Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές του ακόλουθου μαθήματος:

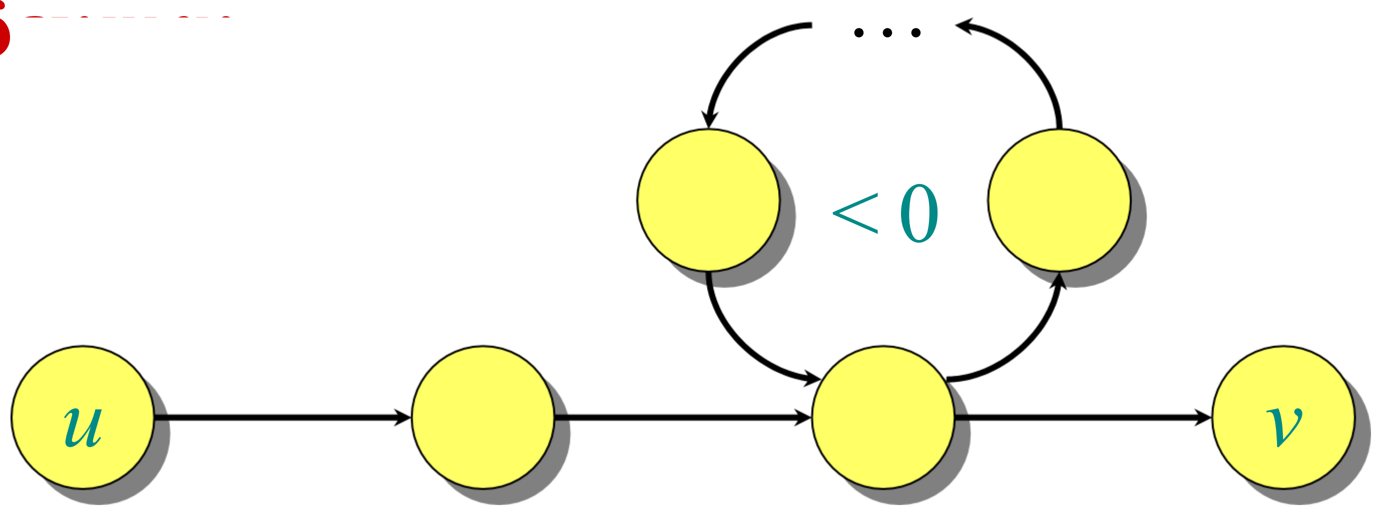
Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/

Κύκλοι Αρνητικού Βάρους

Υπενθύμιση: Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει ένα κύκλο αρνητικού βάρους τότε κάποια συντομότερα μονοπάτια δεν υπάρχουν.

Παράδ



Αλγόριθμος Bellman-Ford: Βρίσκει όλα τα συντομότερα μονοπάτια από μία κοινή ***αφετηρία*** $s \in V$ σε όλους τους κόμβους $v \in V$ ή προσδιορίζει ότι ένα κύκλος αρνητικού βάρους υπάρχει.

Αλγόριθμος Bellman-Ford

$d[s] \leftarrow 0$
for each $v \in V - \{s\}$
    do $d[v] \leftarrow \infty$

αρχικοποίηση

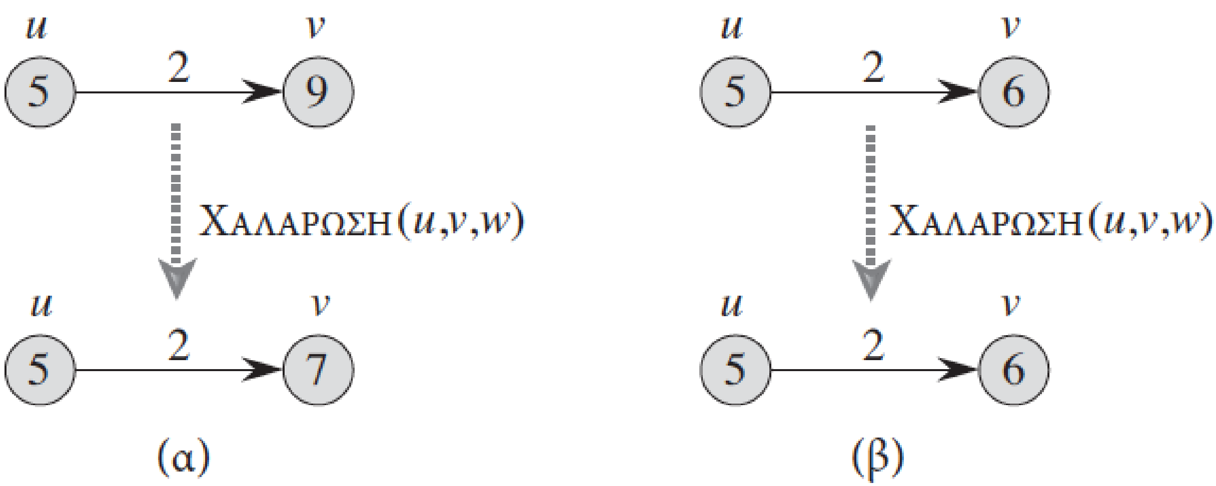
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V| - 1$
    do for each edge $(u, v) \in E$
        do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
            then $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$

Βήμα χαλάρωσης

for each edge $(u, v) \in E$
    do if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
        then report that a negative-weight cycle exists

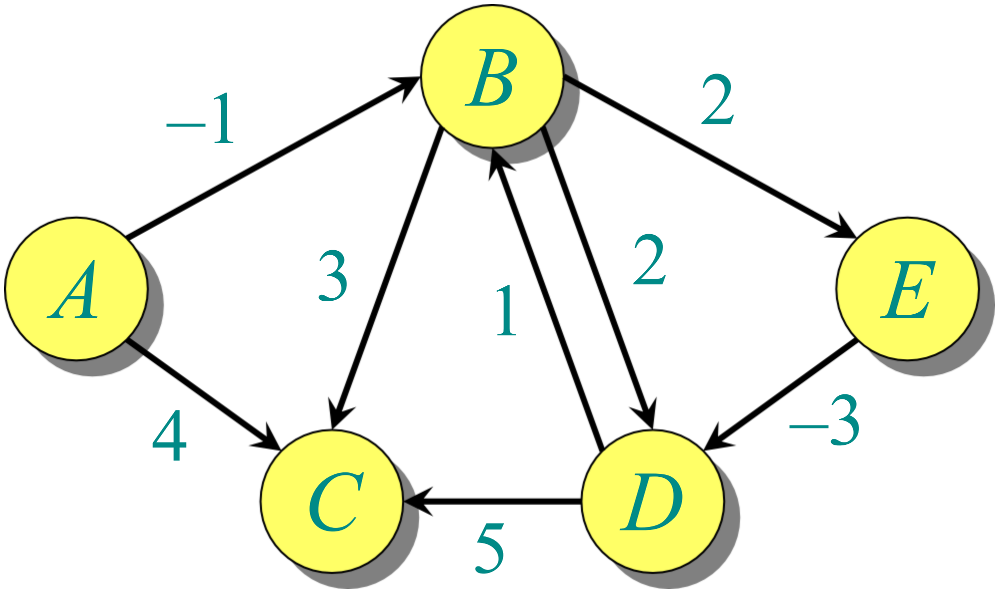
Στο τέλος, $d[v] = \delta(s, v)$, αν δεν υπάρχουν αρνητικού βάρους κύκλοι. Χρόνος $= O(VE)$.

Χαλάρωση ακμής

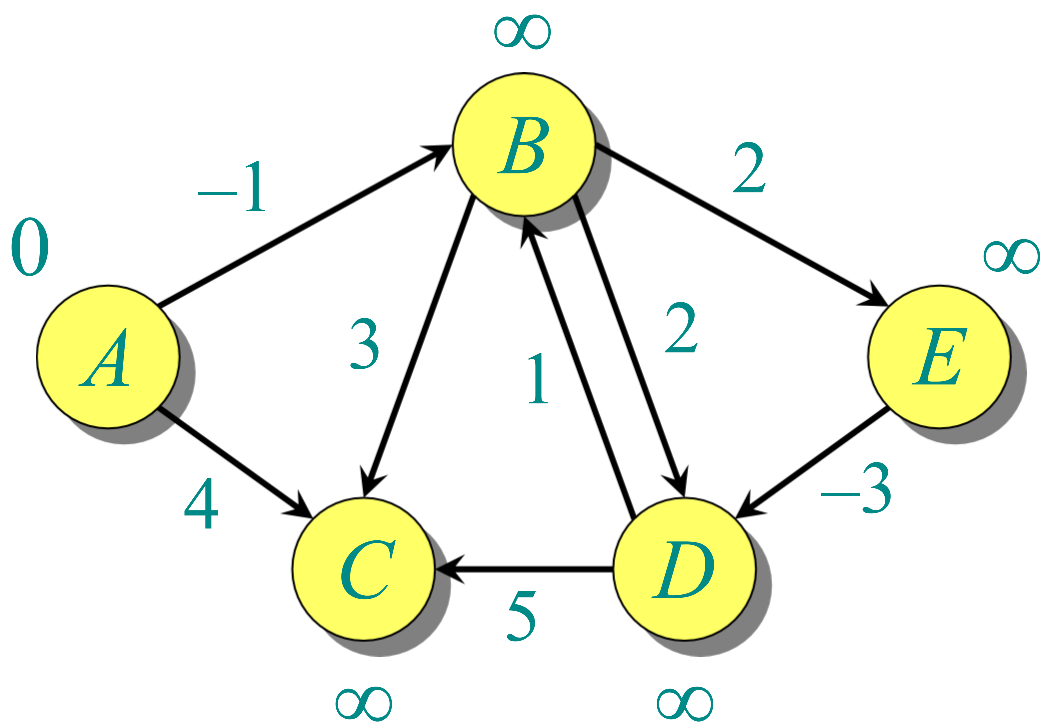


Σχήμα 24.3 Χαλάρωση μιας ακμής (u, v) με βάρος $w(u, v) = 2$. Εντός κάθε κόμβου αναγράφεται η αντίστοιχη εκτίμηση συντομότατης διαδρομής. **(α)** Δεδομένου ότι πριν από τη χαλάρωση έχουμε $v.d > u.d + w(u, v)$ η τιμή της $v.d$ μειώνεται. **(β)** Στην περίπτωση αυτή, πριν από την πράξη της χαλάρωσης έχουμε $v.d \le u.d + w(u, v)$, και επομένως η χαλάρωση αφήνει την $v.d$ αμετάβλητη.

Παράδειγμα

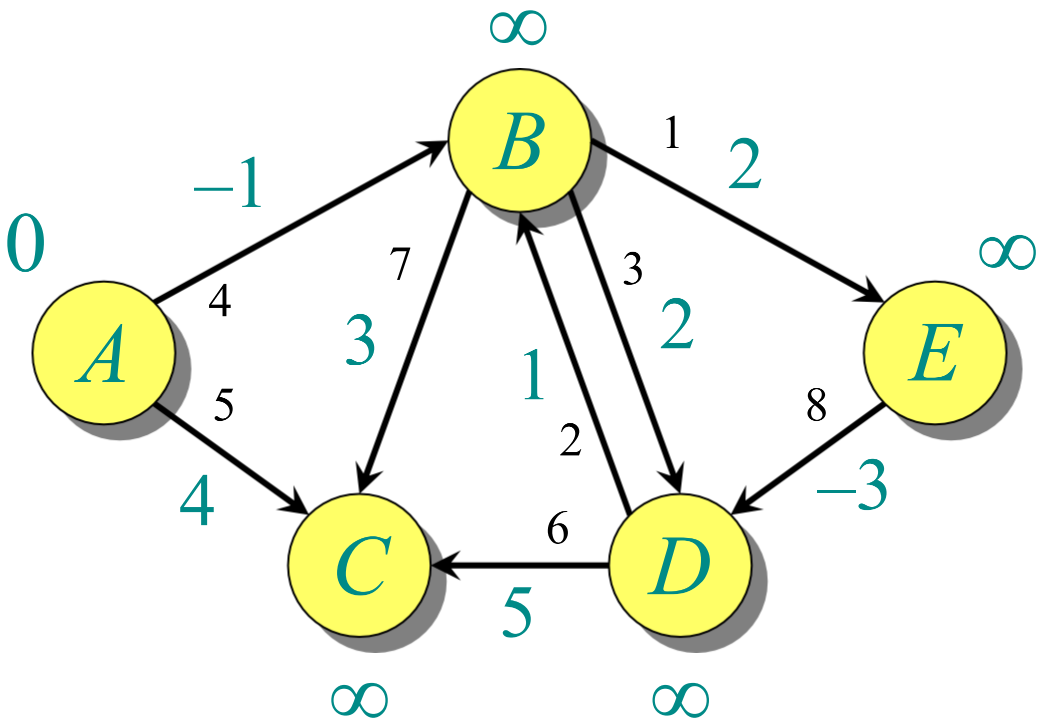


Παράδειγμα



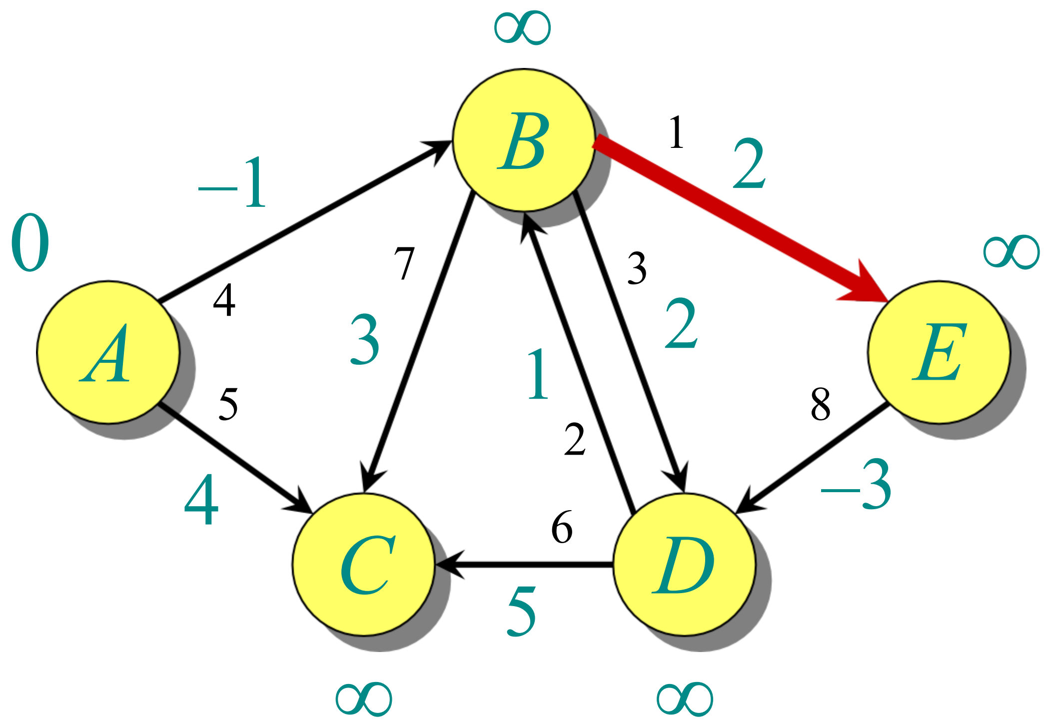
Αρχικοποίηση.

Παράδειγμα

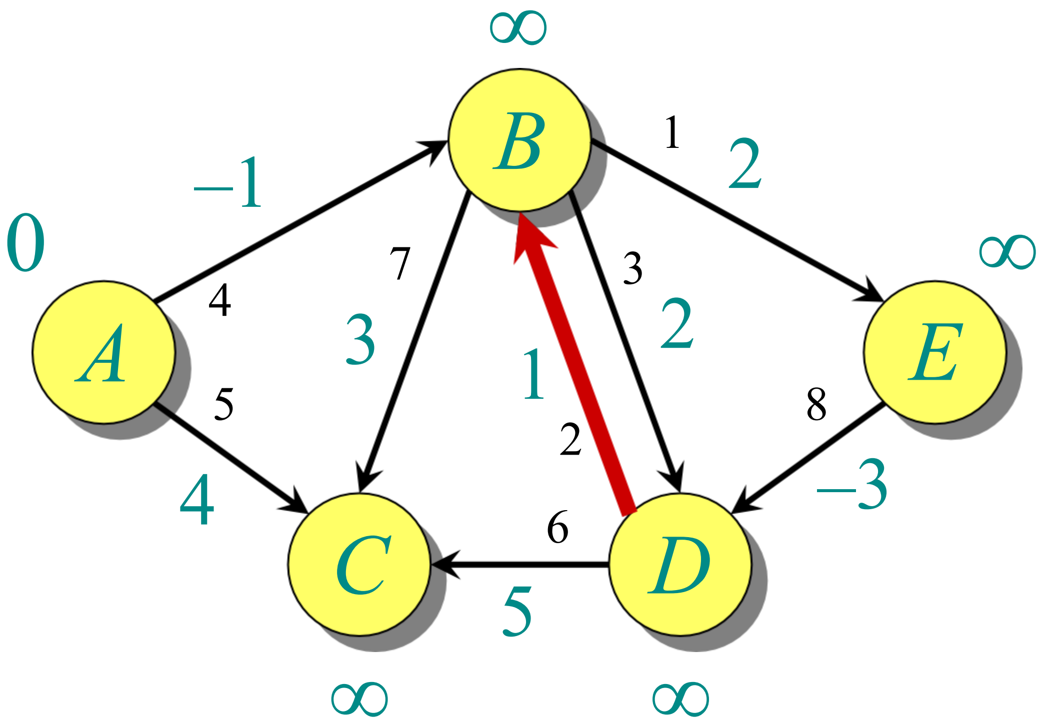


Σειρά των χαλαρώσεων ακμών.

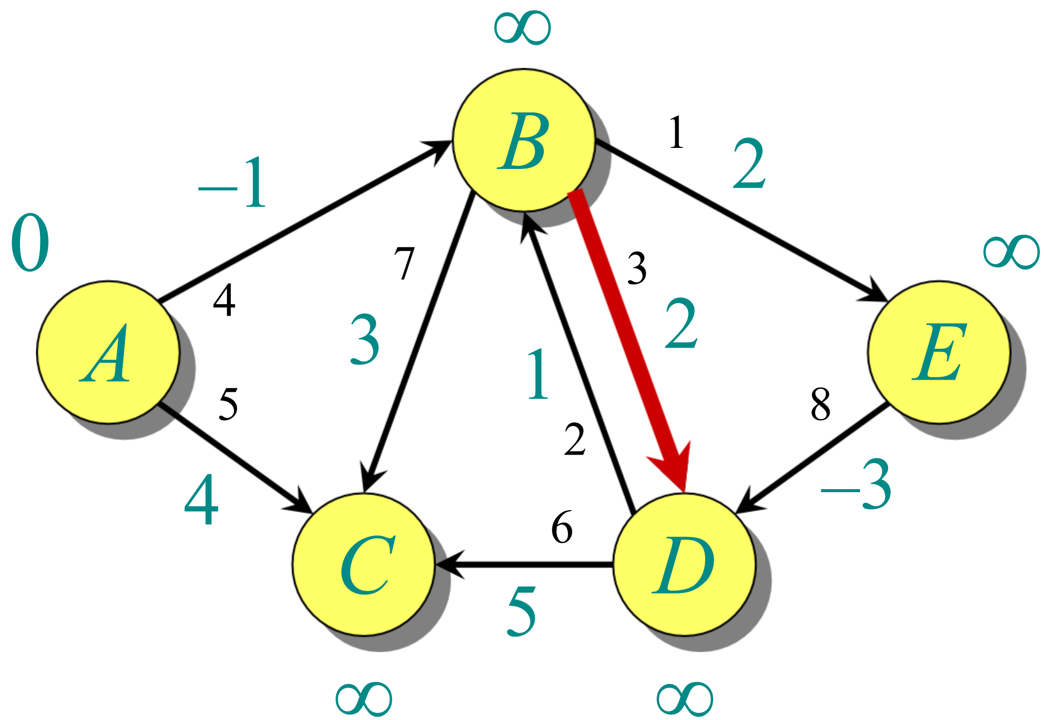
Παράδειγμα



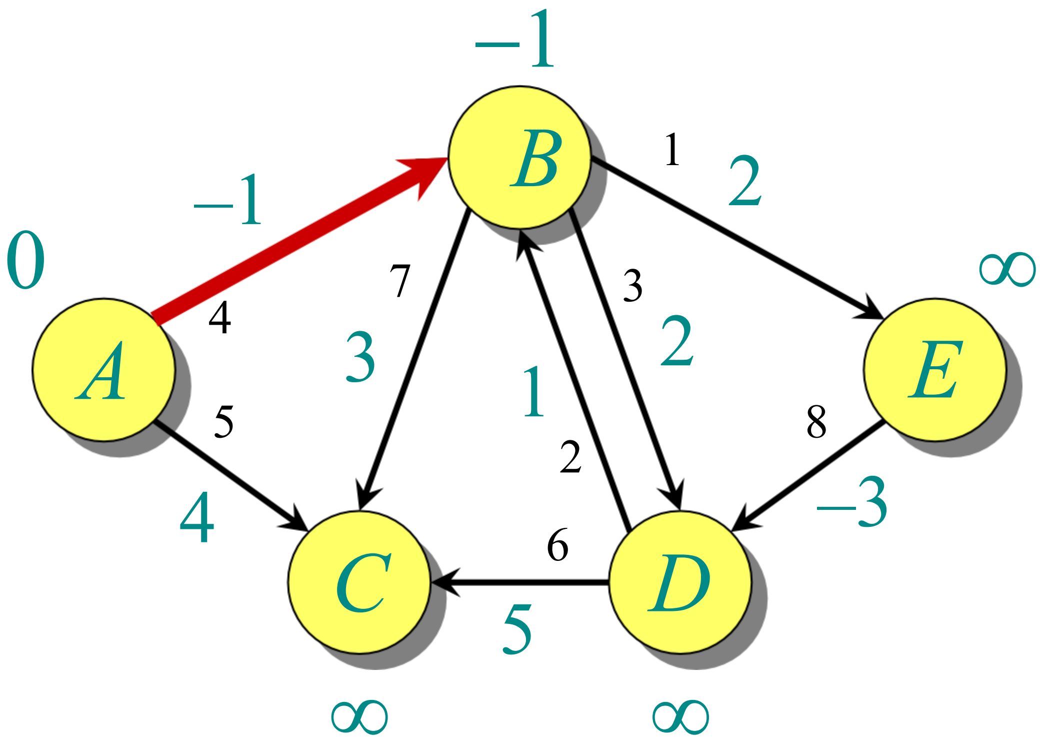
Παράδειγμα



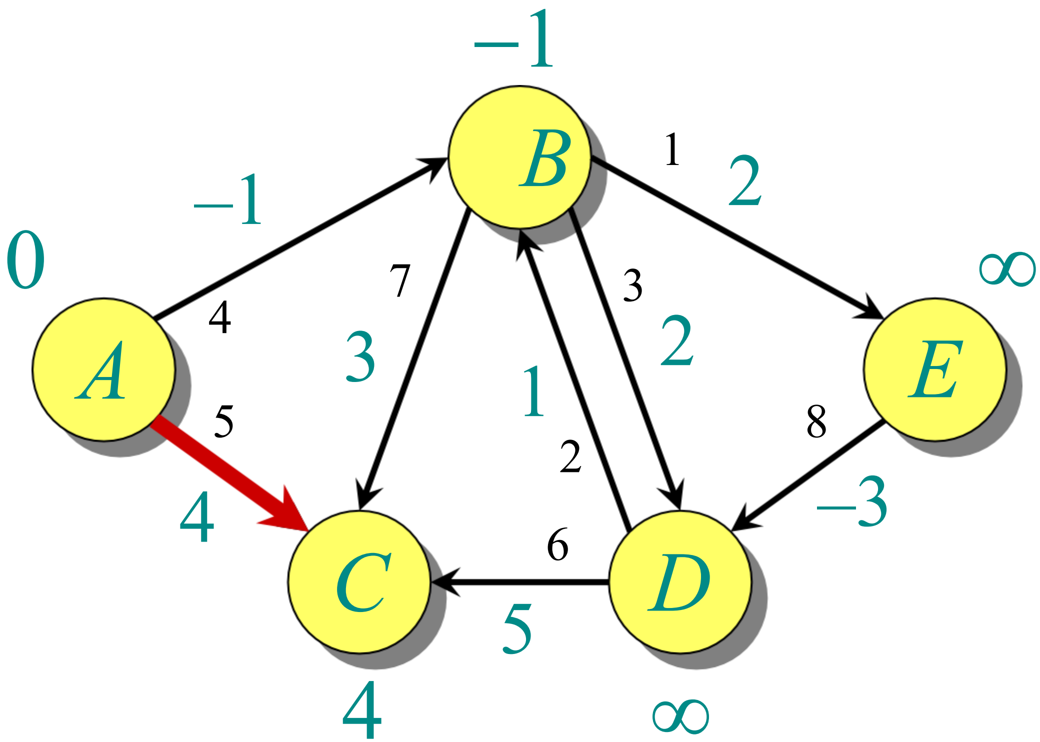
Example of Bellman-Ford



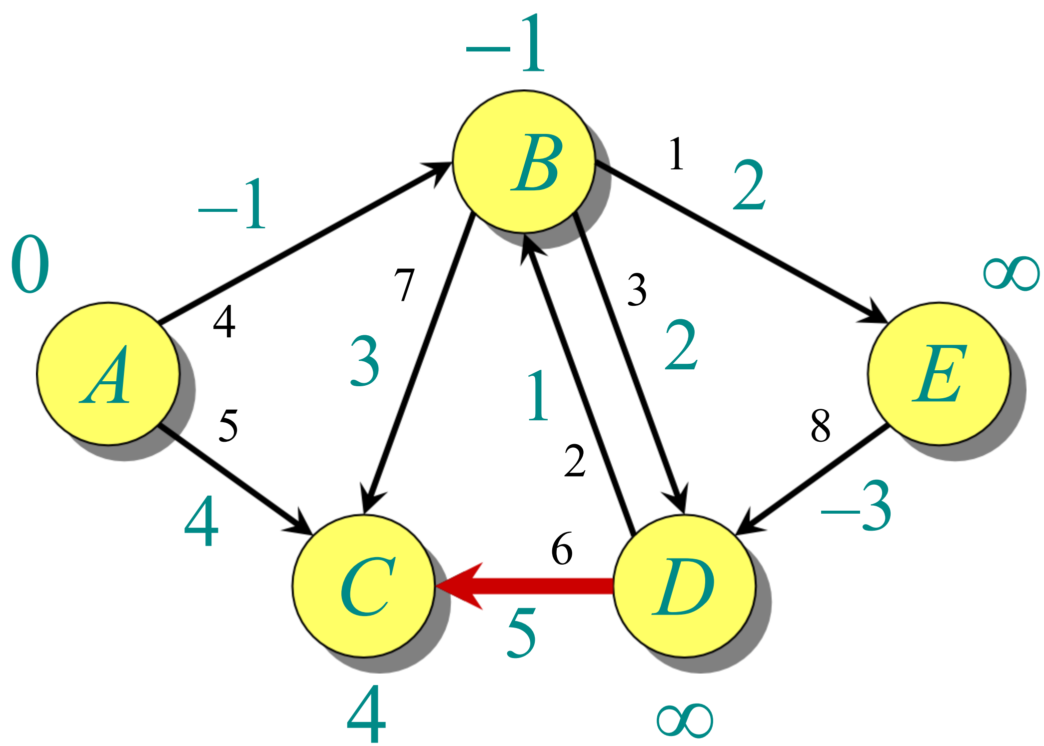
Παράδειγμα



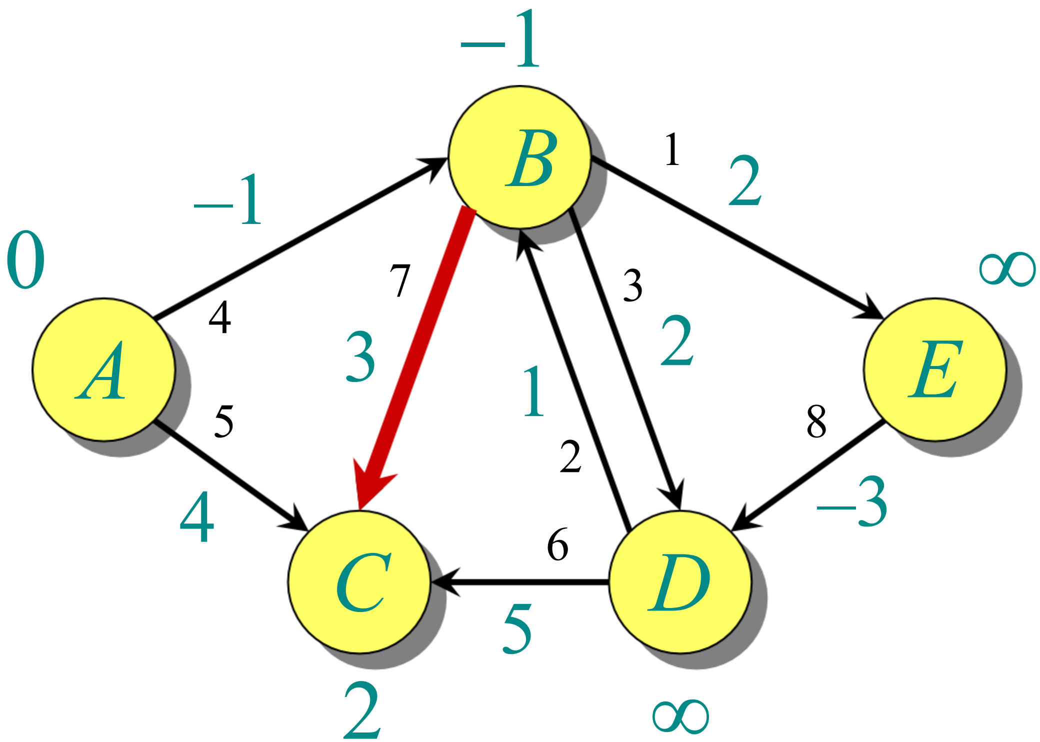
Παράδειγμα



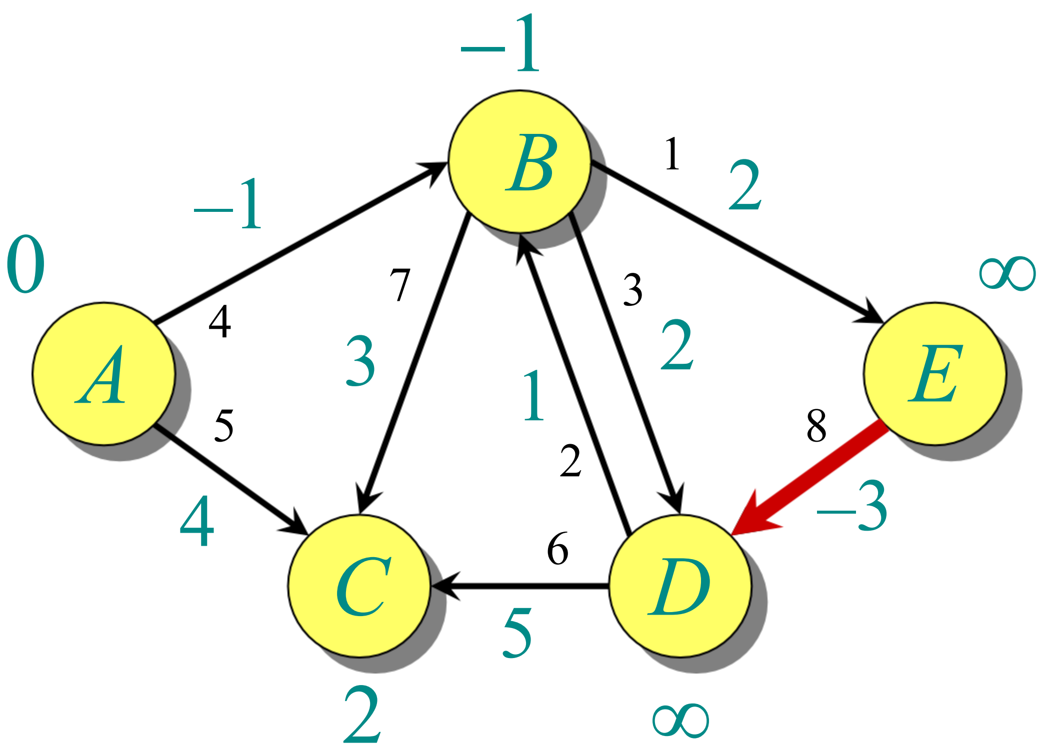
Παράδειγμα



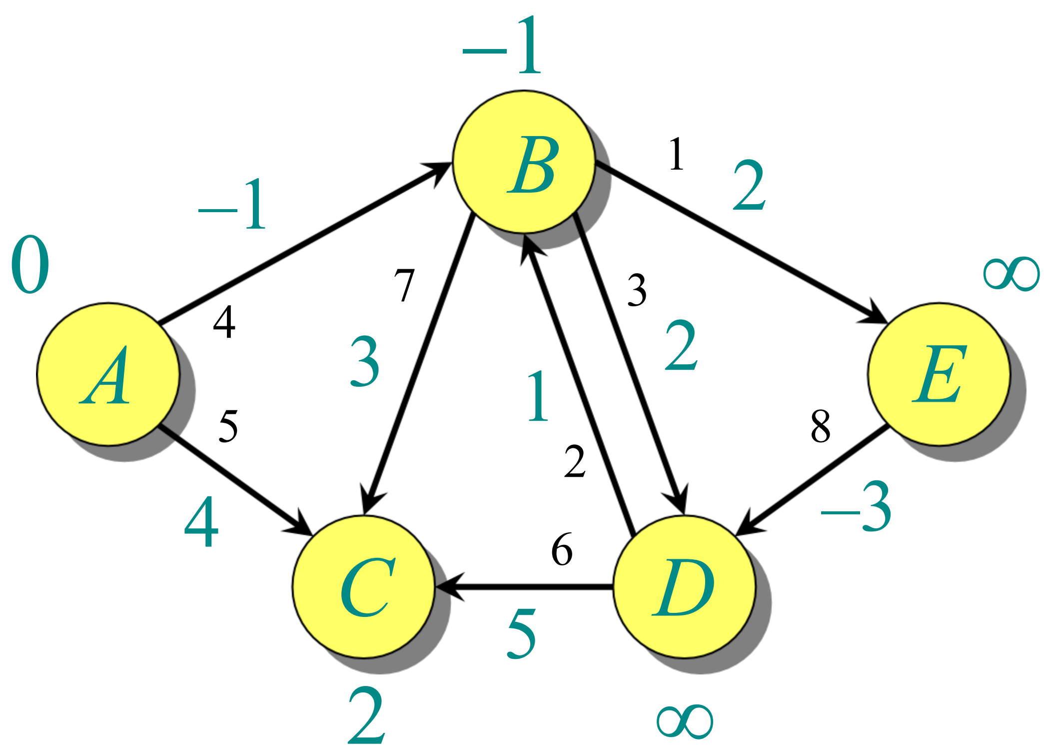
Παράδειγμα



Παράδειγμα

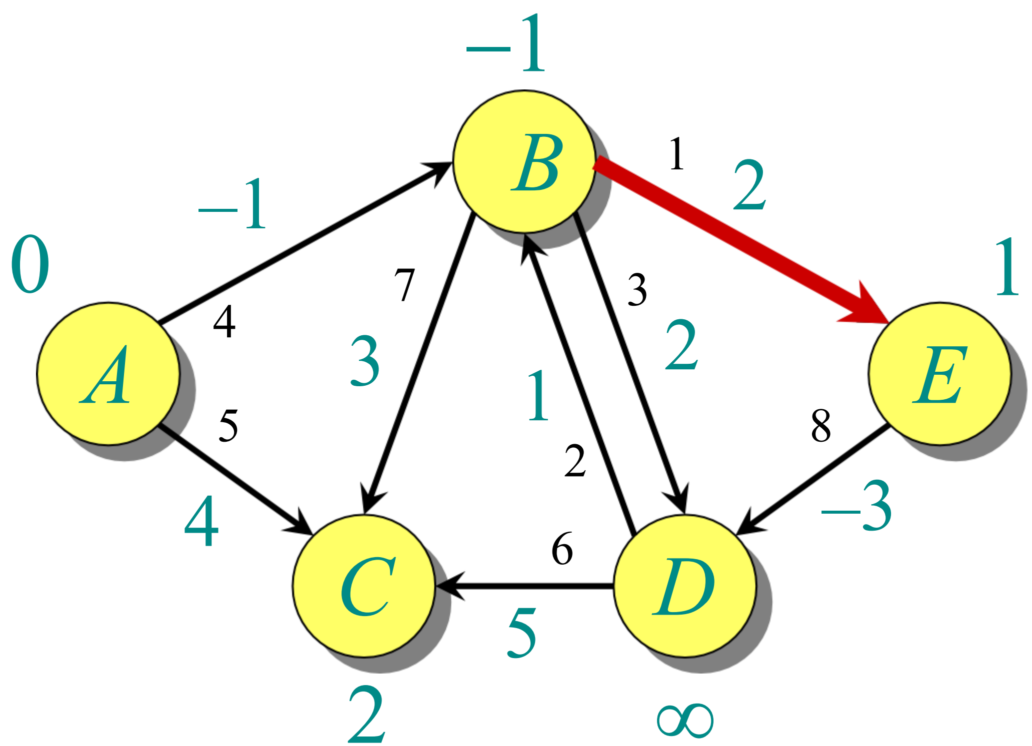


Παράδειγμα

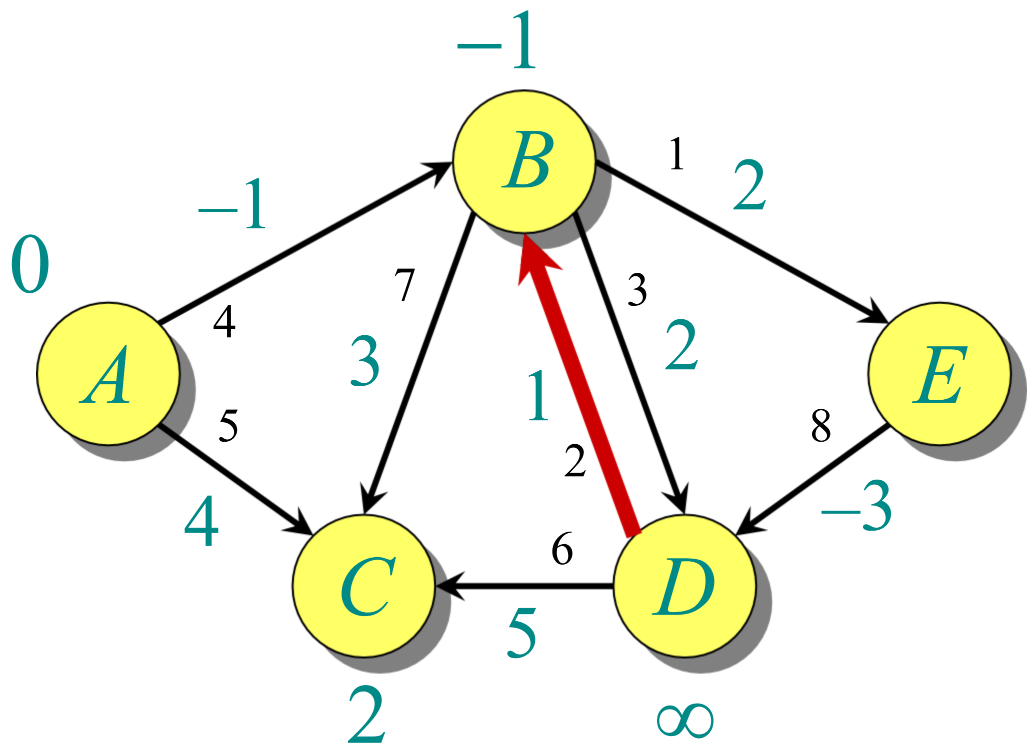


Τέλος του πρώτου περάσματος.

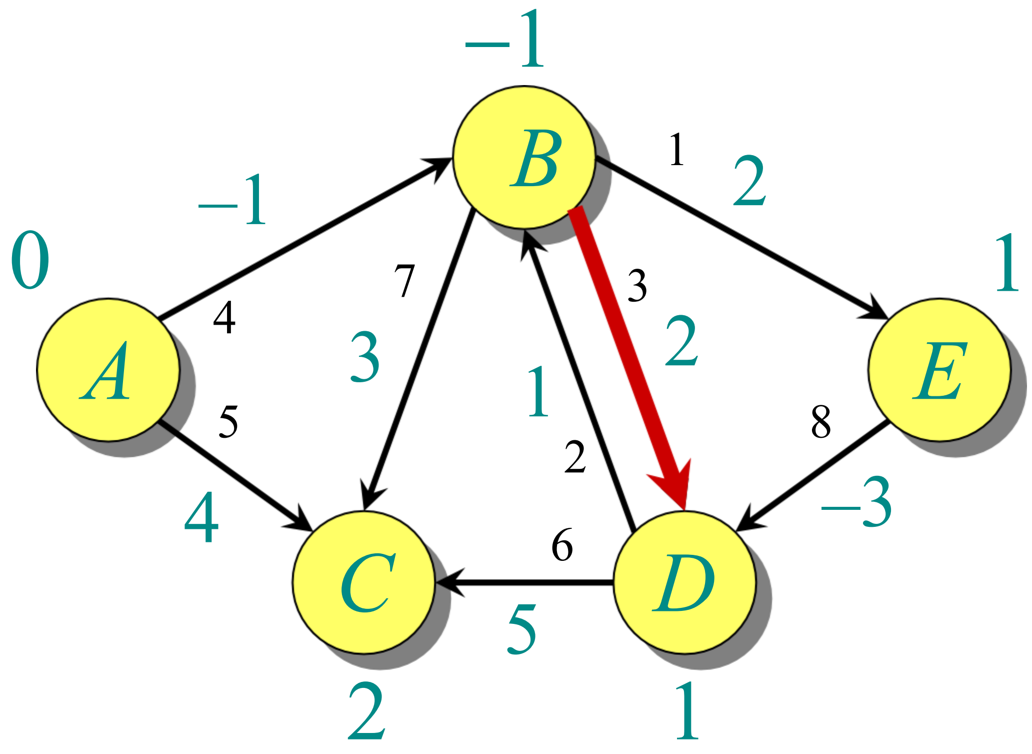
Παράδειγμα



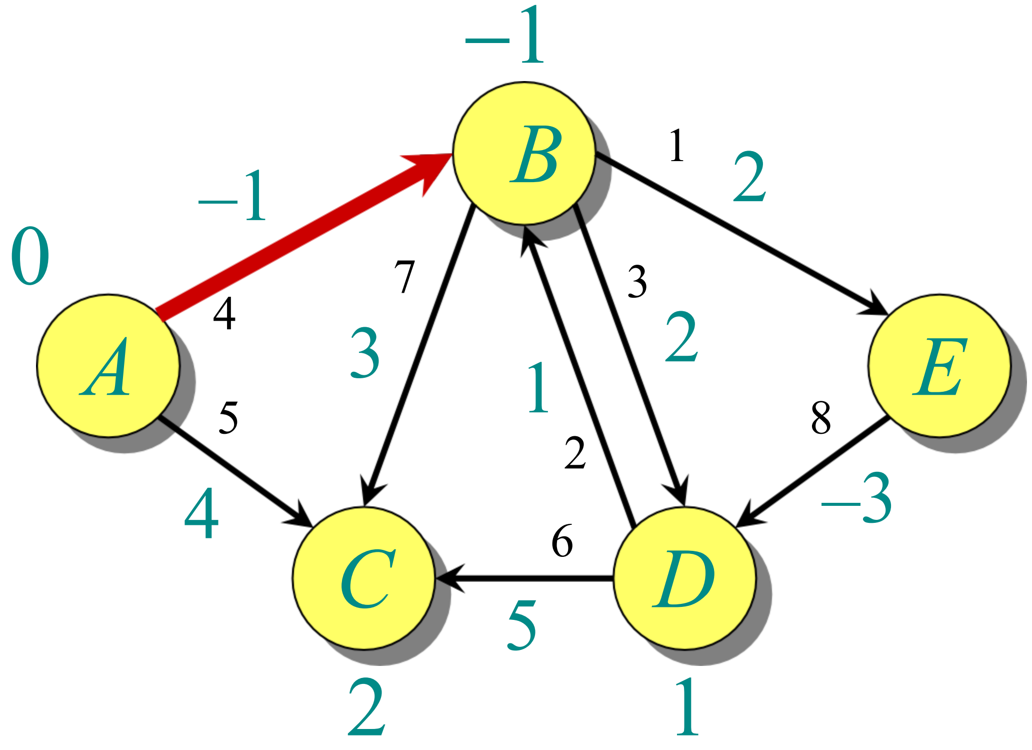
Παράδειγμα



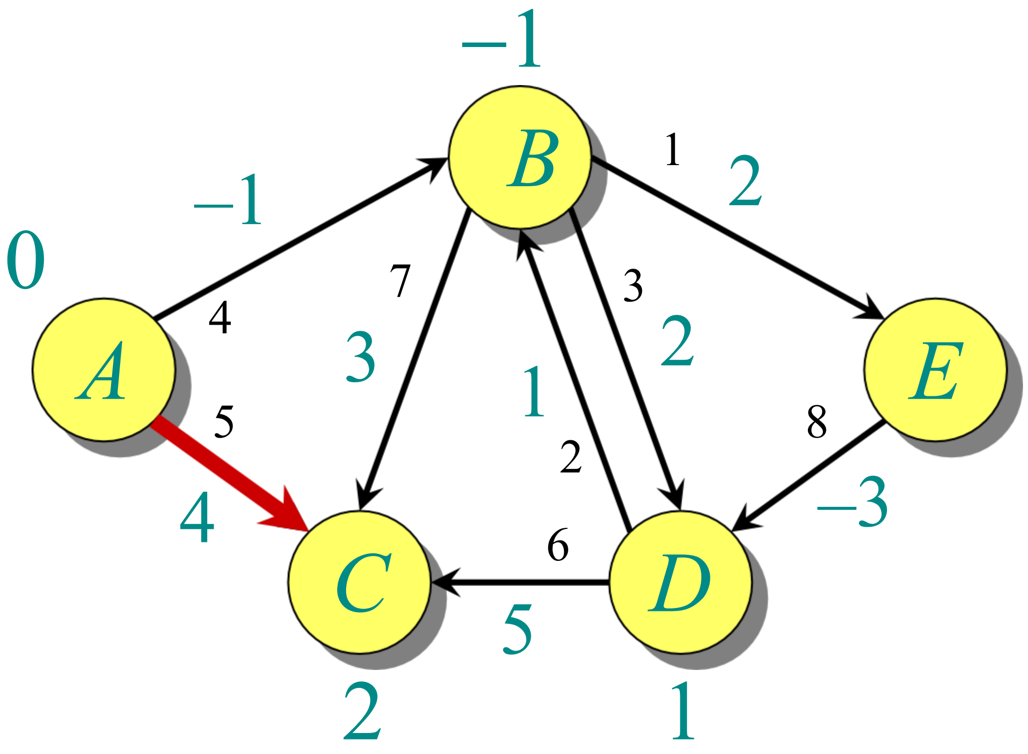
Παράδειγμα



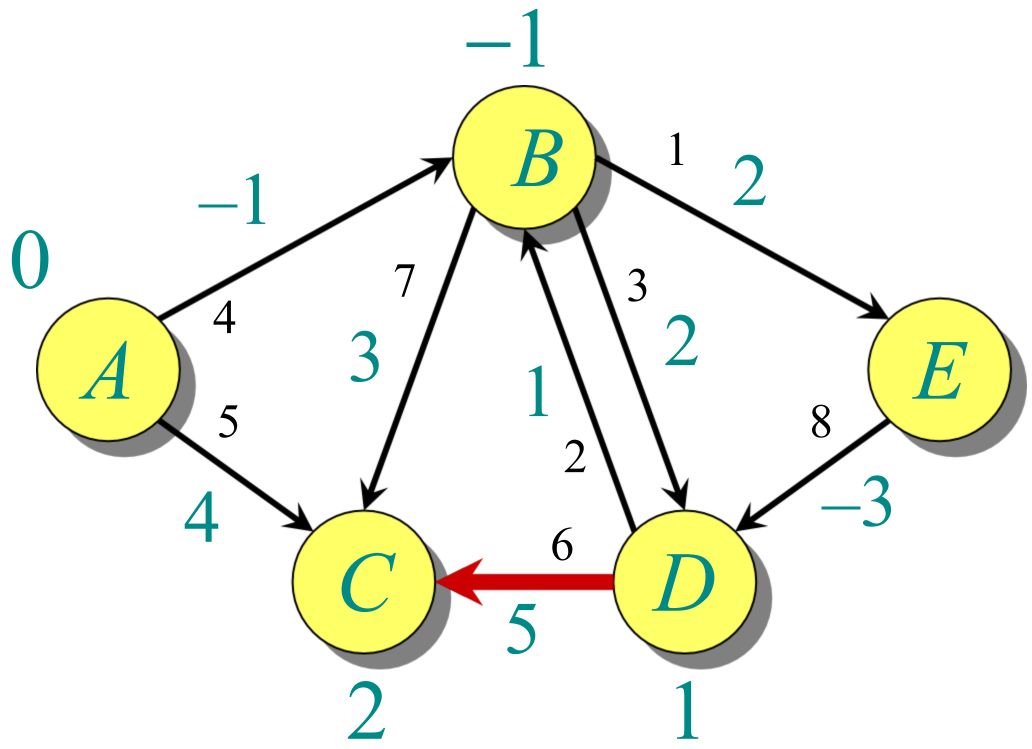
Παράδειγμα



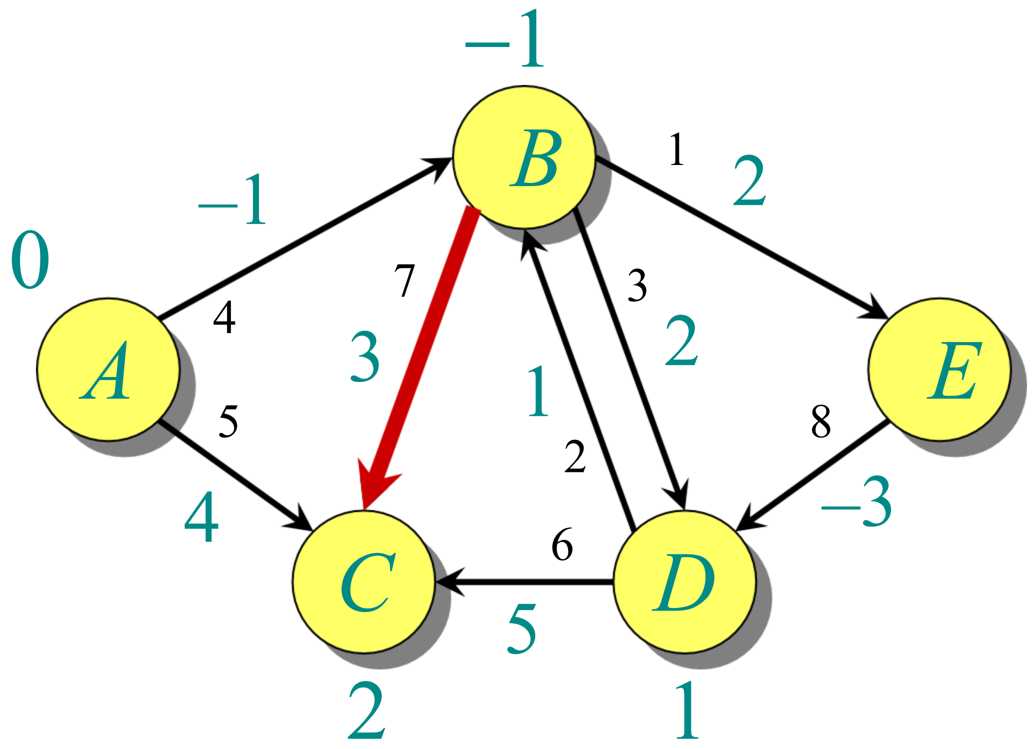
Παράδειγμα



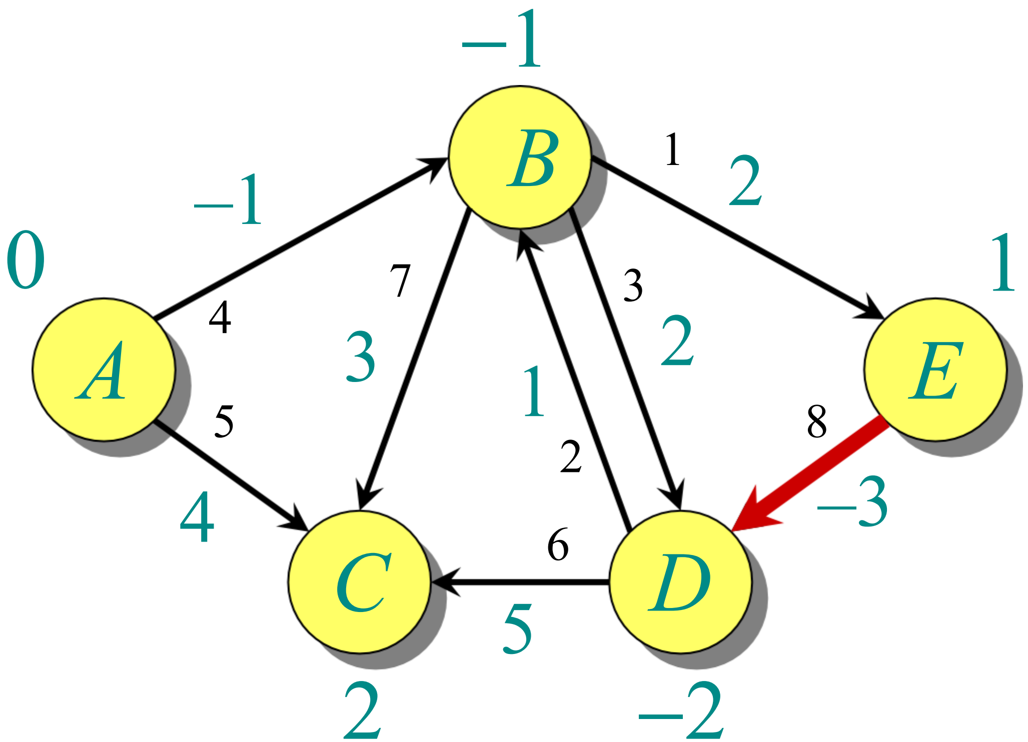
Παράδειγμα



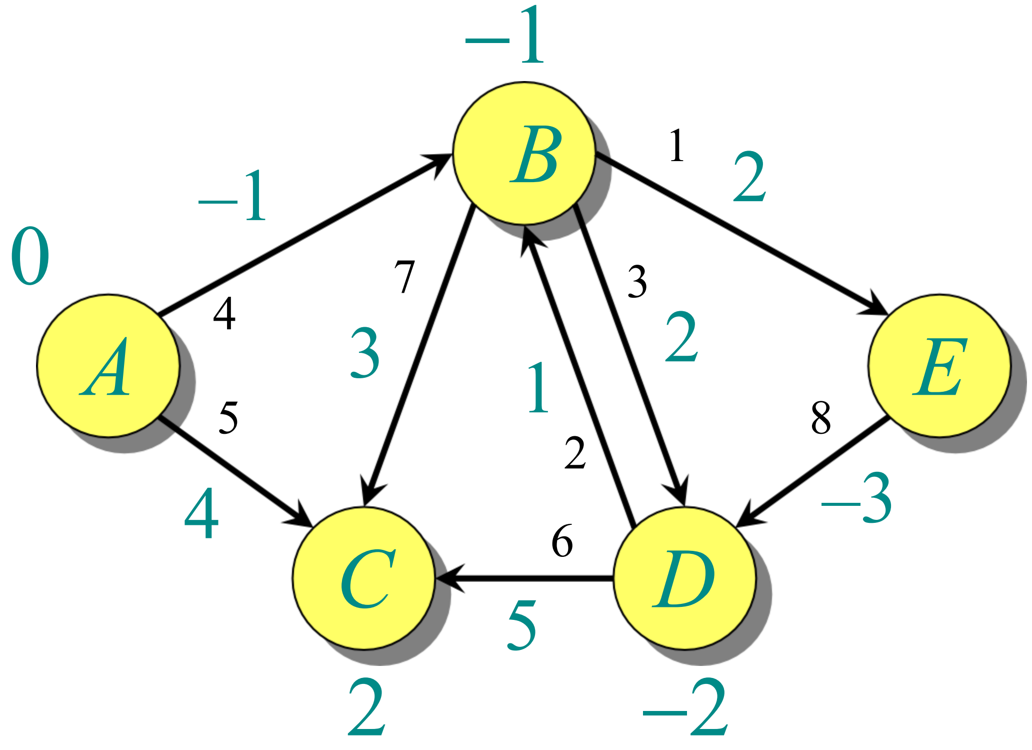
Παράδειγμα



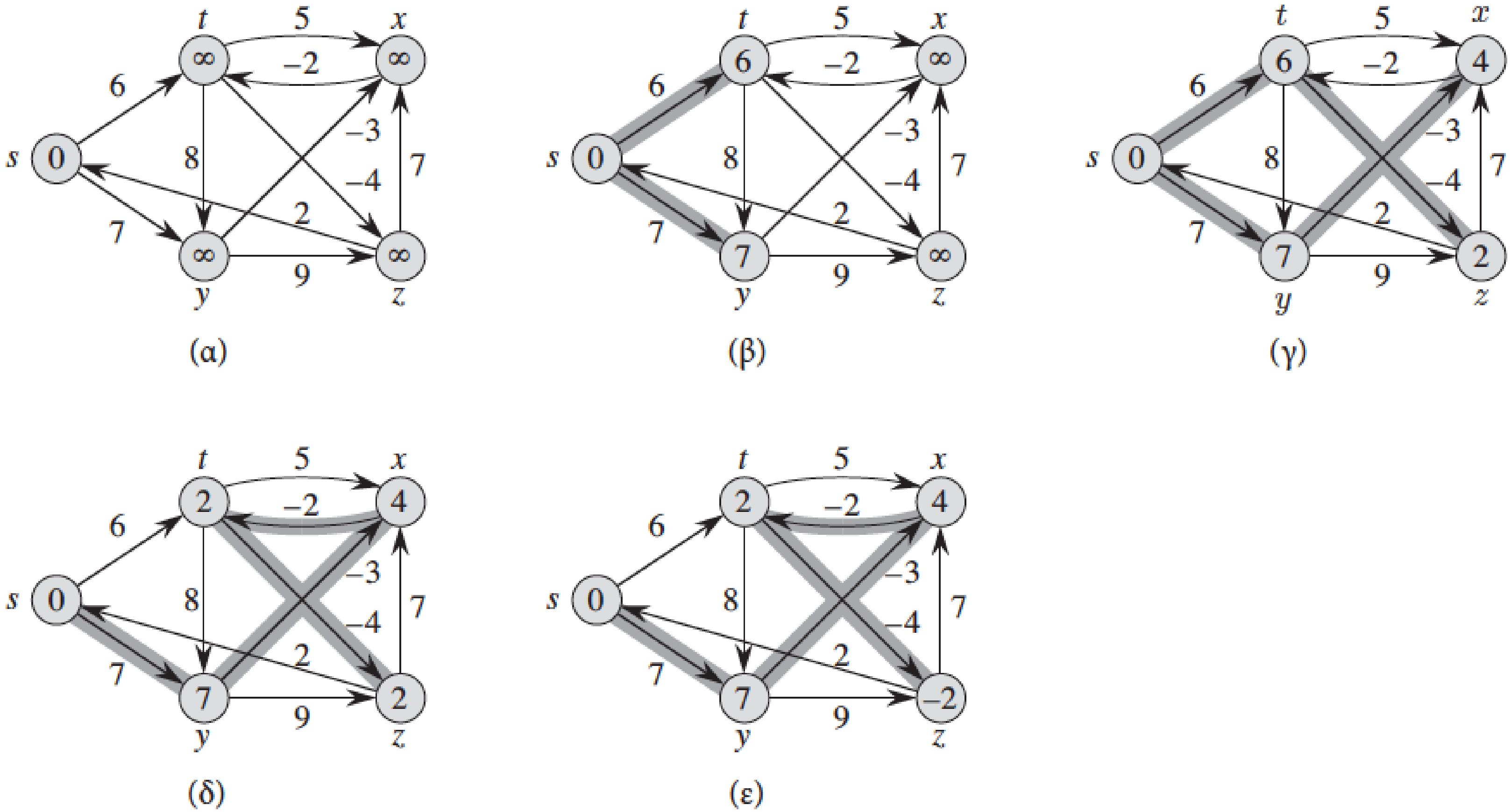
Παράδειγμα



Παράδειγμα



Τέλος του περάσματος 2 (και 3 και 4).



Σχήμα 24.4 Η λειτουργία του αλγορίθμου των Bellman-Ford. Ο αφετηριακός κόμβος είναι ο s. Εντός των κόμβων αναγράφονται οι τιμές των αντίστοιχων πεδίων d, ενώ οι σκιασμένες ακμές υποδεικνύουν τιμές του πεδίου προκατόχου: εάν η ακμή (u, v) είναι σκιασμένη, τότε $v.\pi = u$. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η σειρά με την οποία εκτελούνται οι πράξεις χαλάρωσης στις ακμές είναι $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$. (α) Η κατάσταση του γραφήματος αμέσως πριν από την πρώτη διέλευση των ακμών. (β)–(ε) Η κατάσταση του γραφήματος μετά από κάθε διαδοχική διέλευση των ακμών. Οι τιμές των πεδίων d και π στο σχήμα (ε) είναι οι τελικές. Στο παράδειγμα αυτό, ο αλγόριθμος των Bellman-Ford επιστρέφει ΑΛΗΘΕΣ.

Ορθότητα

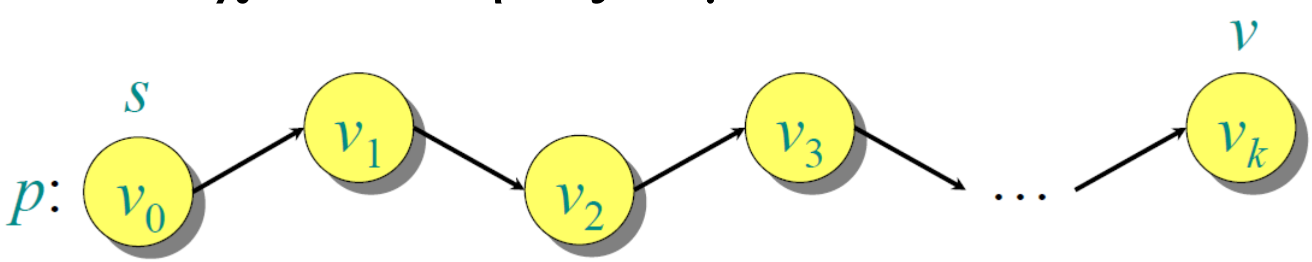
Θεώρημα. Αν $G = (V, E)$ δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους, τότε μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου Bellman-Ford, $d[v] = \delta(s, v)$ για όλα τα $v \in V$.

$\blacksquare$

Ορθότητα

Θεώρημα. Αν $G = (V, E)$ δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους, τότε μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου Bellman-Ford, $d[v] = \delta(s, v)$ για όλα τα $v \in V$.

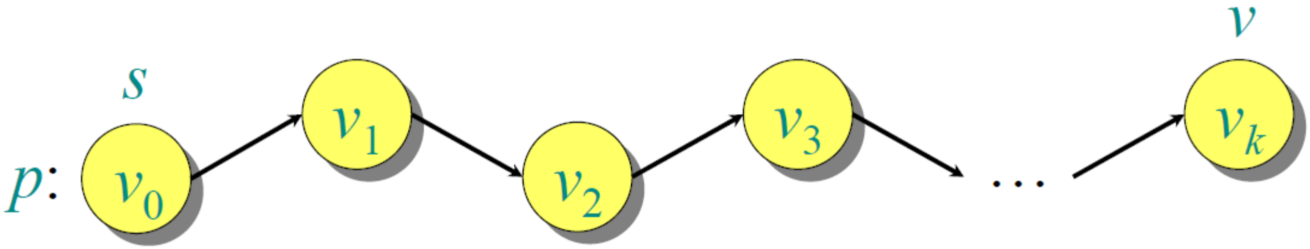
Απόδειξη. Έστω $v \in V$ μία οποιαδήποτε κορυφή, και θεωρήστε ένα συντομότερο μονοπάτι p από τη s στη v με το ελάχιστο πλήθος ακμών.



Αφού p είναι ένα συντομότερο μονοπάτι, έχουμε

$$\delta(s, v_i) = \delta(s, v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i) .$$

Ορθότητα (Συν.)



Αρχικά, $d[v_0] = 0 = \delta(s, v_0)$, και η $d[v_0]$ είναι αναλλοίωτη από επακόλουθες χαλαρώσεις (λόγω του ότι $d[v] \geq \delta(s, v)$).

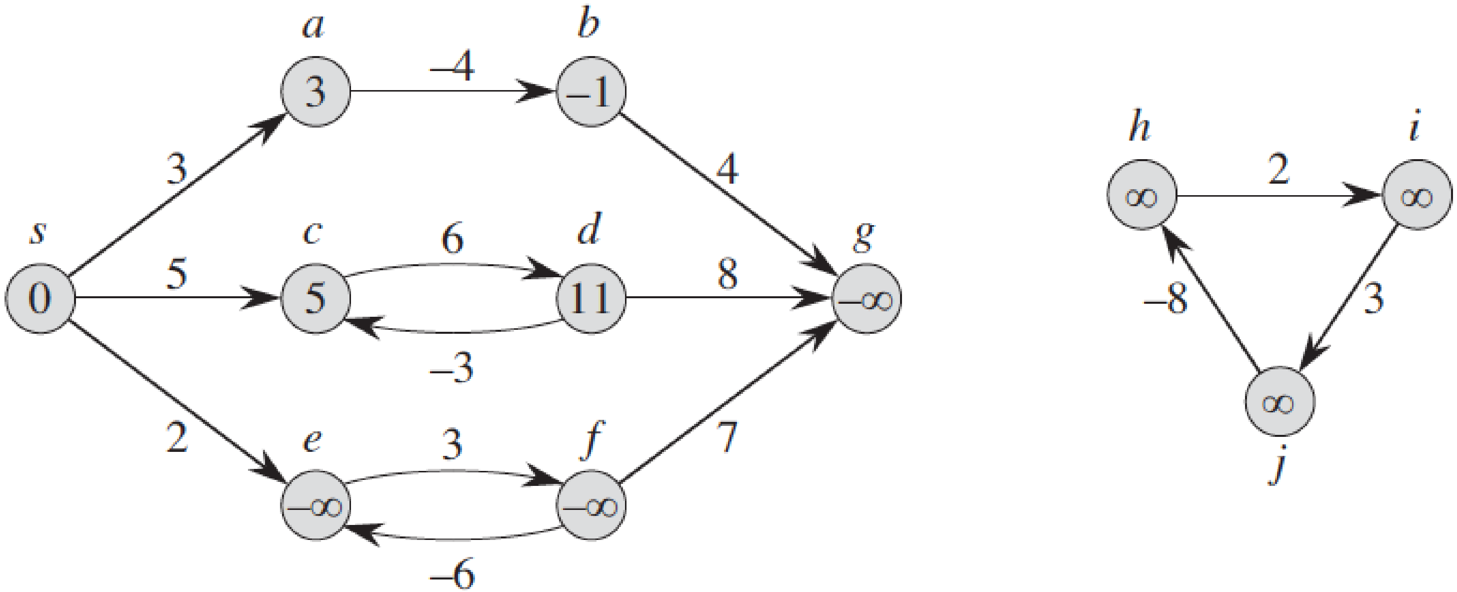
- Μετά το πέρασμα 1 με τη σάρωση όλων των ακμών, έχουμε $d[v_1] = \delta(s, v_1)$.
- Μετά το πέρασμα 2 με τη σάρωση όλων των ακμών, έχουμε $d[v_2] = \delta(s, v_2)$.

……

- Μετά από k περάσματα με τη σάρωση όλων των ακμών, έχουμε $d[v_k] = \delta(s, v_k)$.
- Αφού το G δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους, το p είναι απλό. Το μακρύτερο απλό μονοπάτι έχει $\leq |V| - 1$ ακμές.

Ανίχνευση κύκλου αρνητικού βάρους

Πόρισμα. Αν μία τιμή $d[v]$ αποτύχει να συγκλίνει μετά από $|V| - 1$ περάσματα, υπάρχει ένας κύκλος αρνητικού βάρους στο G προσπελάσιμος από τη s. ∎



Σχήμα 24.1 Κατευθυντό γράφημα με αρνητικά βάρη ακμών. Εντός του κάθε κόμβου αναγράφεται το αντίστοιχο βάρος συντομότατης διαδρομής από τον αφετηριακό κόμβο s. Επειδή οι κόμβοι e και f σχηματίζουν έναν κύκλο αρνητικού βάρους προσπελάσιμο από τον s, τα βάρη συντομότατης διαδρομής για αυτούς είναι $-\infty$. Επειδή ο κόμβος g είναι προσπελάσιμος από έναν κόμβο με βάρος συντομότατης διαδρομής $-\infty$, το βάρος συντομότατης διαδρομής του g είναι επίσης $-\infty$. Οι κόμβοι h, i, και j δεν είναι προσπελάσιμοι από τον s, και επομένως τα βάρη συντομότατης διαδρομής για αυτούς είναι ∞, παρ' όλο που ανήκουν σε έναν κύκλο αρνητικού βάρους.

Συντομότατες διαδρομές κοινής αφετηρίας σε κατευθυντά άκυκλα γραφήματα

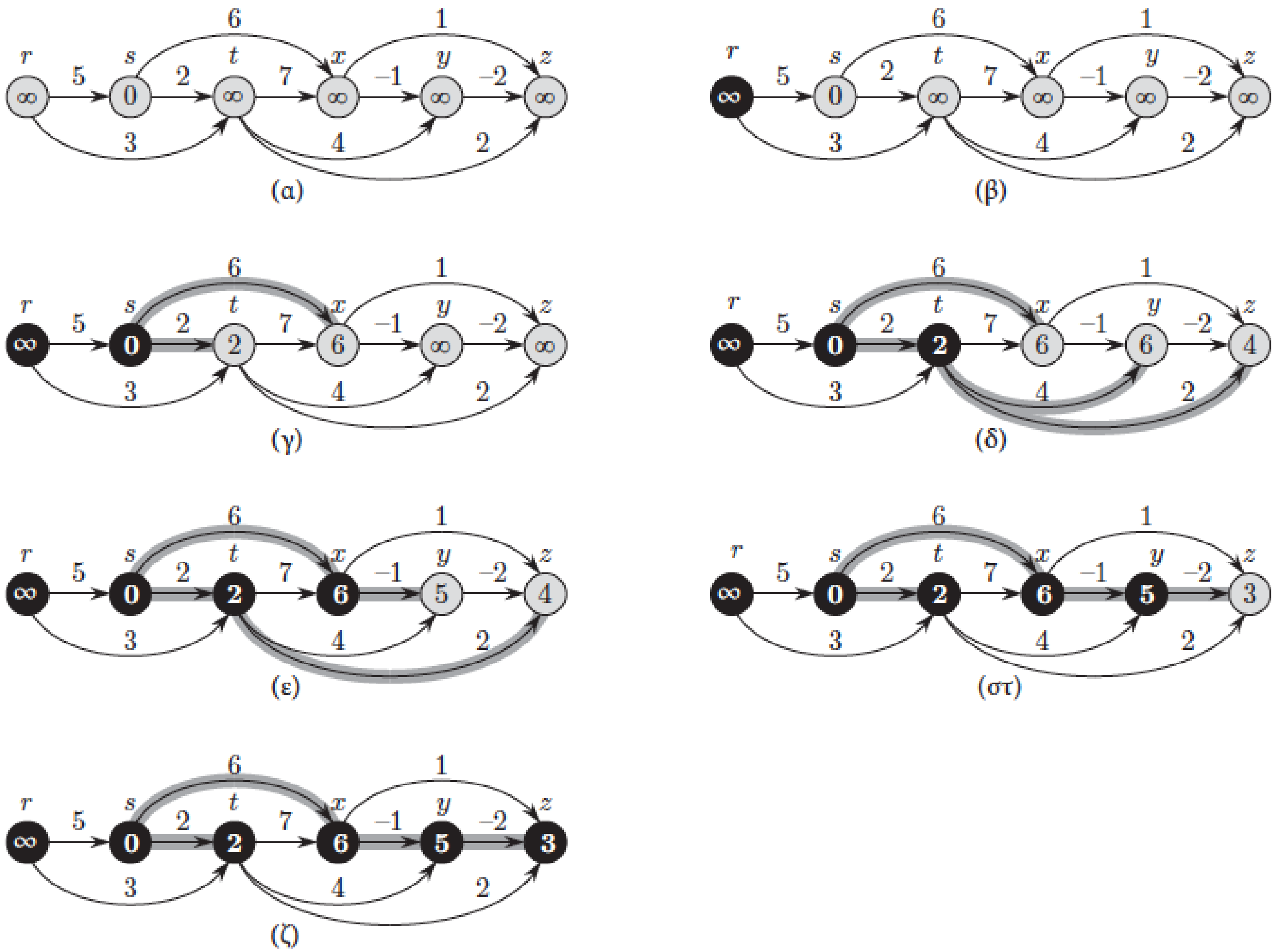
- Χαλάρωση των ακμών ενός εμβαρούς ΚΑΓ (κατευθυντού άκυκλου γραφήματος) $G = (V, E)$ κατά σειρά τοπολογικής διάταξης των κόμβων του:
  - υπολογισμός συντομότατων διαδρομών κοινής αφετηρίας σε χρόνο $\Theta(V + E)$.
- Σε ένα ΚΑΓ, οι συντομότατες διαδρομές είναι πάντοτε καλά ορισμένες:
  - ακόμη και αν υπάρχουν ακμές αρνητικού βάρους, είναι αδύνατον να υπάρχει κύκλος αρνητικού βάρους.

Συντομότατες διαδρομές κοινής αφετηρίας σε κατευθυντά άκυκλα γραφήματα

DAG-SHORTEST-PATHS(G, w, s)

```
1  topologically sort the vertices of G
2  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
3  for each vertex u, taken in topologically sorted order
4      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
5          RELAX(u, v, w)
```

Χρόνος εκτέλεσης: Θ(|V|+|E|)



Σχήμα 24.5 Η λειτουργία του αλγορίθμου συντομότατων διαδρομών σε ένα κατευθυντό άκυκλο γράφημα. Οι κόμβοι είναι διατεταγμένοι κατά σειρά τοπολογικής ταξινόμησης από αριστερά προς τα δεξιά. Ο αφετηριακός κόμβος είναι ο s. Εντός των κόμβων αναγράφονται οι τιμές των πεδίων d, ενώ οι σκιασμένες ακμές υποδεικνύουν τις τιμές των πεδίων π. **(α)** Η κατάσταση πριν από την πρώτη επανάληψη του βρόχου **για** στις γραμμές 3–5. **(β)–(ζ)** Η κατάσταση μετά από κάθε επανάληψη του βρόχου **για** στις γραμμές 3–5. Ο καινούργιος μαύρος κόμβος σε κάθε επανάληψη είναι ο αντίστοιχος κόμβος u της επανάληψης αυτής. Οι τιμές που αναγράφονται στο σχήμα (ζ) είναι οι τελικές.

Απόδειξη ορθότητας

Θεώρημα:

Εάν ένα εμβαρές, κατευθυντό γράφημα G = (V, E) έχει ως αφετηριακό κόμβο τον s και δεν εμπεριέχει κύκλους, τότε κατά τον τερματισμό της διαδικασίας , ισχύει ότι
v.d = δ(s, v) για όλους τους κόμβους, και ότι το υπογράφημα των προκατόχων αποτελεί δένδρο συντομότατων διαδρομών.

Απόδειξη:

- Θα δείξουμε ότι κατά τον τερματισμό ισχύει ότι $v.d = \delta(s, v)$ για όλους τους κόμβους.
- Εάν ο v δεν είναι προσπελάσιμος από τον s, τότε $v.d = \delta(s, v) = \infty$.
- Υποθέτουμε ότι ο v είναι προσπελάσιμος από τον s, οπότε υπάρχει κάποια συντομότατη διαδρομή $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$, όπου $v_0 = s$ και $v_k = v$.
- Οι κόμβοι διατρέχονται κατά σειρά τοπολογικής ταξινόμησης
- Οι πράξεις χαλάρωσης των ακμών της διαδρομής p ακολουθούν τη σειρά $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Έπεται ότι κατά τον τερματισμό $v_i.d = \delta(s, v_i)$ όπου $i = 0, 1, \ldots, k$.

Κρίσιμη διαδρομή σε PERT

- Εφαρμογή του αλγορίθμου στον προσδιορισμό κρίσιμων διαδρομών στην ανάλυση διαγραμμάτων PERT («program evaluation and review technique» (τεχνική αποτίμησης και ανα-σκόπησης προγράμματος)).
- Οι ακμές αντιπροσωπεύουν εργασίες προς εκτέλεση
- Τα βάρη αντιπροσωπεύουν τους χρόνους που απαιτούνται για την εκτέλεση των εργασιών αυτών.
- Η εργασία (u, v) θα πρέπει να εκτελεστεί πριν από την εργασία (v, x).
- Μια διαδρομή δια μέσου αυτού του ΚΑΓ: μια ακολουθία εργασιών που θα πρέπει να εκτελεστούν με κάποια συγκεκριμένη σειρά.
- Μια κρίσιμη διαδρομή είναι μια μακρύτατη διαδρομή δια μέσου του ΚΑΓ, η οποία αντιστοιχεί στον μέγιστο χρόνο που απαιτείται για να εκτελεστεί οποιαδήποτε ακολουθία εργασιών.

Αλγόριθμος προσδιορισμού κρίσιμης διαδρομής

Ο προσδιορισμός μιας τέτοιας διαδρομής μπορεί να γίνει με τους εξής δύο τρόπους:

- καθιστούμε τα βάρη των ακμών αρνητικά και στη συνέχεια εκτελούμε τον αλγόριθμο εύρεσης συντομότατων διαδρομών σε ΚΑΓ, ή
- εκτελούμε τον αλγόριθμο εύρεσης συντομότατων διαδρομών σε ΚΑΓ , αφού θέσουμε αρχικά τις εκτιμήσεις αποστάσεων σε -∞ και αντιστρέφοντας τις ανισότητες