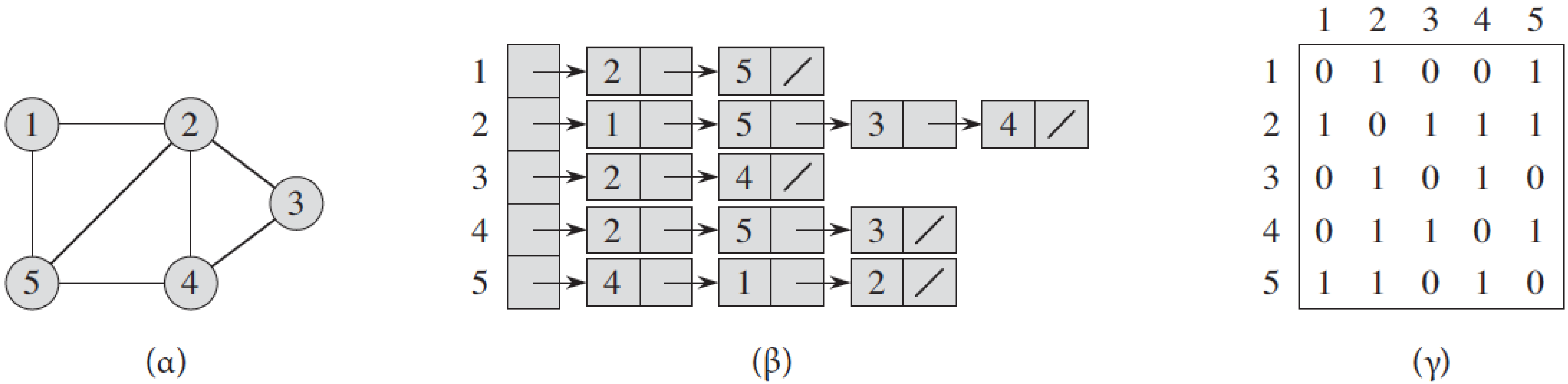
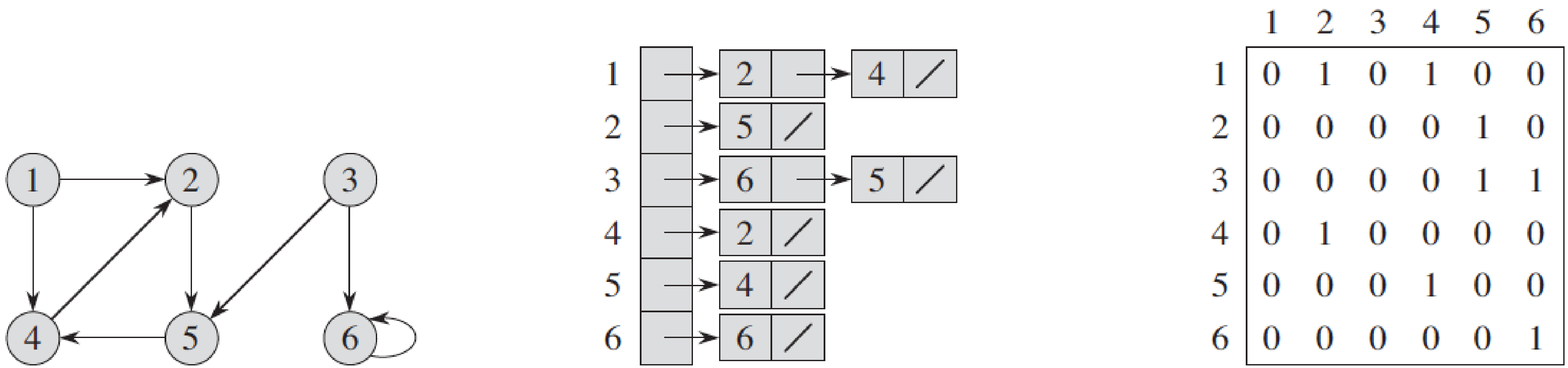
Διάτρεξη Γραφημάτων

Αναπαράσταση Γραφημάτων



Σχήμα 22.1 Δύο αναπαραστάσεις ενός ακατεύθυντου γραφήματος. **(α)** Ένα ακατεύθυντο γράφημα G με 5 κόμβους και 7 ακμές. **(β)** Μια αναπαράσταση του G μέσω λιστών γειτνίασης. **(γ)** Η αναπαράσταση του G μέσω πίνακα γειτνίασης.



(α) (β) (γ)

Σχήμα 22.2 Δύο αναπαραστάσεις ενός κατευθυντού γραφήματος. **(α)** Ένα κατευθυντό γράφημα G με 6 κόμβους και 8 ακμές. **(β)** Μια αναπαράσταση του G μέσω λιστών γειτνίασης. **(γ)** Η αναπαράσταση του G μέσω πίνακα γειτνίασης.

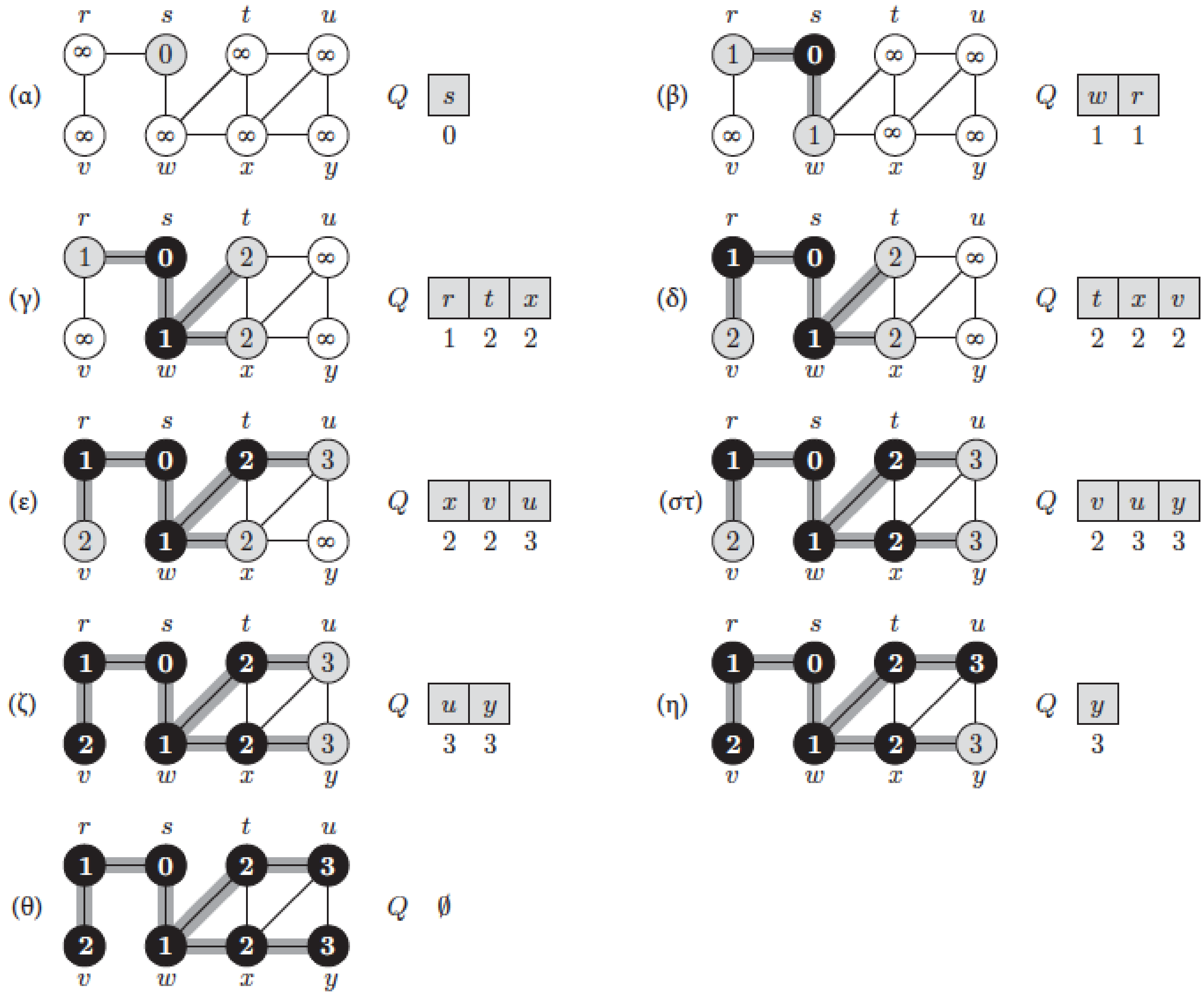
Διάτρεξη γραφήματος

- Γράφημα G(V,E) όπου $V=\{V_1,V_2,\dots,V_n\}$
- Διάτρεξη (traversal): επίσκεψη όλων των κορυφών του γραφήματος
- Δύο μέθοδοι διάτρεξης:
  - Αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος
  - Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος
- Δημιουργία ενός δάσους από δέντρα.
- Κάθε δέντρο αντιστοιχεί σε μία συνεκτική συνιστώσα:
  - Συνεκτική συνιστώσα:
    - υπογράφημα του G, όπου οποιοιδήποτε δύο κόμβοι του υπογραφήματος συνδέονται με ένα μονοπάτι αποτελούμενο αποκλειστικά από ακμές του υπογραφήματος
    - το υπογράφημα είναι μέγιστο ως προς την παραπάνω ιδιότητα, δηλ. δεν περιέχεται σε μεγαλύτερο υπογράφημα για το οποίο ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

Αναζήτηση Πρώτα κατά Πλάτος (ΑΠΠ)

- Βασική ιδέα:
  - Επίσκεψη πρώτα της κορυφής V_1
- Επίσκεψη όλων των γειτονικών κορυφών της V_1
- Για κάθε μία νέα κορυφή, επίσκεψη των γειτόνων της κορυφής που δεν τις έχουμε επισκεφθεί ήδη
- Επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας μέχρι να επισκεφτούμε όλες τις κορυφές του γραφήματος (εφόσον το γράφημα είναι συνεκτικό)
- Υλοποίηση με τη χρήση μίας δομής ουράς.

```
BFS(G, s)
for each vertex u ∈ G.V − {s}
    u.color = WHITE
    u.d = ∞
    u.π = NIL
s.color = GRAY
s.d = 0
s.π = NIL
Q = ∅
ENQUEUE(Q, s)
while Q ≠ ∅
    u = DEQUEUE(Q)
    for each v ∈ G.Adj[u]
        if v.color == WHITE
            v.color = GRAY
            v.d = u.d + 1
            v.π = u
            ENQUEUE(Q, v)
    u.color = BLACK
```



Σχήμα 22.3 Η λειτουργία της Διερευνησης Κατα Πλατος σε ακατεύθυντο γράφημα. Οι σκιασμένες ακμές αναπαριστούν τις ακμές του δένδρου, καθώς δημιουργούνται από τη Διερευνηση Κατα Πλατος. Εντός του κάθε κόμβου u αναγράφεται η τιμή του $u.d$. Δεξιά από το κάθε γράφημα απεικονίζεται η ουρά Q στην έναρξη κάθε επανάληψης του βρόχου **ενόσω** στις γραμμές 10–18. Κάτω από τους κόμβους της ουράς αναγράφονται οι αποστάσεις των κόμβων από τον αφετηριακό κόμβο.

Ιδιότητες της ΑΠΠ

- Η ΑΠΠ υπολογίζει τη συντομότερο μονοπάτι κάθε κόμβου από τον αφετηριακό κόμβο s:
  - Η απόσταση συντομότερου μονοπατιού δ(s,v) = το ελάχιστο πλήθος ακμών από το s στο v, ή ∞ αν v δεν είναι προσπελάσιμος από το s
- Η ΑΠΠ χτίζει ΠΠ δένδρα, στα οποία τα μονοπάτια από τη ρίζα στους κόμβους αντιπροσωπεύουν συντομότερα μονοπάτια στο G
- Χρόνος εκτέλεσης της ΑΠΠ: O(|V|+|E|)

Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ)

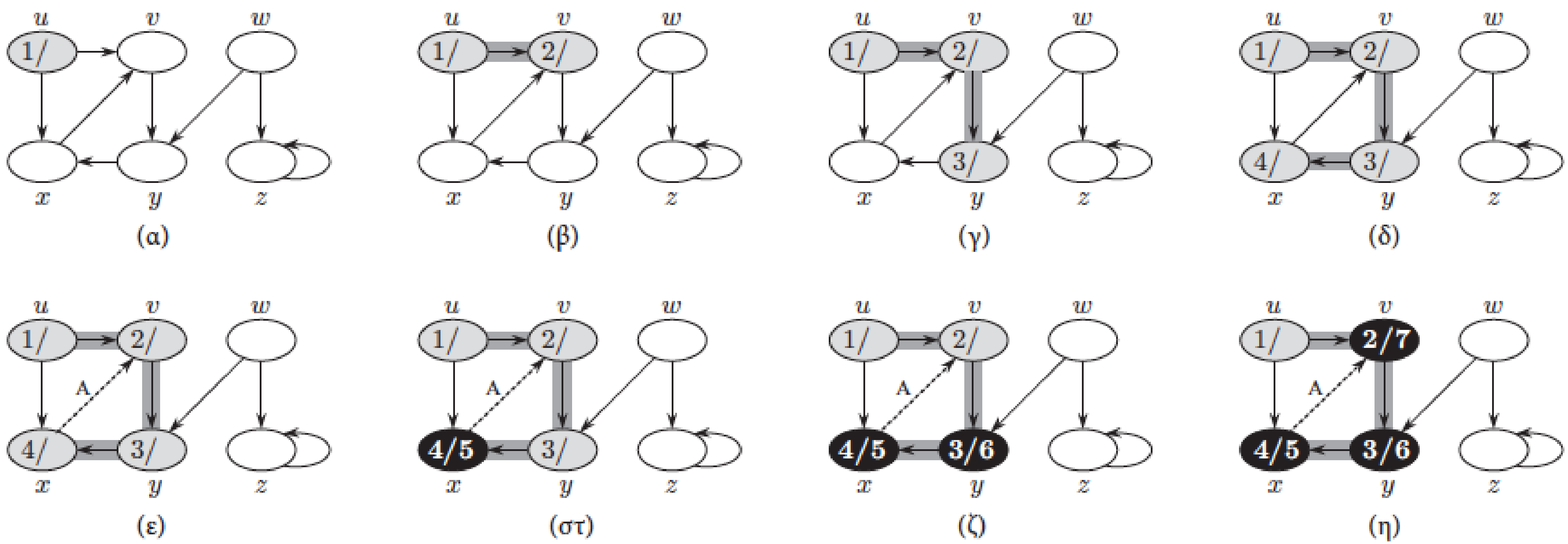
- Επίσκεψη πρώτα της κορυφής V_1
- Επίσκεψη ενός γείτονα της V_1 (έστω η κορυφή V_k)
- Επίσκεψη ενός γείτονα της V_k που δεν έχουμε ήδη επισκεφθεί
- Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι είτε:
  - να επισκεφτούμε όλους τις κορυφές ή
  - να φθάσουμε σε «αδιέξοδο»: δεν υπάρχουν γείτονες ή έχουμε ήδη επισκεφθεί όλους τους γείτονες της κορυφής
- Στη δεύτερη περίπτωση, οπισθοχωρούμε και πάμε στη κορυφή από την οποία φθάσαμε στη τρέχουσα κορυφή.
- Δοκιμάζουμε ένα νέο γείτονα της κορυφής αυτής και όλη η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται

Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ)

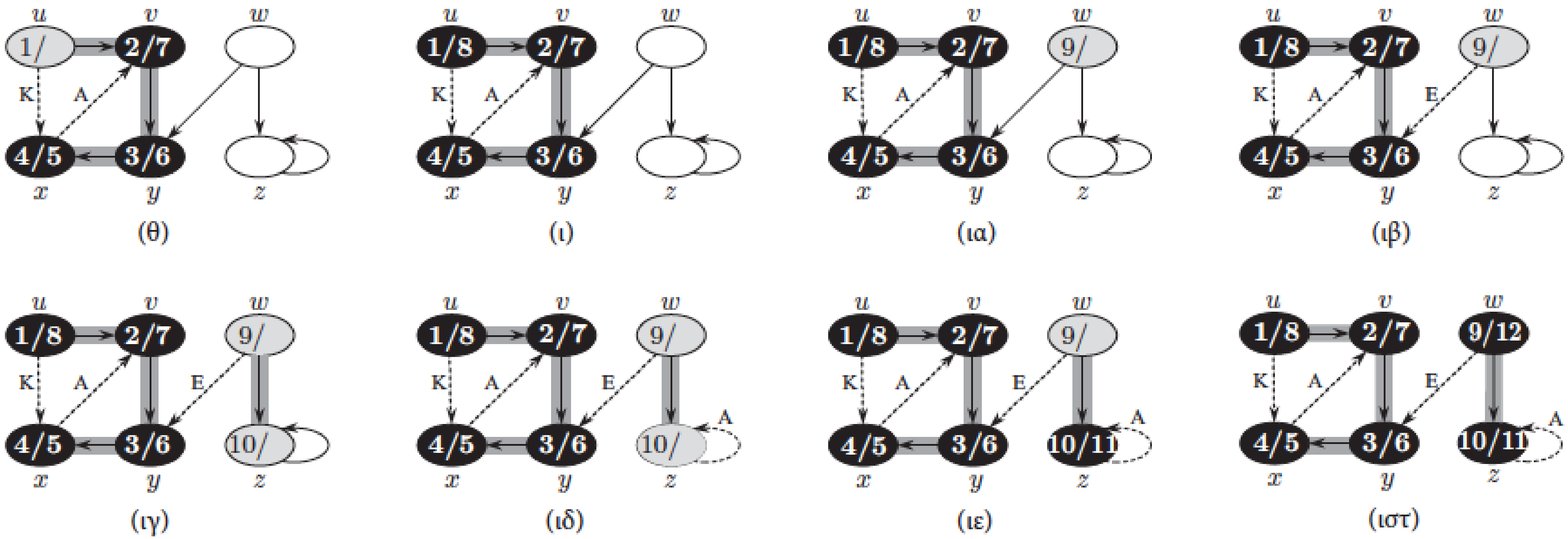
- Οι κόμβοι αρχικά χρωματίζονται άσπροι.
- Στη συνέχεια, χρωματίζονται γκρι όταν ανακαλύπτονται.
- Και τέλος μαύροι όταν ολοκληρώνεται η επίσκεψη τους κατά την οπισθοχώρηση.
- Δύο πεδία για τον κόμβο u:
  - u.*d :* χρόνος εντοπισμού του κόμβου u
  - u.*f :* χρόνο περάτωσης του κόμβου u.
- Οι χρονοσφραγίδες αυτές: ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 1 και του 2|V|
- Χρόνος εκτέλεσης ΑΠΒ: O(V+E)

```
DFS(G)
for each vertex u ∈ G.V
    u.color = WHITE
    u.π = NIL
time = 0
for each vertex u ∈ G.V
    if u.color == WHITE
        DFS-VISIT(G, u)
```

```
DFS-VISIT(G, u)
time = time + 1              // white vertex u has just been discovered
u.d = time
u.color = GRAY
for each v ∈ G.Adj[u]        // explore edge (u, v)
    if v.color == WHITE
        v.π = u
        DFS-VISIT(G, v)
u.color = BLACK              // blacken u; it is finished
time = time + 1
u.f = time
```

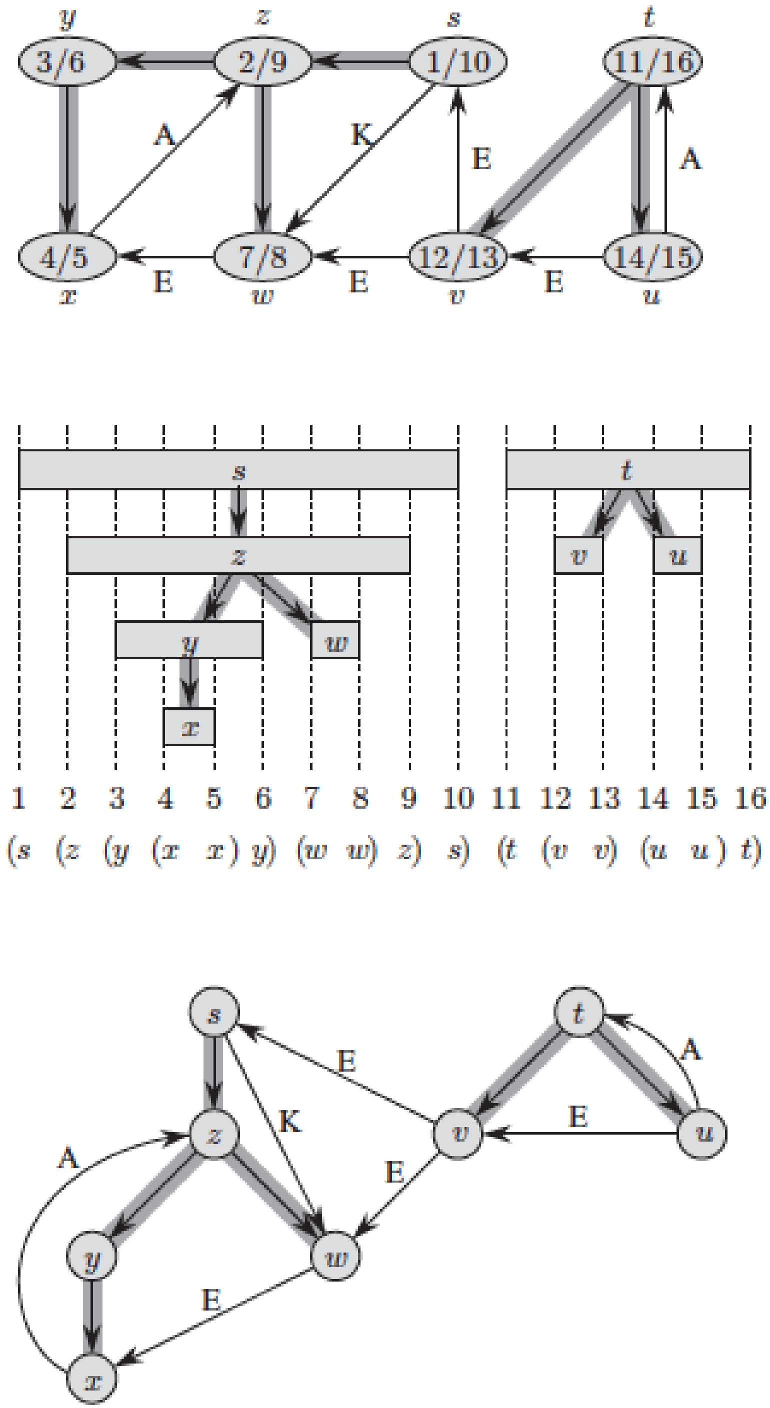


u
v
w
1/
x
y
z
(α)
1/
2/
(β)
1/
2/
3/
(γ)
1/
2/
4/
3/
(δ)
1/
2/
A
4/
3/
(ε)
1/
2/
A
4/5
3/
(στ)
1/
2/
A
4/5
3/6
(ζ)
1/
2/7
A
4/5
3/6
(η)


u v w
1/ 2/7
K A
4/5 3/6
x y z
(θ)
u v w
1/8 2/7
K A
4/5 3/6
x y z
(ι)
u v w
1/8 2/7 9/
K A
4/5 3/6
x y z
(ια)
u v w
1/8 2/7 9/
K A E
4/5 3/6
x y z
(ιβ)
u v w
1/8 2/7 9/
K A E
4/5 3/6 10/
x y z
(ιγ)
u v w
1/8 2/7 9/
K A E A
4/5 3/6 10/
x y z
(ιδ)
u v w
1/8 2/7 9/
K A E A
4/5 3/6 10/11
x y z
(ιε)
u v w
1/8 2/7 9/12
K A E A
4/5 3/6 10/11
x y z
(ιστ)

Αναζήτηση Πρώτα κατά Βάθος (ΑΠΒ)

- Κάθε ακμή του γραφήματος μετά την ΑΠΒ μπορεί να είναι:
- Δενδρική ακμή
- Ανιούσα ακμή: ακμή που συνδέει ένα κόμβο με ένα πρόγονο του στο δέντρο που δημιουργείται με την ΑΠΒ
- Κατιούσα ακμή: ακμή που συνδέει ένα κόμβο με ένα απόγονο του στο δέντρο που δημιουργείται με την ΑΠΒ και δεν είναι ήδη δενδρική ακμή
- Εγκάρσια ακμή: ακμή που συνδέει κόμβους που δεν έχουν σχέση προγόνου απογόνου. Οι δύο κόμβοι ενδέχεται να ανήκουν και σε διαφορετικά δέντρα



Θεώρημα 22.7 (Θεώρημα των παρενθέσεων)

Σε οποιαδήποτε διερεύνηση κατά βάθος ενός (κατευθυντού ή ακατεύθυντου) γραφήματος G = (V, E), για κάθε ζεύγος κόμβων u και v, ισχύει μία και μόνο μία από τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:

- τα διαστήματα [u.*d* , u.*f*] και [v.*d* , v.*f*] είναι ξένα μεταξύ τους, και κανένας από τους κόμβους u και v δεν είναι απόγονος του άλλου στο δάσος κατά βάθος,
- το διάστημα [u.*d* , u.*f*] εμπεριέχεται πλήρως στο διάστημα [v.*d* , v.*f*], και ο u είναι απόγονος του v σε ένα δένδρο κατά βάθος, ή
- το διάστημα [v.*d* , v.*f*] εμπεριέχεται πλήρως στο διάστημα [u.*d* , u.*f*], και ο v είναι απόγονος του u σε ένα δένδρο κατά βάθος.

Θεώρημα 22.10

Σε μια κατά βάθος διερεύνηση ακατεύθυντου γραφήματος G, κάθε ακμή του G είναι είτε δενδρική είτε ανιούσα.

Απόδειξη: Με εις άτοπο απαγωγή, αποδεικνύουμε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν Κατιούσες και Εγκάρσιες ακμές

Τοπολογική Διάταξη

- Κατευθυντό άκυκλο γράφημα «ΚΑΓ»: ένα κατευθυντό γράφημα που δεν περιέχει κύκλους.
- Τα κατευθυντά άκυκλα γραφήματα χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές για να υποδειχθεί κάποια σειρά προτεραιότητας για ορισμένα γεγονότα.
- ***Λήμμα:*** Ένα κατευθυντό γράφημα G είναι άκυκλο εάν και μόνο εάν από μια κατά βάθος διερεύνηση του G δεν προκύπτει καμία ανιούσα ακμή.

- ***Απόδειξη λήμματος:***
- Το $\leftarrow$ είναι προφανές.
- Αντίστροφα, αν υπάρχει ένας κύκλος ας είναι V_i η κορυφή εκείνη στην οποία η επίσκεψη από ΑΠΒ έγινε πριν από τις άλλες κορυφές του κύκλου.
- Υπάρχει μία κορυφή V_k και ακμή του κύκλου (V_k, V_i) από τον V_k σε V_i.
- Το (V_k, V_i) δεν μπορεί να είναι δενδρική ακμή αφού η επίσκεψη στην V_i έχει γίνει πριν την V_k.
- Είναι τότε ανιούσα ακμή.

Τοπολογική Διάταξη

ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ(G)

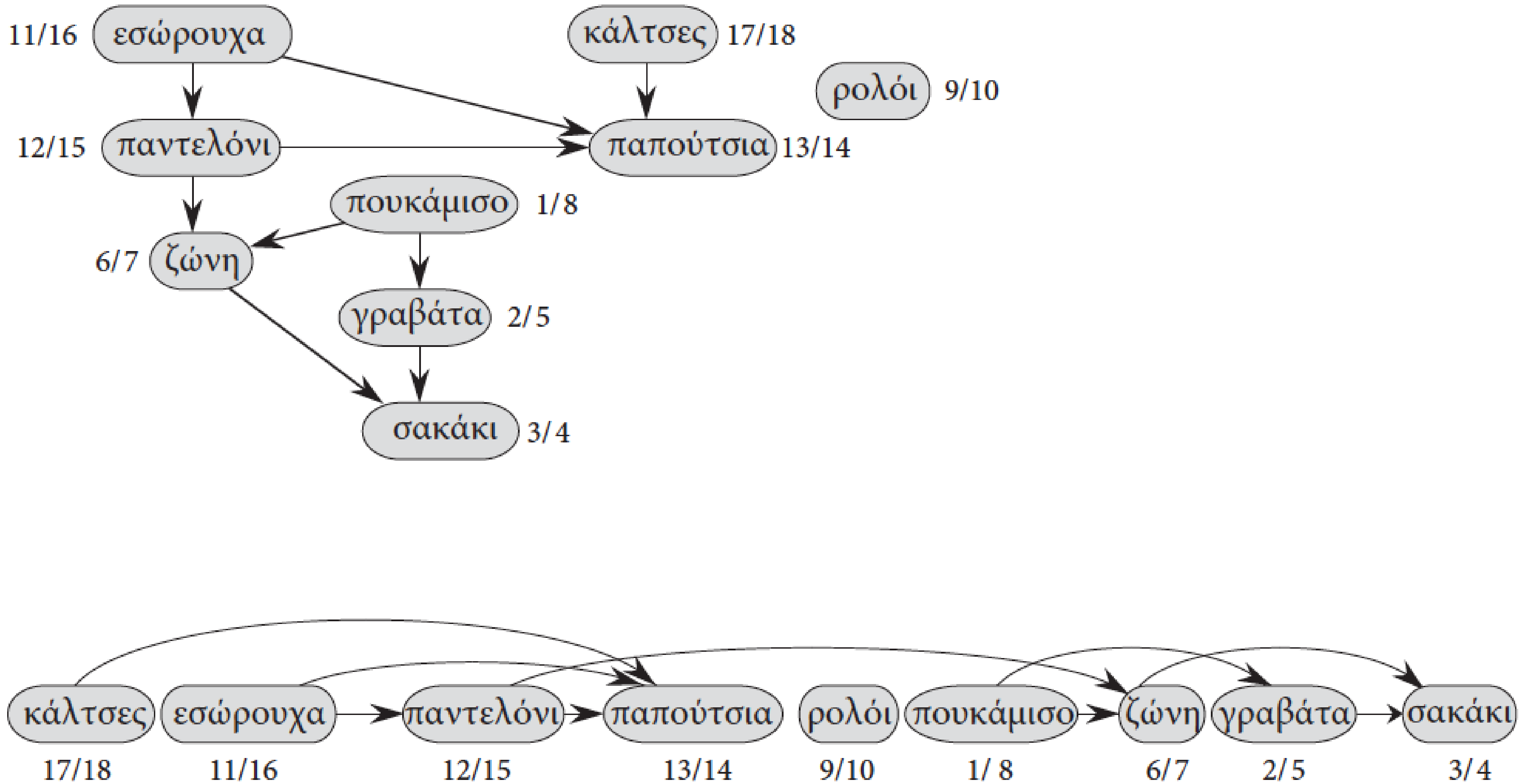
Καλούμε την ΑΠΒ(G) για τον υπολογισμό του χρόνου περάτωσης v.f του κάθε κόμβου v

Μετά την περάτωση κάθε κόμβου, τον τοποθετούμε επικεφαλής μιας συνδεδεμένης λίστας

επιστροφή η συνδεδεμένη λίστα των κόμβων

(α)

(β)



Σχήμα 22.7 **(α)** Ο Καθηγητής Bumstead ταξινομεί τοπολογικά τα ρούχα του όταν ντύνεται. Κάθε κατευθυντή ακμή (u, v) δηλώνει ότι το ρούχο u θα πρέπει να φορεθεί πριν από το ρούχο v. Δίπλα σε κάθε κόμβο αναγράφονται οι χρόνοι εντοπισμού και περάτωσής του οι οποίοι προκύπτουν από μια διερεύνηση κατά βάθος. **(β)** Το ίδιο γράφημα τοπολογικά ταξινομημένο, με τους κόμβους του διατεταγμένους από αριστερά προς τα δεξιά σε φθίνουσα σειρά ως προς τον χρόνο περάτωσης. Όλες οι κατευθυντές ακμές έχουν φορά από τα αριστερά προς τα δεξιά.

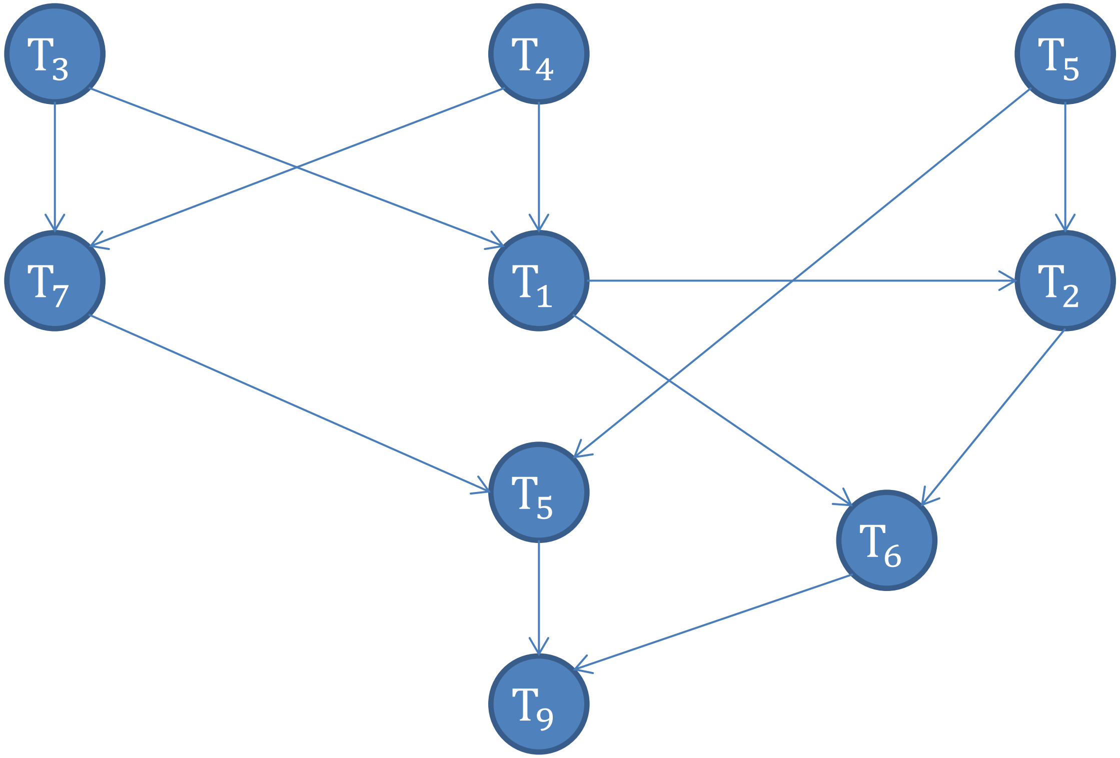
Τοπολογική Διάταξη

Θεώρημα: Η διαδικασία ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ παράγει μια τοπολογική ταξινόμηση του κατευθυντού άκυκλου γραφήματος που δέχεται ως είσοδο.

Απόδειξη:

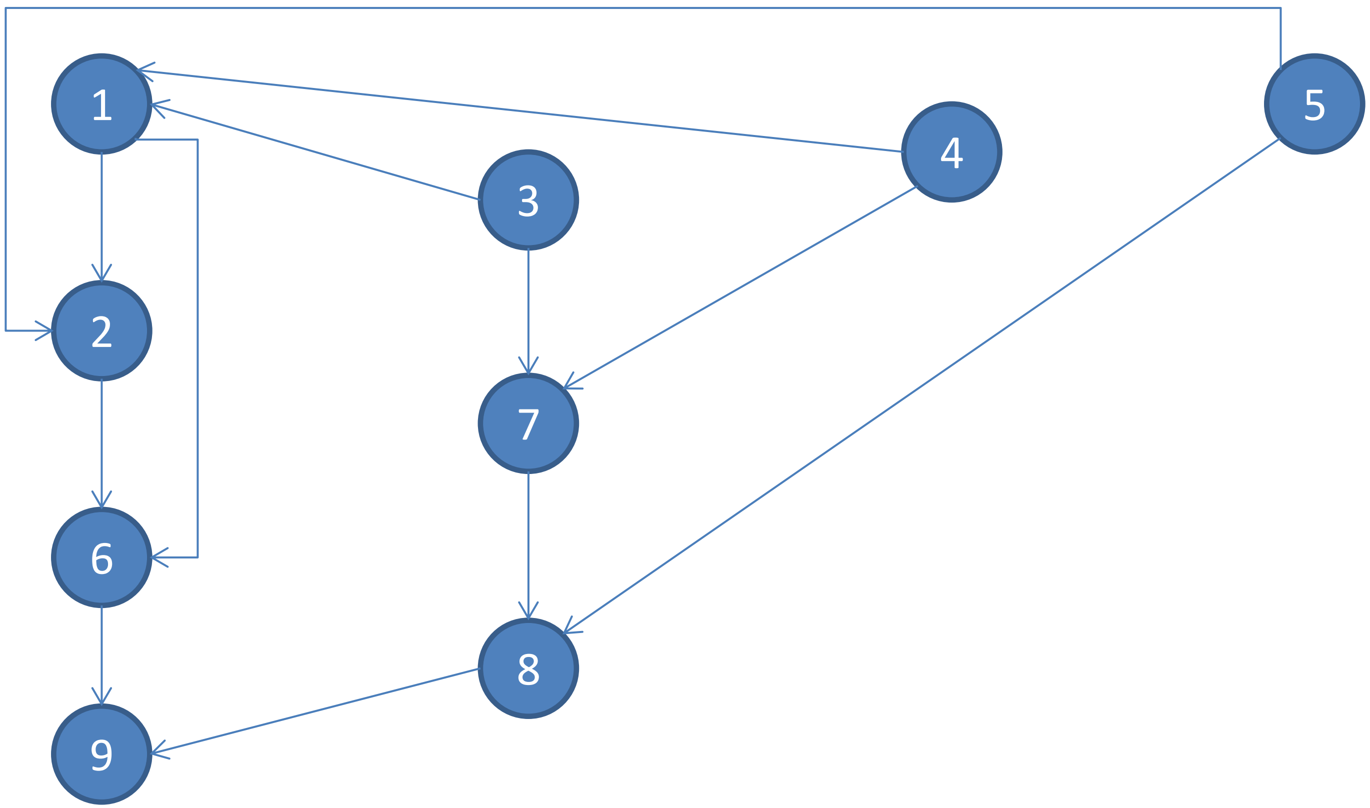
- Δεν υπάρχουν ανιούσες ακμές
- Εγκατάλειψη απογόνων προηγείται εγκατάλειψης προγόνων
- Για εγκάρσιες ακμές (u,v) ισχύει u.f > v.f
- Άρα: για οποιοδήποτε ακμή (u,v) ισχύει u.f > v.f

Τοπολογική διάταξη-Παράδειγμα



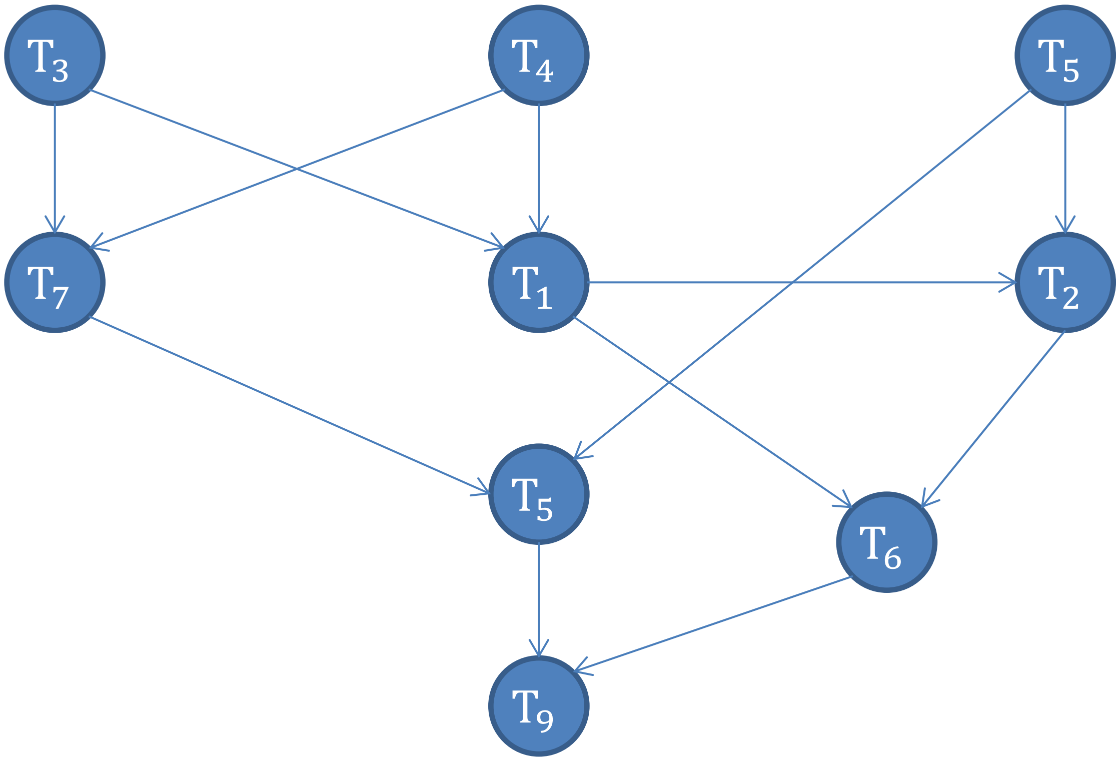
Τοπολογική διάταξη-Παράδειγμα

- Εφαρμογή ΑΠΒ



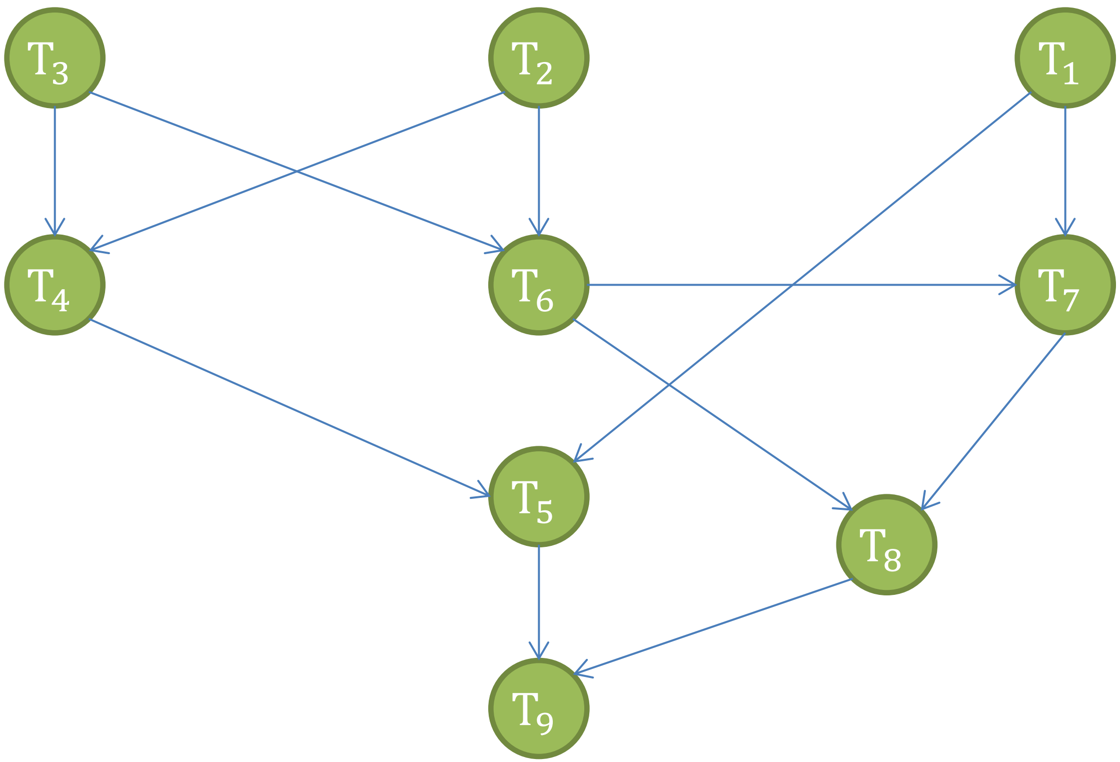
- Σειρά μεταδιάταξης («εγκατ): 9,6,2,1,8,7,3,4,5

Τοπολογική διάταξη-Παράδειγμα



- Τοπολογική διάταξη: 5,4,3,7,8,1,2,6,9

Τοπολογική διάταξη-Παράδειγμα



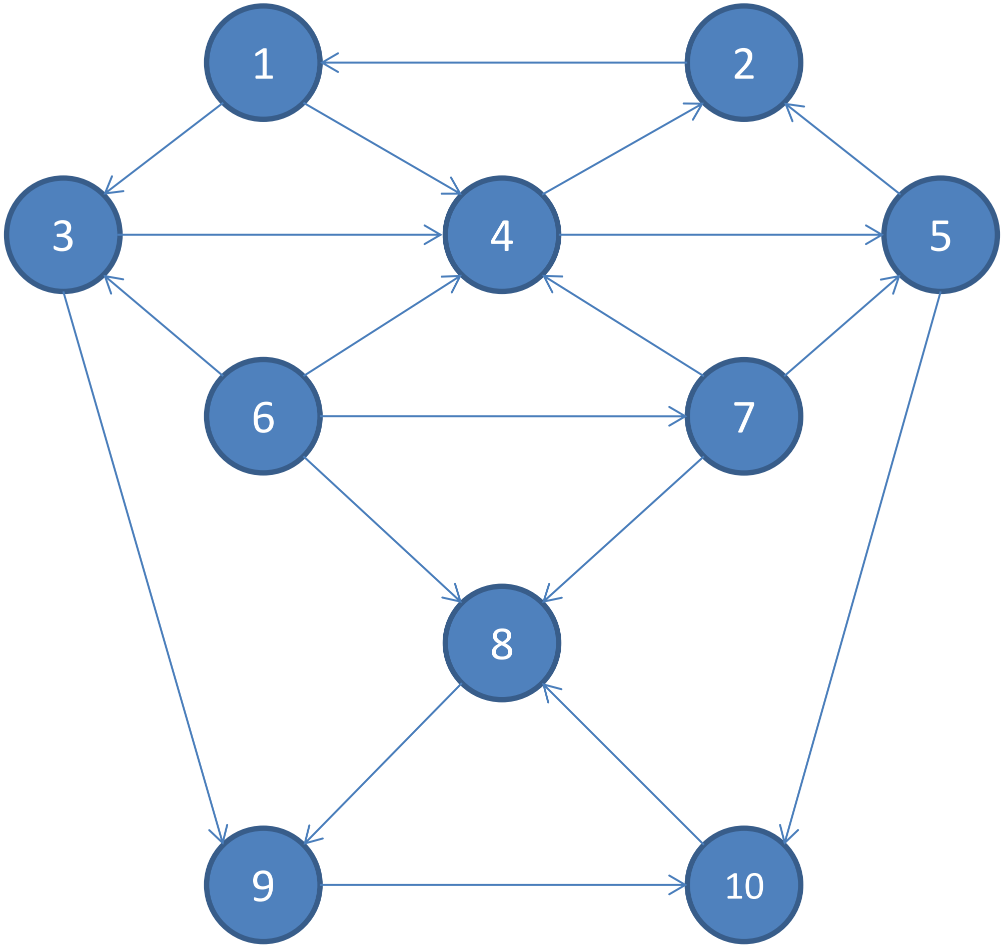
- Τοπολογική διάταξη

Ισχυρές Συνιστώσες

- Ένα υπογράφημα του διγραφήματος G που είναι ισχυρά συνεκτικό και «μέγιστο» ως προς αυτή την ιδιότητα, δηλαδή δεν περιέχεται σε άλλο ισχυρά συνεκτικό υπογράφημα, το καλούμε ισχυρά συνεκτική συνιστώσα, ή απλά ισχυρή συνιστώσα του G.

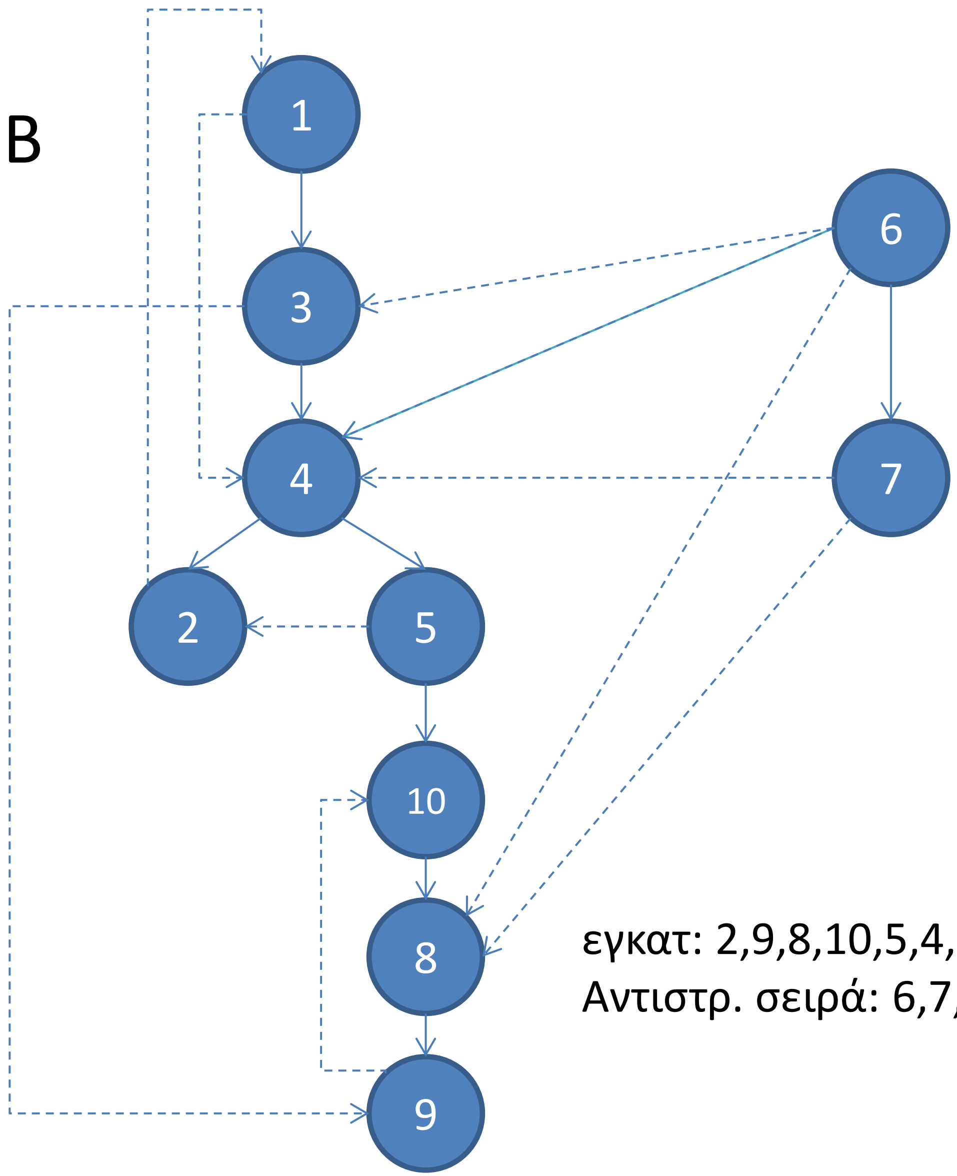
- Αλγόριθμος «Ισχυρές Συνιστώσες»
  - ΑΠΒ για το G (* καθορισμός της σειράς εγκατάλειψης των κόμβων*)
  - ΑΠΒ για το G^T (* με σειρά αντίστροφη της σειράς εγκατάλειψης *)
  - Οι κόμβοι κάθε δένδρου του G^T: μία ξεχωριστή ισχυρή συνιστώσα του G^T
- όπου G^T είναι το γράφημα G με αντεστραμμένες τις φορές των ακμών

Ισχυρές Συνιστώσες-Παράδειγμα



Ισχυρές Συνιστώσες-Παράδειγμα

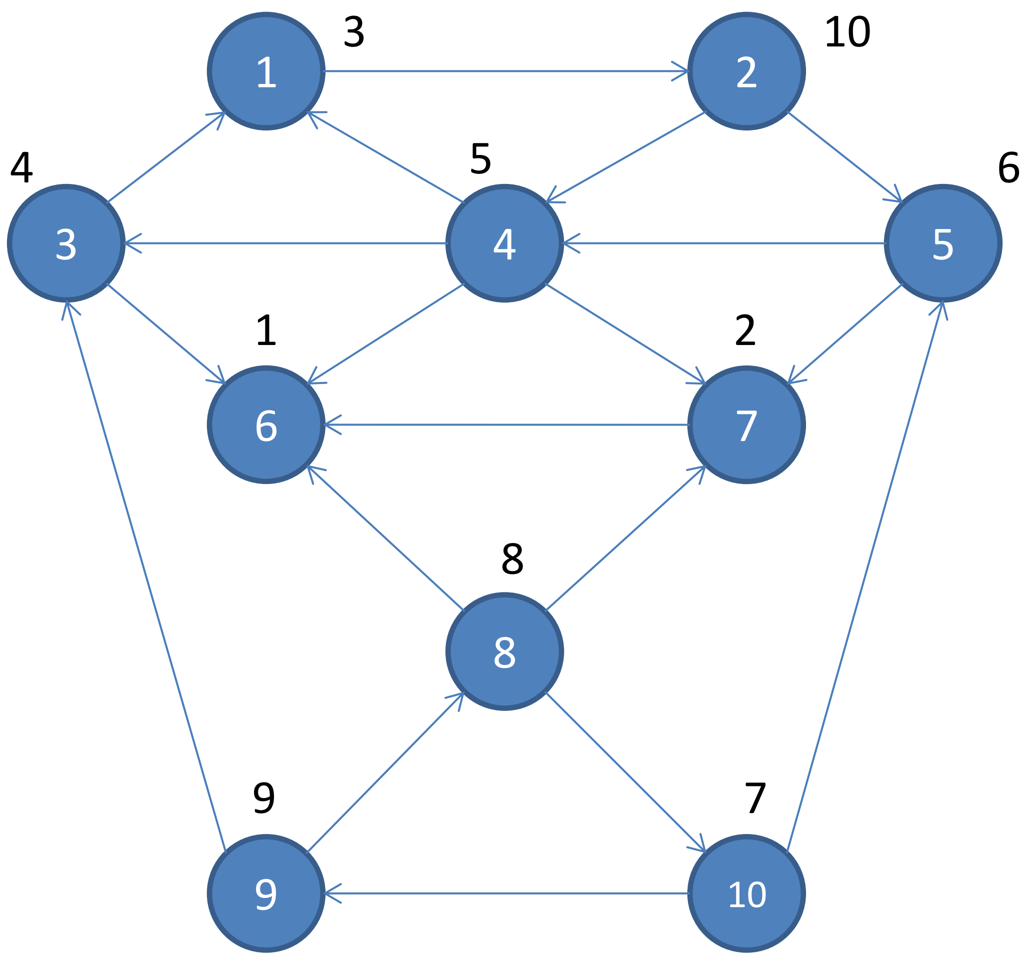
- Εφαρμογή ΑΠΒ



εγκατ: 2,9,8,10,5,4,3,1,7,6
Αντιστρ. σειρά: 6,7,1,3,4,5,10,8,9,2

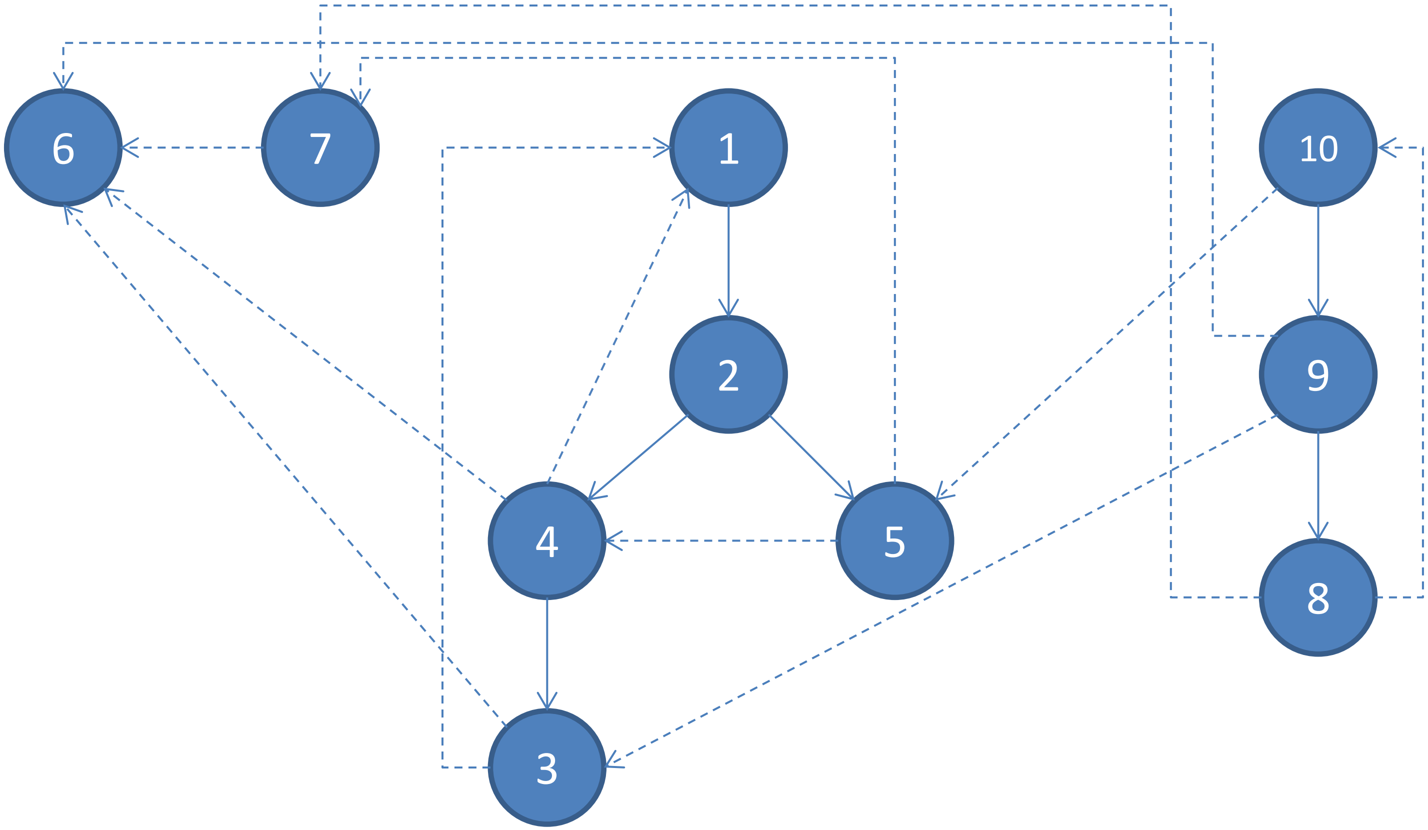
Ισχυρές Συνιστώσες-Παράδειγμα

- G’

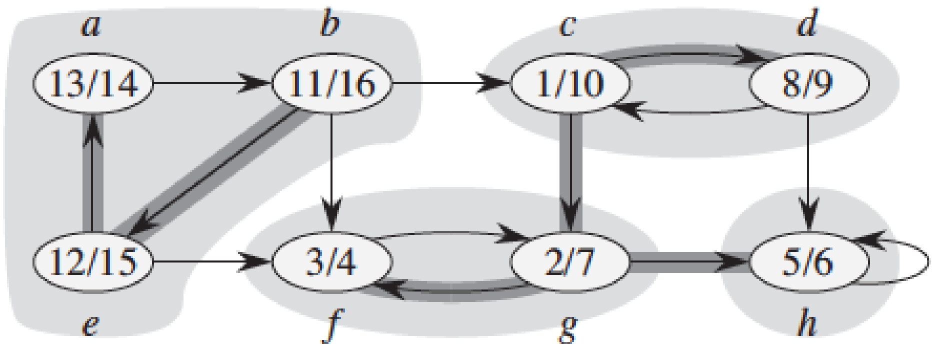


Ισχυρές Συνιστώσες-Παράδειγμα

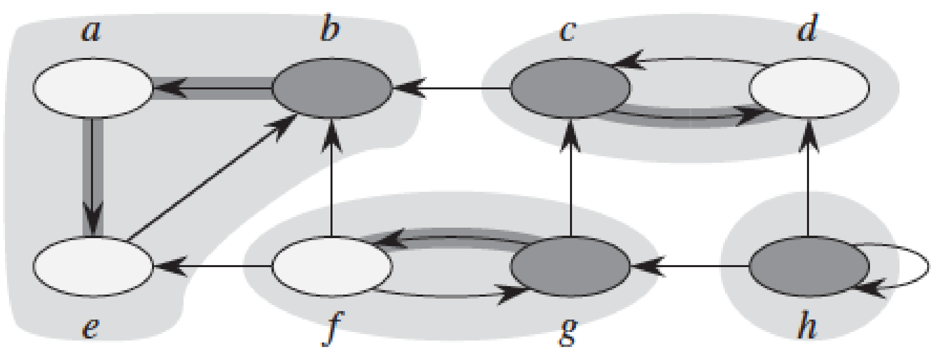
- Εφαρμογή ΑΠΒ για το G' με βάση το «δείκτη»



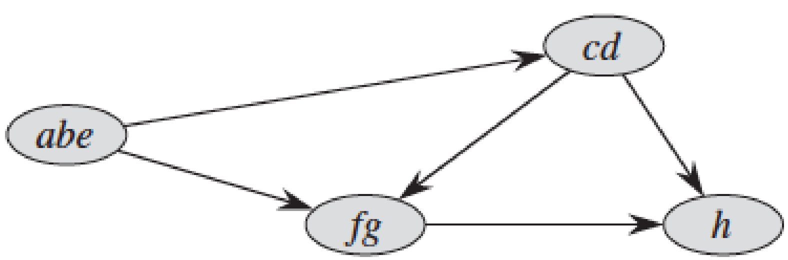
Απόδειξη ορθότητας Ισχυρών Συνιστωσών



Ένα κατευθυντό γράφημα *G*. Κάθε σκιασμένη περιοχή είναι μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του *G*.



Το γράφημα G^T, το ανάστροφο του G, με το κατά βάθος δάσος.



Το άκυκλο γράφημα συνιστωσών $G^{ΙΣΣ}$ που προκύπτει από τη σύμπτυξη όλων των ακμών εντός κάθε ισχυρά συνεκτικής συνιστώσας του *G*.

Απόδειξη ορθότητας Ισχυρών Συνιστωσών

Λήμμα:

C και C′ διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G

u, v ∈ C, u′, v′ ∈ C′,

Αν υπάρχει η διαδρομή u → u′.

Δεν υπάρχει η διαδρομή v′ → v

Απόδειξη ορθότητας Ισχυρών Συνιστωσών

- Αν $U \subseteq V$, ορίζουμε $f(U) = \max_{u \in U} \{u.f\}$ και $d(U) = \min_{u \in U} \{u.d\}$
- ***Λήμμα:***
  - C και C′ διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες στο G = (V, E)
  - Έστω μια ακμή (u, v) ∈ E, όπου u ∈ C και v ∈ C′.
  - f(C) > f(C′).
- Απόδειξη με διάκριση δύο περιπτώσεων:
  - d(C) > d(C′)
  - d(C) < d(C′)

Απόδειξη ορθότητας Ισχυρών Συνιστωσών

Πόρισμα:

C και C′ δύο διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες στο G.

Έστω ότι υπάρχει κάποια ακμή $(u, v) \in E^T$, όπου $u \in C$ και $v \in C'$.

Στην περίπτωση αυτή, $f(C) < f(C')$.

Απόδειξη ορθότητας Ισχυρών Συνιστωσών

- Έναρξη της δεύτερης ΑΠΒ από την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα C με μέγιστο χρόνο περάτωσης f(C)
- Λόγω του Πορίσματος, δεν υπάρχει καμία ακμή στο G^T από την C προς οποιαδήποτε άλλη ισχυρά συνεκτική συνιστώσα
- Επομένως η διερεύνηση δεν θα επεκταθεί σε κόμβους των άλλων συνιστωσών.
- Μετά την επίσκεψη της C, επιλέγεται ως αφετηρία κόμβος από την ισχυρά συνεκτική συνιστώσα C′ με χρόνο περάτωσης f(C′) μέγιστο μεταξύ όλων των υπόλοιπων συνιστωσών.
- Οι μόνες ακμές στο G^T από την C′ προς οποιαδήποτε άλλη συνιστώσα είναι προς τη συνιστώσα C.
- Αυτό ισχύει και για τις επόμενες συνιστώσες: ακμές μόνο σε συνιστώσες που έχουμε ήδη επισκεφθεί.
- Αυτή διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να εξαντληθούν όλες οι συνιστώσες.