Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές του ακόλουθου μαθήματος:

Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

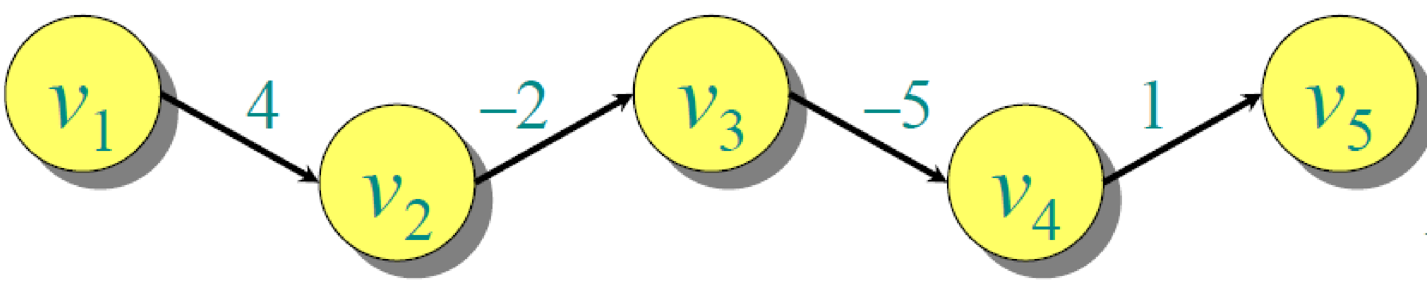
https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/

Μονοπάτια σε γραφήματα

Έστω ένα διγράφημα $G = (V, E)$ με βάρη στις ακμές ($w : E \to \mathbb{R}$). Το ***βάρος*** του μονοπατιού $p = v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k$ ορίζεται ως

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}).$$

Παράδειγμα:



$w(p) = -2$

Συντομότερα Μονοπάτια

Ένα ***συντομότερο μονοπάτι*** από το u στο v είναι ένα μονοπάτι ελαχίστου βάρους από το u στο v.

Το βάρος του ***συντομότερου μονοπατιού*** από το u στο v ορίζεται ως:

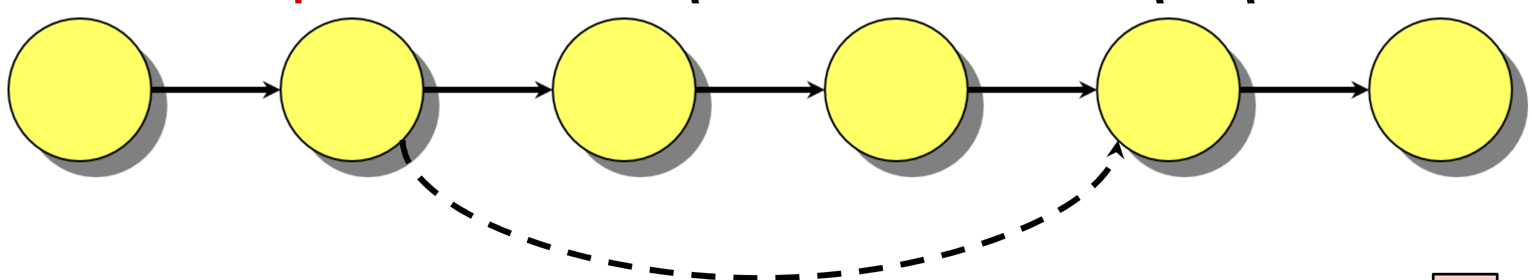
$$\delta(u, v) = \min\{w(p) : p \text{ είναι ένα μονοπάτι από το } u \text{ στο } v\}.$$

Note: $\delta(u, v) = \infty$ αν δεν υπάρχει μονοπάτι από το u στο v.

Υποδομή Βέλτιστου

Θεώρημα. Ένα υπο-μονοπάτι ενός συντομότερου μονοπατιού είναι επίσης συντομότερο μονοπάτι.

Απόδειξη. Αποκοπή και επικόλληση:



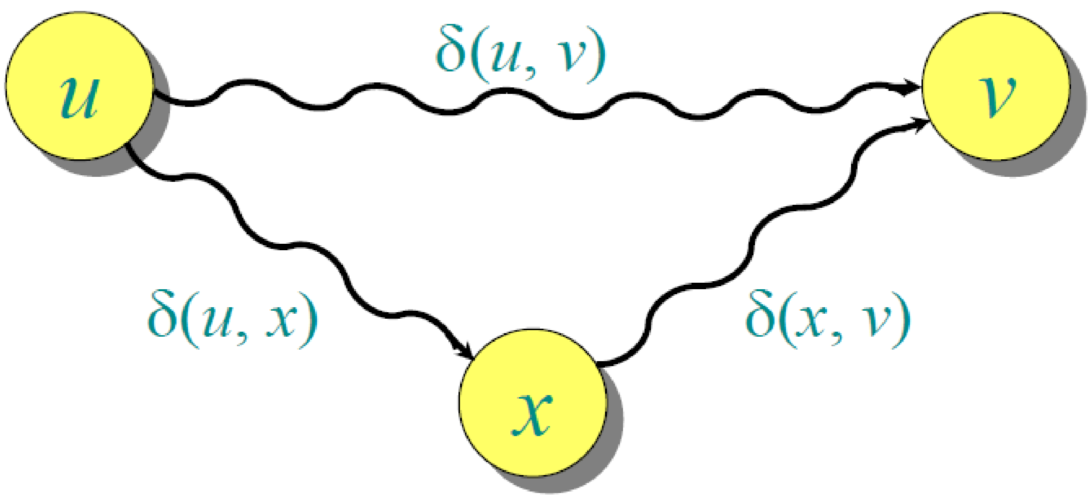
Τριγωνική Ανισότητα

Θεώρημα. Για όλα τα $u, v, x \in V$, έχουμε

$$\delta(u, v) \le \delta(u, x) + \delta(x, v).$$

▪

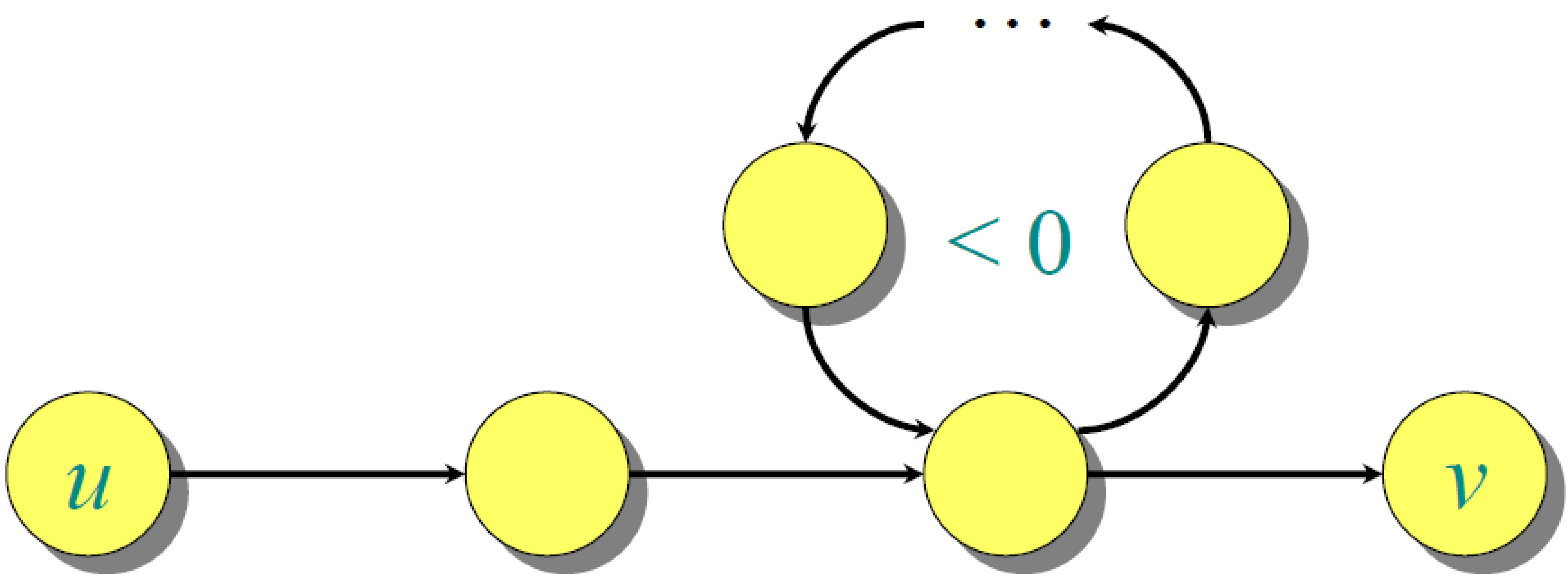
Απόδειξη.



Αδυναμία εύρεσης συντομότερων διαδρομών

Αν ένα γράφημα G περιέχει ένα κύκλο αρνητικού βάρους, τότε κάποια συντομότερα μονοπάτια μπορεί να μην υπάρχουν.

Παράδειγμα:



Συντομότερα μονοπάτια κοινής αφετηρίας

Πρόβλημα. Από μία δοθείσα κορυφή $s \in V$, βρες τα βάρη των συντομότερων μονοπατιών $\delta(s, v)$ για όλα τα $v \in V$.

Αν όλα τα βάρη των ακμών $w(u, v)$ είναι *μη αρνητικά*, όλα τα βάρη των συντομότερων μονοπατιών πρέπει να υπάρχουν.

ΙΔΕΑ: Άπληστος Αλγόριθμος. ▪

1. Διατήρησε ένα σύνολο S κορυφών των οποίων οι συντομότερες αποστάσεις από το s είναι ήδη γνωστές.
2. Σε κάθε βήμα, πρόσθεσε στο S την κορυφή $v \in V - S$ της οποίας η εκτίμηση της απόστασης από τη s είναι ελάχιστη.
3. Ενημέρωσε τις εκτιμήσεις αποστάσεων κορυφών που είναι γειτονικές με τη v.

Αλγόριθμος Dijkstra

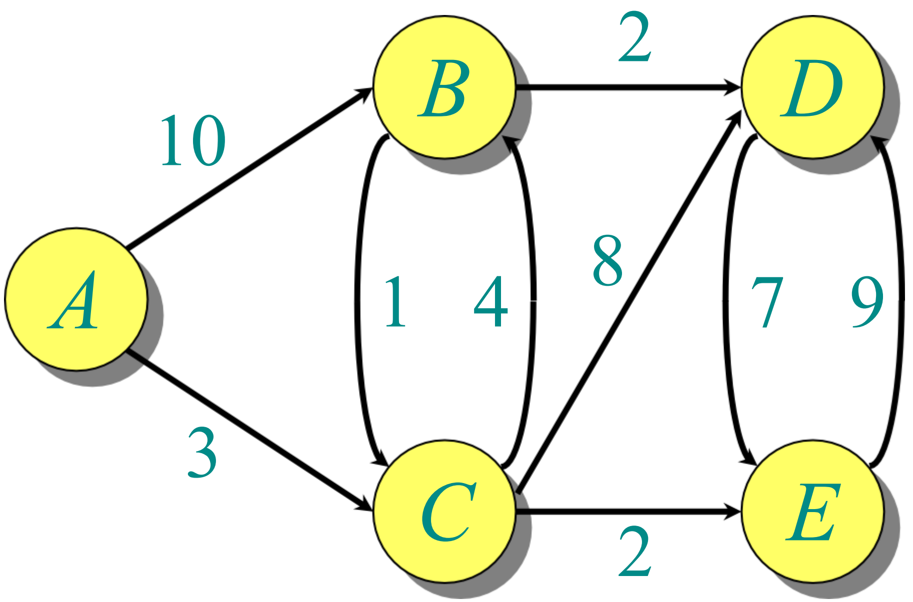
$d[s] \leftarrow 0$
for each $v \in V - \{s\}$
    do $d[v] \leftarrow \infty$
$S \leftarrow \varnothing$
$Q \leftarrow V$ $\triangleright$ Q is a priority queue maintaining $V - S$
while $Q \neq \varnothing$
    do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
        $S \leftarrow S \cup \{u\}$
        for each $v \in Adj[u]$
            do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
                then $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

Βήμα Χαλάρωσης

DECREASE-KEY

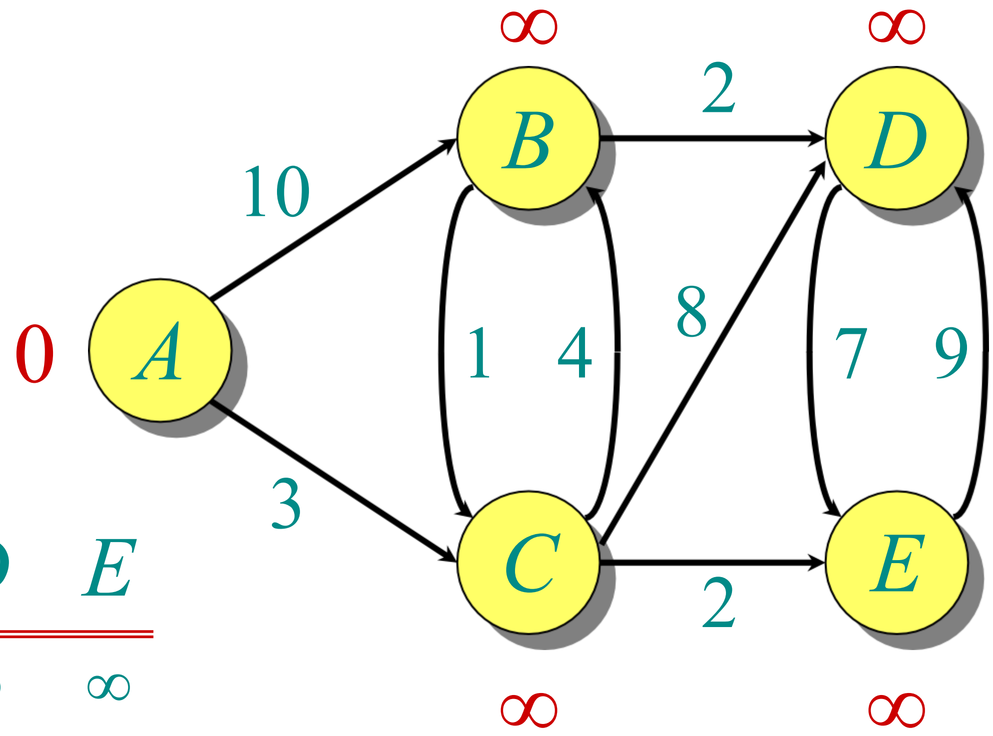
Παράδειγμα

Γράφημα με μη αρνητικά βάρη ακμών



Παράδειγμα

Αρχικοποίηση:

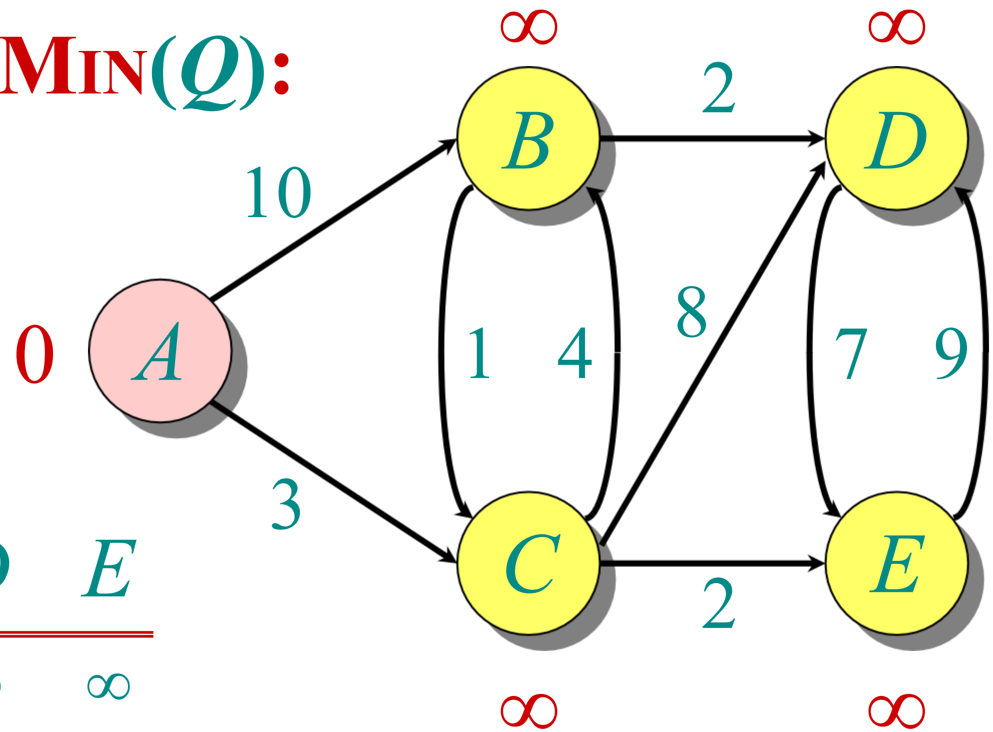


Q:	A	B	C	D	E
	0	∞	∞	∞	∞

S: {}

Παράδειγμα

“A” ← **EXTRACT-MIN**(Q):

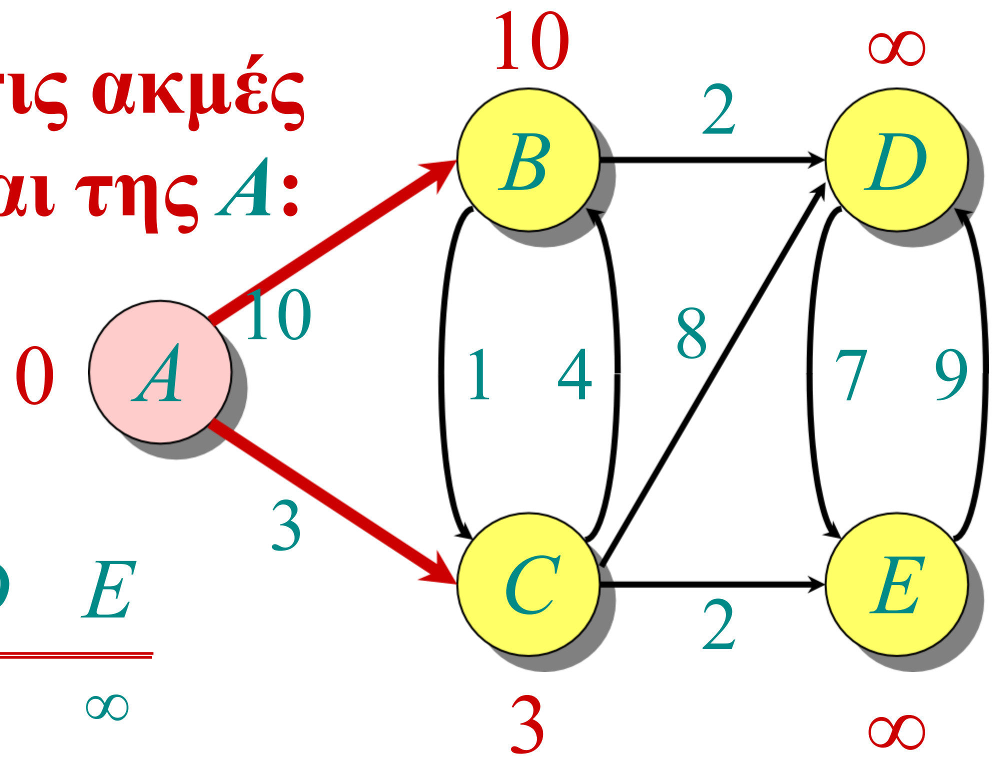


Q:	A	B	C	D	E
	0	∞	∞	∞	∞

S: { A }

Παράδειγμα

Χαλάρωσε όλες τις ακμές που εξέρχονται της *A*:

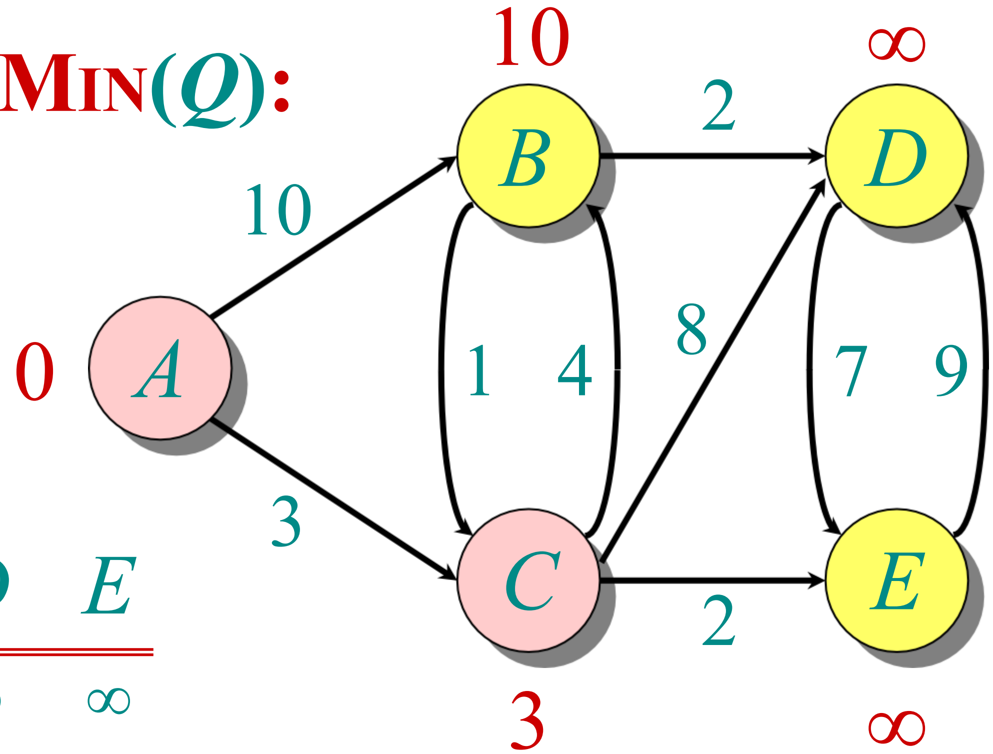


Q:	A	B	C	D	E
	0	∞	∞	∞	∞
		10	3	∞	∞

S: { A }

Παράδειγμα

"C" $\leftarrow$ **EXTRACT-MIN(Q):**

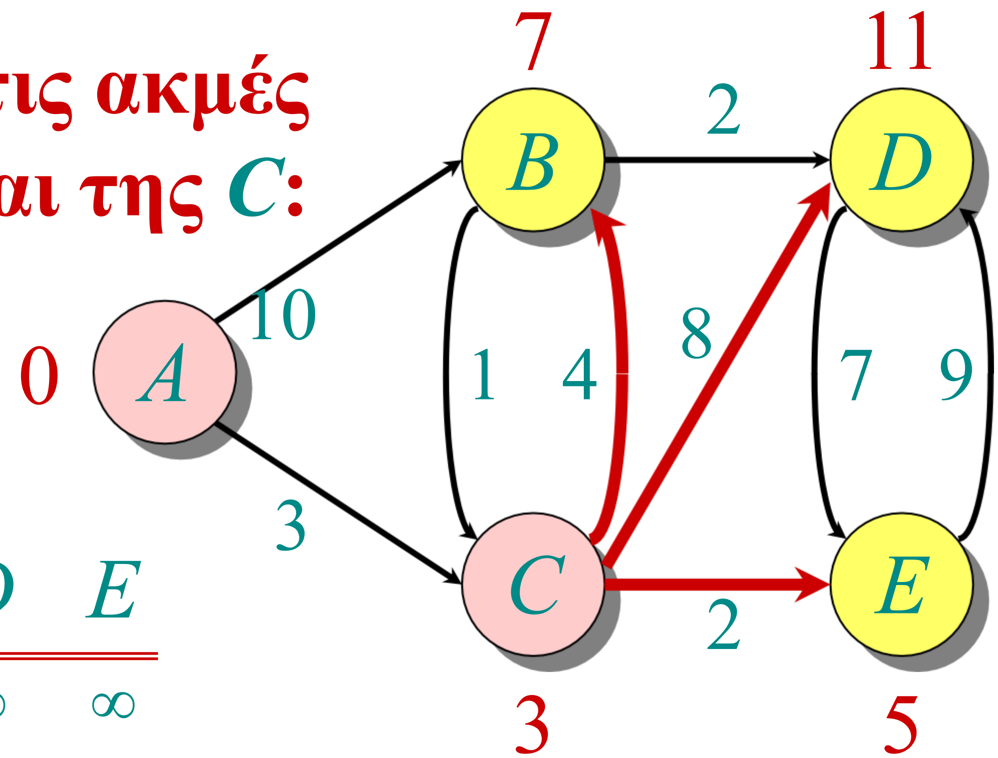


Q:	A	B	C	D	E
	0	∞	∞	∞	∞
		10	3	∞	∞

S: { A, C }

Παράδειγμα

Χαλάρωσε όλες τις ακμές που εξέρχονται της *C*:

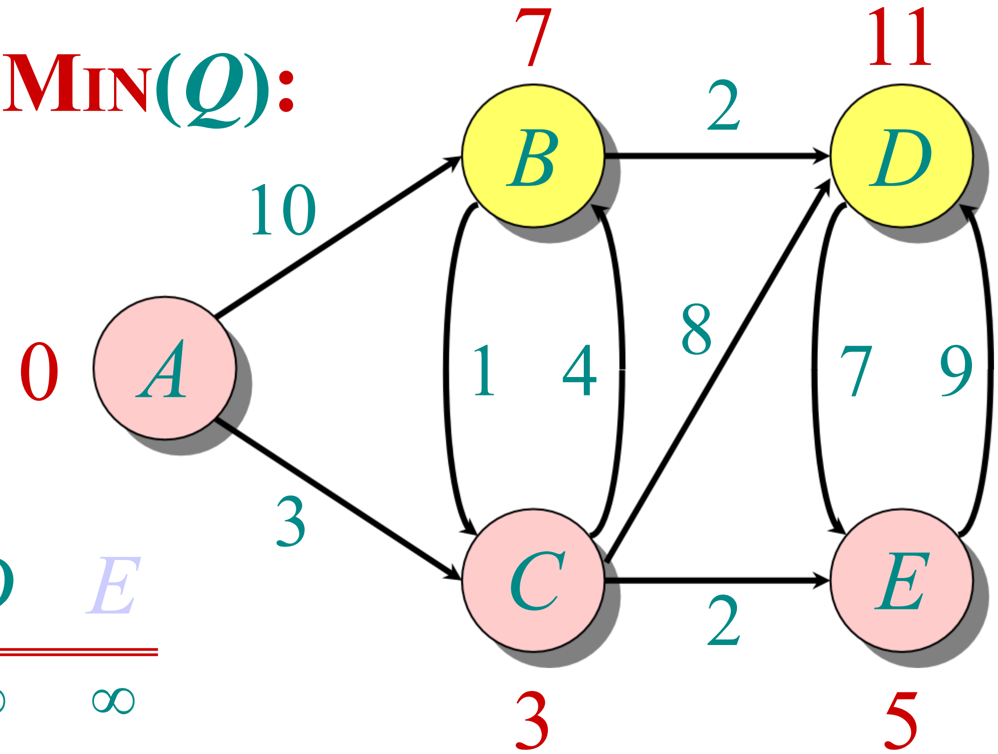


Q:	A	B	C	D	E
	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞
		10	$\boxed{3}$	∞	∞
		7		11	5

S: { A, C }

Παράδειγμα

"E" $\leftarrow$ **EXTRACT-MIN**(Q):

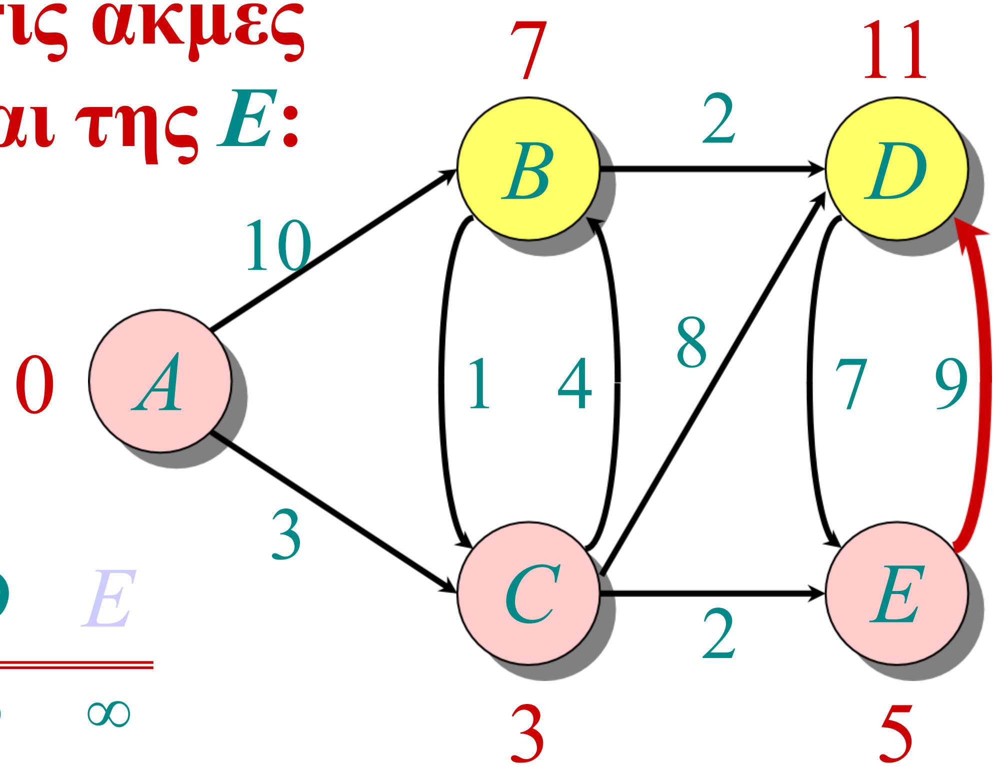


Q:	A	B	C	D	E
	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞
		10	$\boxed{3}$	∞	∞
		7		11	$\boxed{5}$

S: { A, C, E }

Παράδειγμα

Χαλάρωσε όλες τις ακμές που εξέρχονται της *E*:

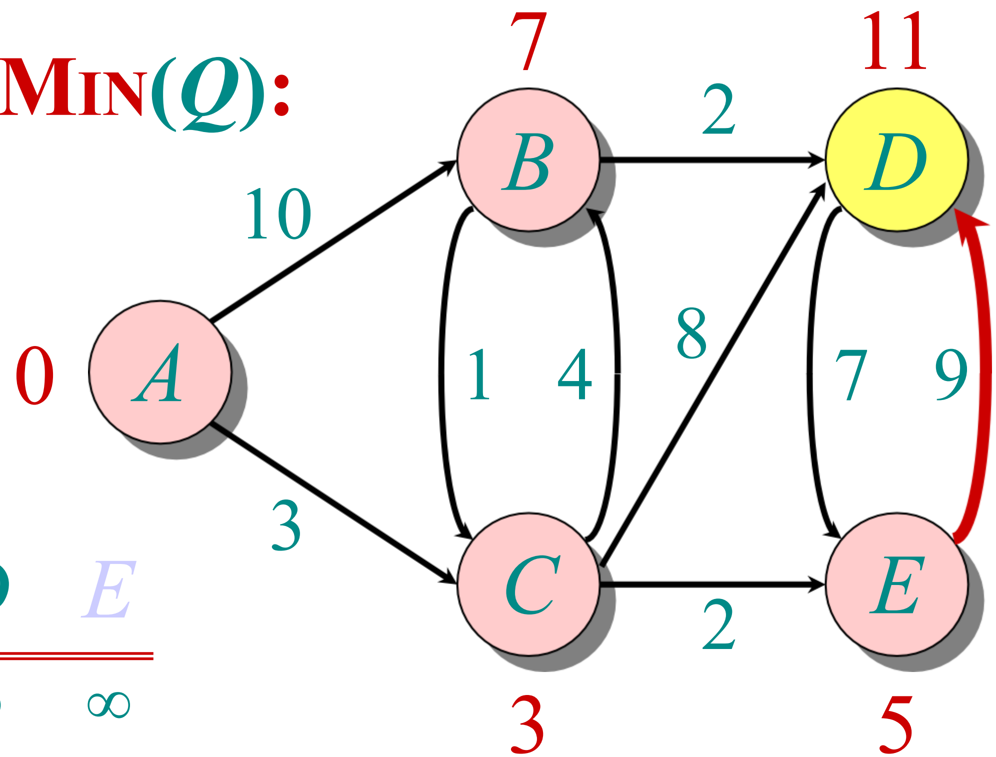


Q:	A	B	C	D	E
	0	∞	∞	∞	∞
		10	3	∞	∞
		7		11	5
		7		11	

S: { A, C, E }

Παράδειγμα

"B" ← **EXTRACT-MIN(Q):**

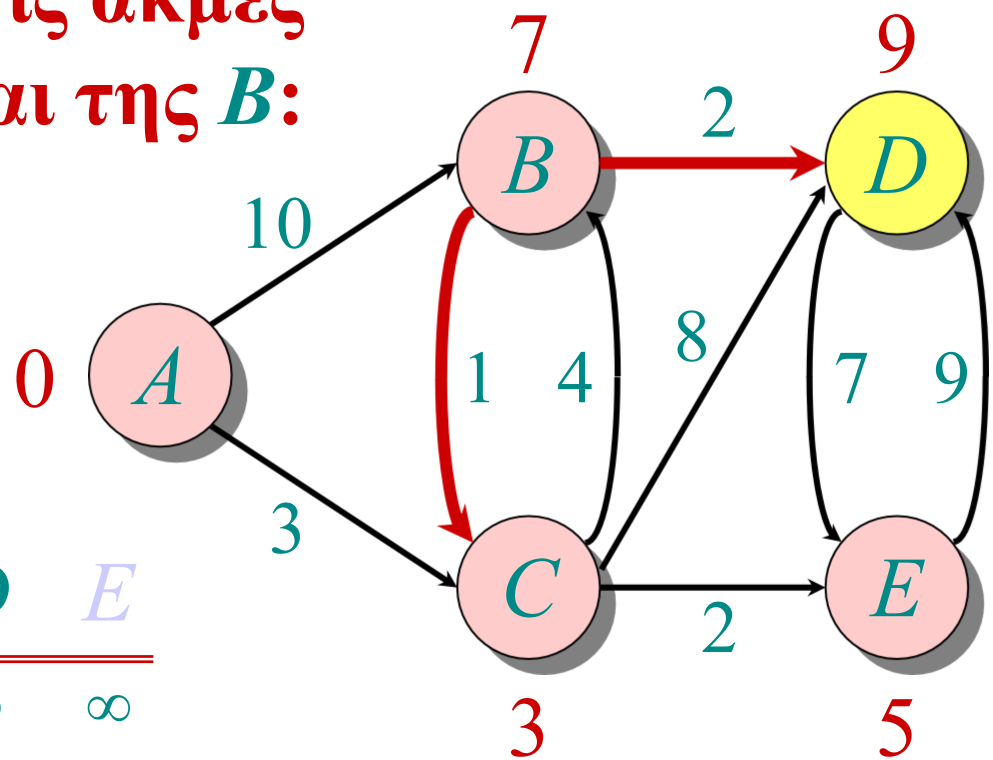


Q:	A	B	C	D	E
	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞
		10	$\boxed{3}$	∞	∞
		7		11	$\boxed{5}$
		$\boxed{7}$		11	

S: { A, C, E, B }

Παράδειγμα

Χαλάρωσε όλες τις ακμές που εξέρχονται της *B*:

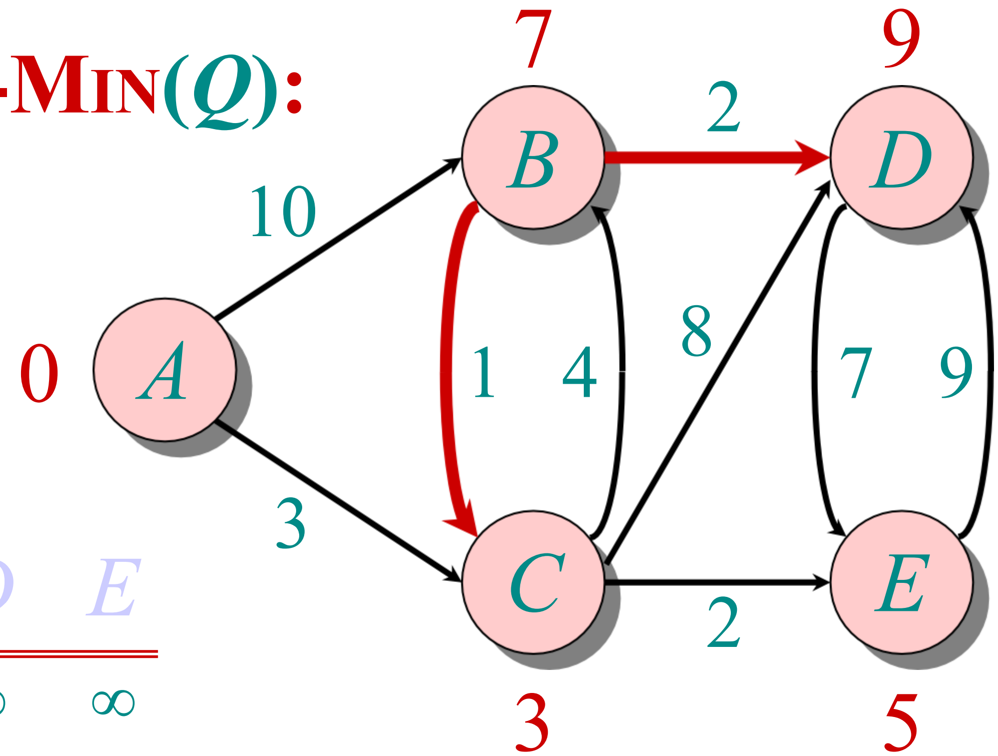


Q:	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
	0	∞	∞	∞	∞
		10	3	∞	∞
		7		11	5
		7		11	
				9	

S: { *A*, *C*, *E*, *B* }

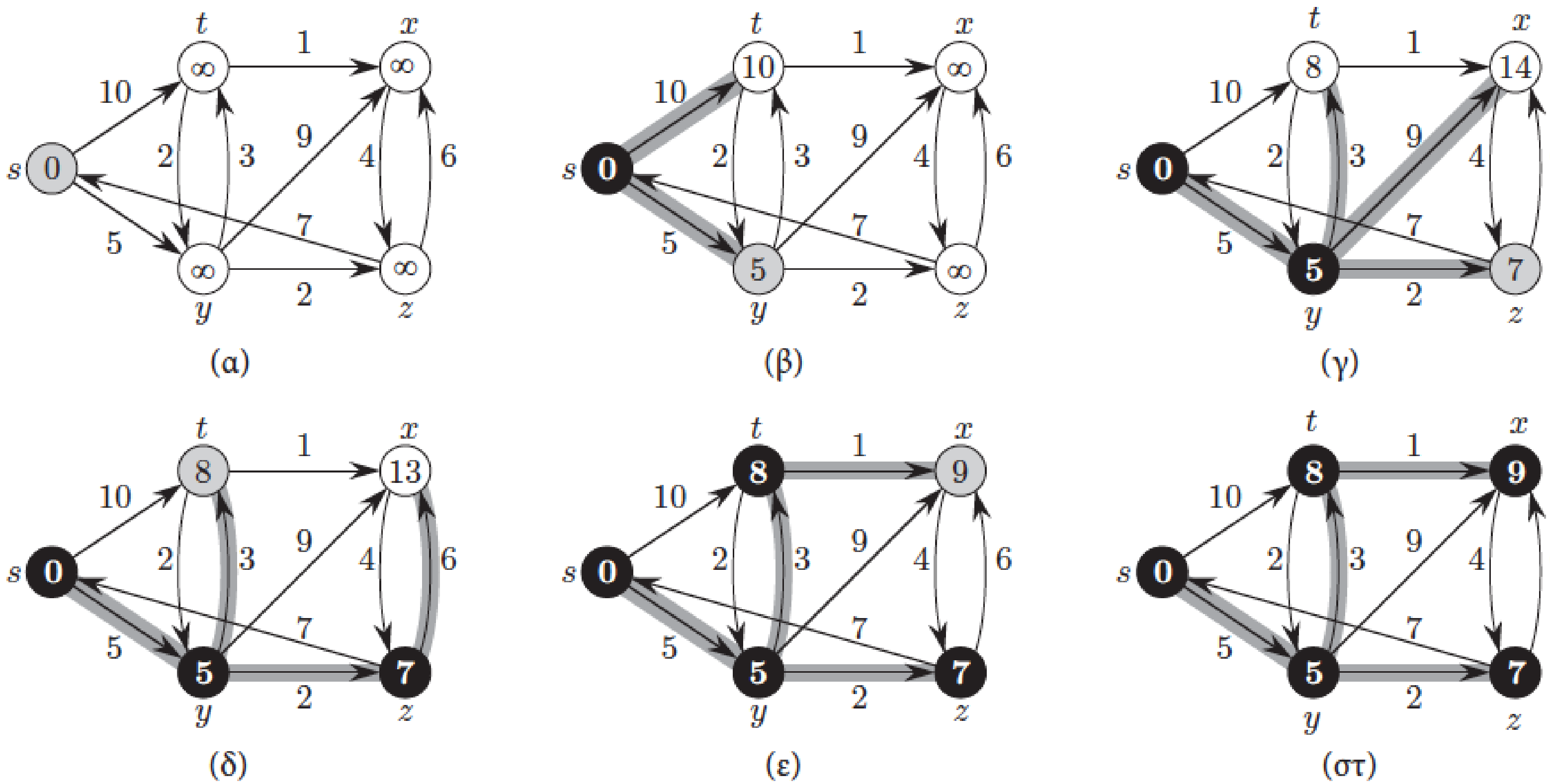
Παράδειγμα

"D" ← EXTRACT-MIN(Q):



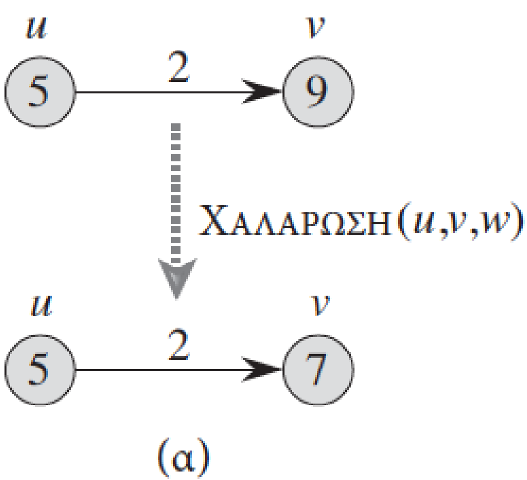
Q:	A	B	C	D	E
	0	∞	∞	∞	∞
		10	3	∞	∞
		7		11	5
		7		11	
				9	

S: { A, C, E, B, D }



Σχήμα 24.6 Η λειτουργία του αλγορίθμου του Dijkstra. Ο αφετηριακός κόμβος s είναι αυτός που βρίσκεται στο αριστερό άκρο του σχήματος. Εντός του κάθε κόμβου αναγράφεται η αντίστοιχη εκτίμηση συντομότατης διαδρομής, ενώ οι σκιασμένες ακμές υποδεικνύουν τα πεδία προκατόχου. Οι μαύροι κόμβοι είναι αυτοί που ανήκουν στο σύνολο S, και οι λευκοί αυτοί που ανήκουν στην ουρά προτεραιότητας ελαχίστου $Q = V - S$. (α) Η κατάσταση αμέσως πριν από την πρώτη επανάληψη του βρόχου ενόσω στις γραμμές 4–8. Ο σκιασμένος κόμβος είναι αυτός που έχει την ελάχιστη τιμή d και ο οποίος επιλέγεται ως u στη γραμμή 5. (β)–(στ) Η κατάσταση μετά από κάθε διαδοχική επανάληψη του βρόχου ενόσω. Ο σκιασμένος κόμβος σε κάθε σχήμα είναι αυτός που επιλέγεται ως u στη γραμμή 5 της επόμενης επανάληψης. Τα στοιχεία για τις τιμές d και για τους προκατόχους στο σχήμα (στ) είναι τα τελικά.

Χαλάρωση ακμής



Σχήμα 24.3 Χαλάρωση μιας ακμής (u, v) με βάρος $w(u, v) = 2$. Εντός κάθε κόμβου αναγράφεται η αντίστοιχη εκτίμηση συντομότατης διαδρομής. **(α)** Δεδομένου ότι πριν από τη χαλάρωση έχουμε $v.d > u.d + w(u, v)$ η τιμή της $v.d$ μειώνεται. **(β)** Στην περίπτωση αυτή, πριν από την πράξη της χαλάρωσης έχουμε $v.d \leq u.d + w(u, v)$, και επομένως η χαλάρωση αφήνει την $v.d$ αμετάβλητη.

Ορθότητα — Μέρος Ι

Λήμμα. Με αρχικές τιμές $d[s] \leftarrow 0$ and $d[v] \leftarrow \infty$ για όλα τα $v \in V - \{s\}$, ισχύει $d[v] \geq \delta(s, v)$ για όλα τα $v \in V$, και αυτή η αναλλοίωτη συνθήκη διατηρείται με οποιαδήποτε ακολουθία βημάτων χαλάρωσης.

Απόδειξη. Υποθέτουμε το αντίθετο. Αν v η πρώτη κορυφή για την οποία $d[v] < \delta(s, v)$, και έστω u η κορυφή που προκάλεσε την αλλαγή της $d[v]$: $d[v] = d[u] + w(u, v)$. Τότε,

$d[v] < \delta(s, v)$	Υπόθεση
$\leq \delta(s, u) + \delta(u, v)$	Τριγωνική ανισότητα
$\leq \delta(s,u) + w(u, v)$	συν. μον. $\leq$ συγκεκρ. μον.
$\leq d[u] + w(u, v)$	v είναι η πρώτη παραβίαση

Άτοπο.

Ορθότητα — Μέρος II

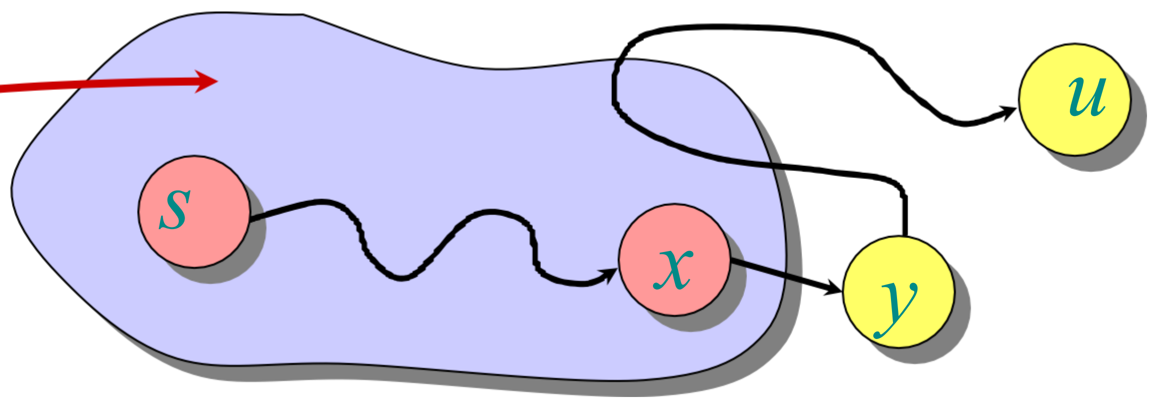
Λήμμα. Έστω u ο προηγούμενος του v κόμβος στο συντομότερο μονοπάτι από το s στο v. Τότε, αν $d[u] = \delta(s, u)$ και η ακμή (u, v) υφίσταται χαλάρωση, έχουμε $d[v] = \delta(s, v)$ μετά τη χαλάρωση.

Απόδειξη. Παρατηρείστε ότι $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$. Υποθέστε ότι $d[v] > \delta(s, v)$ πριν τη χαλάρωση. (Αλλιώς, έχουμε τελειώσει.) Τότε, ο έλεγχος $d[v] > d[u] + w(u, v)$ επιτυγχάνει, διότι $d[v] > \delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v) = d[u] + w(u, v)$, και ο αλγόριθμος θέτει $d[v] = d[u] + w(u, v) = \delta(s, v)$. ■

Ορθότητα — Μέρος III

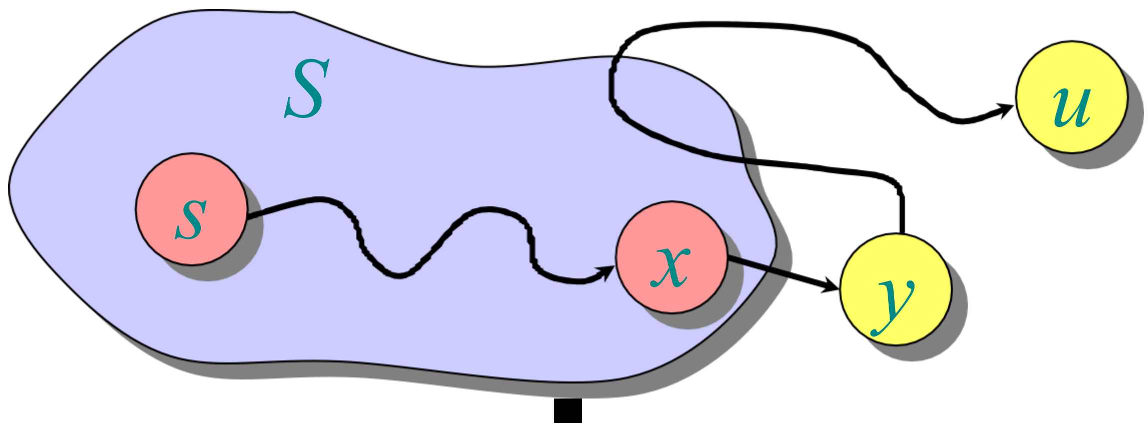
Θεώρημα. Ο αλγόριθμος του Dijkstra τερματίζει με $d[v] = \delta(s, v)$ για όλα τα $v \in V$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $d[v] = \delta(s, v)$ για κάθε $v \in V$ όταν το v προστίθεται στο S. Υποθέστε u είναι η πρώτη κορυφή που προστίθεται στο S για την οποία $d[u] > \delta(s, u)$. Αν y είναι η πρώτη κορυφή στο $V - S$ στο συντομότερο μονοπάτι από το s στο u, και έστω x η προηγούμενη του κορυφή:



S, ακριβώς πριν την πρόσθεση του u.

Ορθότητα — Μέρος ΙΙΙ (συν.)



Αφού u είναι η πρώτη κορυφή που παραβιάζει την αναλλοίωτη συνθήκη, έχουμε $d[x] = \delta(s, x)$.
Όταν η x προστίθεται στο S, η ακμή (x, y) υφίσταται χαλάρωση, το οποίο συνεπάγεται ότι $d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) < d[u]$.
Αλλά, $d[u] \leq d[y]$ από την επιλογή του u.

Άτοπο.

Ανάλυση του Dijkstra

while $Q \neq \emptyset$
  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
    $S \leftarrow S \cup \{u\}$
    for each $v \in Adj[u]$
      do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
        ▪ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

Analysis of Dijkstra

$|V|$
φορές

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{while } Q \neq \emptyset \\
\quad \textbf{do } u \leftarrow \text{Extract-Min}(Q) \\
\qquad S \leftarrow S \cup \{u\} \\
\qquad \textbf{for} \text{ each } v \in Adj[u] \\
\qquad\quad \textbf{do if } d[v] > d[u] + w(u, v) \\
\qquad\qquad \blacksquare \ \textbf{then } d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)
\end{array}\right.$$

Ανάλυση του Dijkstra

while $Q \neq \emptyset$
  do $u \leftarrow \textsc{Extract-Min}(Q)$
    $S \leftarrow S \cup \{u\}$
    for each $v \in Adj[u]$
      do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
        ■ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$|V|$ φορές

$degree(u)$ φορές

Ανάλυση του Dijkstra

$|V|$ φορές

while $Q \neq \emptyset$

  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

  $S \leftarrow S \cup \{u\}$

$degree(u)$ φορές

  for each $v \in Adj[u]$

   do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$

   ▪ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$\Theta(E)$ DECREASE-KEY's.

Ανάλυση του Dijkstra

$|V|$ φορές

$degree(u)$ φορές

while $Q \neq \emptyset$
  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
    $S \leftarrow S \cup \{u\}$
    for each $v \in Adj[u]$
      do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
        ▪ **then** $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

$\Theta(E)$ implicit DECREASE-KEY's.

Χρόνος $= \Theta(V \cdot T_{\text{EXTRACT-MIN}} + E \cdot T_{\text{DECREASE-KEY}})$

Σημείωση: Ο ίδιος τύπος όπως στην ανάλυση του αλγορίθμου του Prim.

Ανάλυση του Dijkstra

$$\text{Time} = \Theta(V)\cdot T_{\text{EXTRACT-MIN}} + \Theta(E)\cdot T_{\text{DECREASE-KEY}}$$

Q	$T_{\text{EXTRACT-MIN}}$	$T_{\text{DECREASE-KEY}}$	Σύνολο
πίνακας	$O(V)$	$O(1)$	$O(V^2)$
Δυαδικός σωρός	$O(\lg V)$	$O(\lg V)$	$O(E \lg V)$
Fibonacci σωρός	$O(\lg V)$ amortized	$O(1)$ amortized	$O(E + V \lg V)$ Χειρότερη περίπτωση