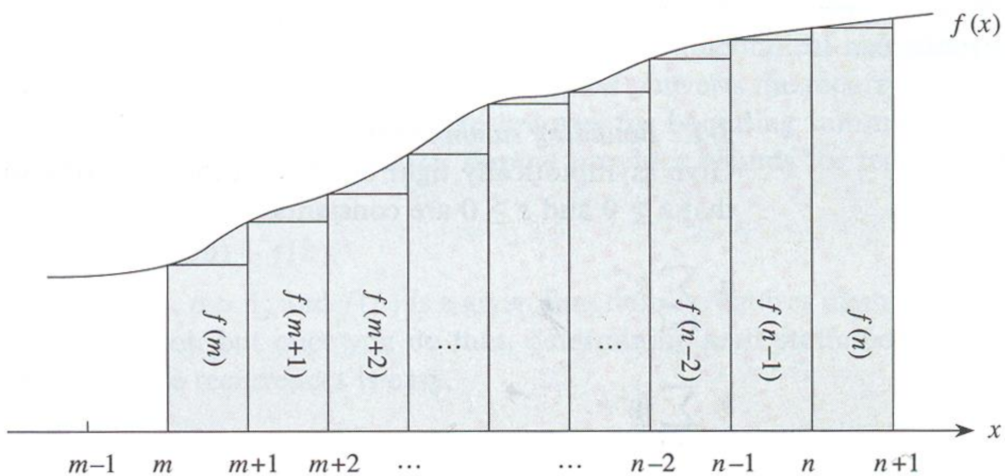
$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$

- Για μονότονα μειωνόμενη συνάρτηση *f(x)*

$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)dx$$



$$\int_{m-1}^{n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k)$$



$$\sum_{k=m}^{n} f(k) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx$$

Επανάληψη στα αθροίσματα

- Ν-οστός αρμονικός αριθμός

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} = \ln n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$$

Κατώφλι και ανώφλι

- Για κάθε πραγματικό αριθμό x

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1$$

- Για κάθε πραγματικό αριθμό x ≥ 0 και για οποιουσδήποτε ακεραίους a, b > 0:

$$\left\lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{ab} \right\rceil ,$$

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor ,$$

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil \le \frac{a + (b-1)}{b} ,$$

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \ge \frac{a - (b-1)}{b} .$$

Εκθετικά

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$e^x \geq 1 + x$ όπου η ισότητα ισχύει μόνο όταν x = 0

Όταν |x| ≤ 1, ισχύει η διπλή ανισότητα

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$$

Όταν $x \to 0$, το e^x προσεγγίζεται με αρκετή ακρίβεια από το 1 + x:

$$e^x = 1 + x + \Theta(x^2)$$

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Λογάριθμοι

- Για $|x| < 1$ ο λογάριθμος $\ln(1 + x)$ αναπτύσσεται στην παρακάτω σειρά:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Επίσης οι ακόλουθες ανισότητες για $x > -1$:

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$$

Παραγοντικά

- Η *προσέγγιση του Stirling:*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$