

Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές του
ακόλουθου μαθήματος:

Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

<https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/>

Οι διαφάνειες του ανωτέρω μαθήματος
δίνονται υπό την άδεια «Creative Commons
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0»

Συντομότερα μονοπάτια

Συντομότερα μονοπάτια κοινής αφετηρίας

- Μη αρνητικά βάρη ακμών
 - Αλγόριθμος Dijkstra: $O(E + V \lg V)$
- Γενικός
 - Bellman-Ford algorithm: $O(VE)$
- DAG
 - Ένα πέρασμα του Bellman-Ford: $O(V + E)$

Shortest paths

Συντομότερα μονοπάτια κοινής αφετηρίας

- Μη αρνητικά βάρη ακμών
 - Αλγόριθμος Dijkstra: $O(E + V \lg V)$
- Γενικά βάρη
 - Bellman-Ford algorithm: $O(VE)$
- DAG ■
 - Ένα πέραςμα του Bellman-Ford: $O(V + E)$

Συντομότερα Μονοπάτια μεταξύ όλων των ζευγών κορυφών

- Μη αρνητικά βάρη
 - Ο αλγόριθμος Dijkstra $|V|$ φορές: $O(VE + V^2 \lg V)$
- Γενικά βάρη
 - Θα παρουσιαστούν τρεις αλγόριθμοι.

Συντομότερα μονοπάτια όλων των ζευγών κορυφών

Είσοδος: Διγράφημα $G = (V, E)$, όπου $V = \{1, 2, \dots, n\}$, με συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Έξοδος: $n \times n$ πίνακας μηκών συντομότερων μονοπατιών $\delta(i, j)$ για όλα τα $i, j \in V$.



ΙΔΕΑ:

- Τρέξε τον Bellman-Ford μία φορά από κάθε κορυφή.
- Χρόνος = $O(V^2E)$.
- Πυκνό γράφημα (n^2 ακμές) $\Rightarrow \Theta(n^4)$ χρόνος στη χειρότερη περίπτωση.

Δυναμικός Προγραμματισμός

Έστω ένας πίνακας γειτνίασης $n \times n$ $A = (a_{ij})$ ενός διγραφήματος. Ορίζουμε

$d_{ij}^{(m)}$ = το βάρος του συντομότερου μονοπατιού από το i στο j το οποίο χρησιμοποιεί το πολύ m ακμές.

Ισχυρισμός:

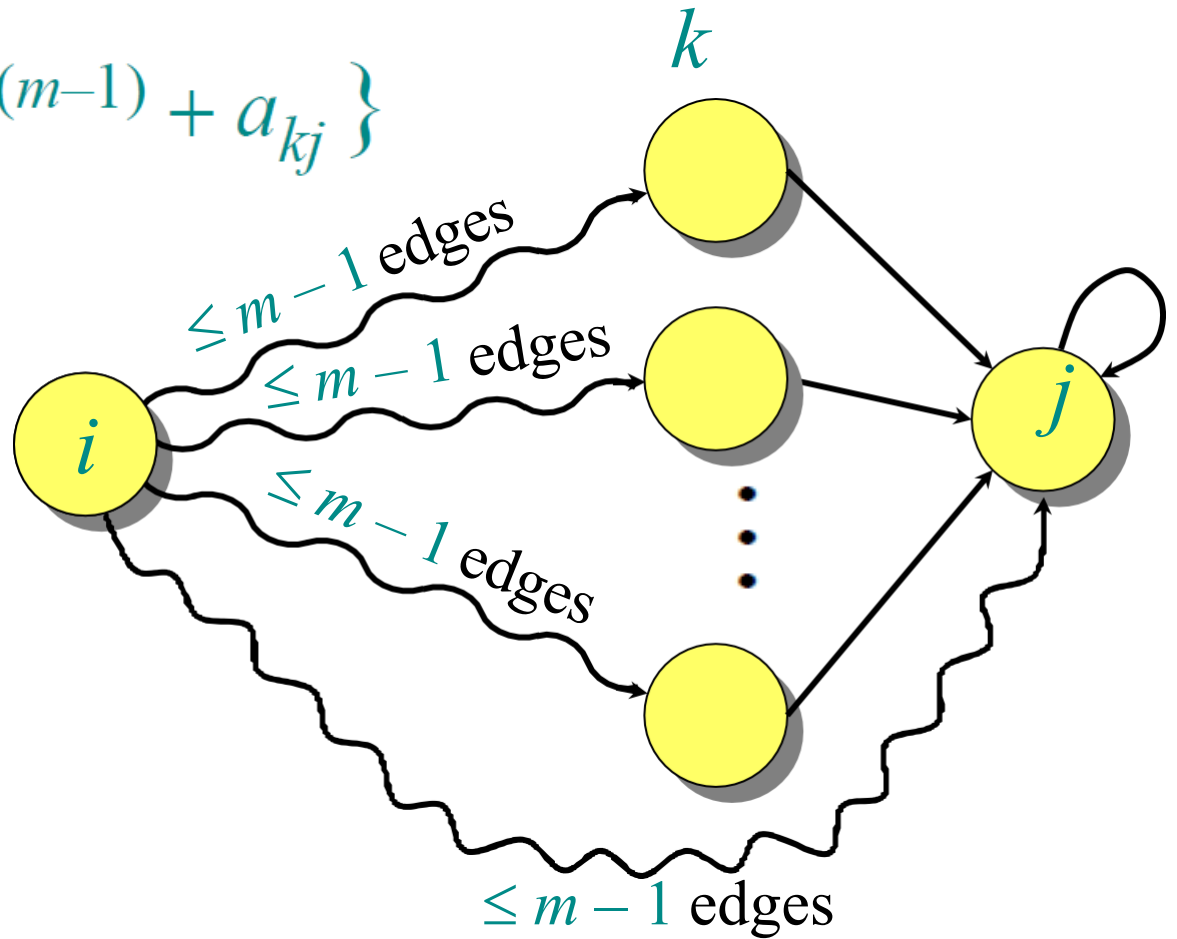
Έχουμε $d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j, \\ \infty & \text{if } i \neq j; \end{cases}$

και για $m = 1, 2, \dots, n - 1,$

$$d_{ij}^{(m)} = \min_k \{ d_{ik}^{(m-1)} + a_{kj} \}$$

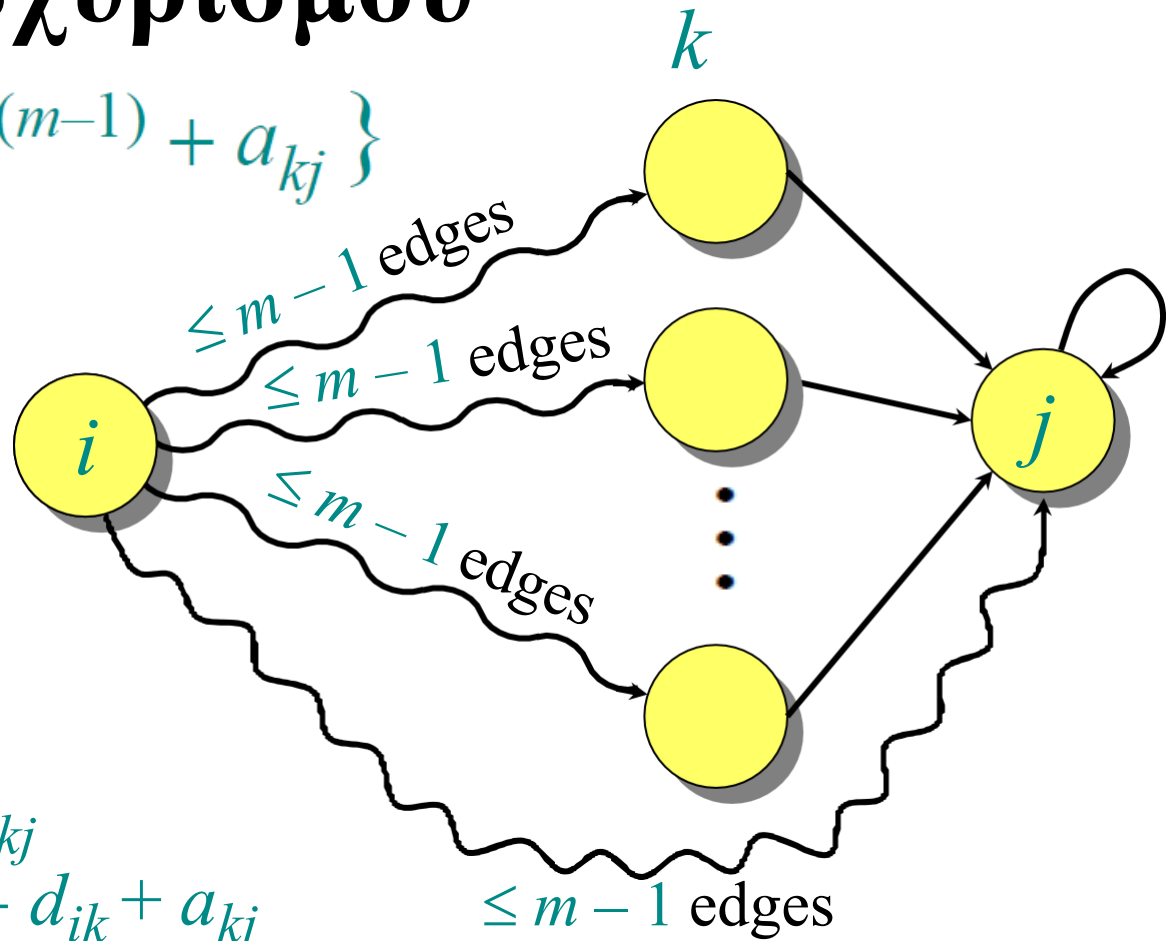
Απόδειξη του ισχυρισμού

$$d_{ij}^{(m)} = \min_k \{ d_{ik}^{(m-1)} + a_{kj} \}$$



Απόδειξη ισχυρισμού

$$d_{ij}^{(m)} = \min_k \{ d_{ik}^{(m-1)} + a_{kj} \}$$



Χαλάρωση!

for $k \leftarrow 1$ to n

do if $d_{ij} > d_{ik} + a_{kj}$

then $d_{ij} \leftarrow d_{ik} + a_{kj}$

Σημείωση: Η μη ύπαρξη αρνητικού βάρους κύκλων συνεπάγεται ότι: $\delta(i, j) = d_{ij}^{(n-1)} = d_{ij}^{(n)} = d_{ij}^{(n+1)} = \dots$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Υπολογίστε $C = A \cdot B$, όπου C , A , και B είναι $n \times n$ πίνακες:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Χρόνος = $\Theta(n^3)$ χρησιμοποιώντας τον γνωστό αλγόριθμο.

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Υπολογίστε $C = A \cdot B$, όπου C , A , και B είναι $n \times n$ πίνακες:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Χρόνος = $\Theta(n^3)$ χρησιμοποιώντας τον γνωστό αλγόριθμο.

Αν απεικονίσουμε “+” \rightarrow “min” και “.” \rightarrow “+”

$$c_{ij} = \min_k \{a_{ik} + b_{kj}\}.$$

Έτσι, $D^{(m)} = D^{(m-1)} \times A$. $\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = D^0 = (d_{ij}^{(0)})$
Μοναδιαίος πίνακας = I

Πολλαπλασιασμός Πινάκων (συν.)

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε

$$D^{(1)} = D^{(0)} \cdot A = A^1$$

$$D^{(2)} = D^{(1)} \cdot A = A^2$$

.....

$$D^{(n-1)} = D^{(n-2)} \cdot A = A^{n-1},$$

δίνοντας $D^{(n-1)} = (\delta(i, j))$.

Χρόνος = $\Theta(n \cdot n^3) = \Theta(n^4)$. Όχι καλύτερα από $n \times$ B-F.

Βελτιωμένος αλγόριθμος Πολλαπλασιασμού πινάκων

Επανελημμένος τετραγωνισμός:

$$A^{2k} = A^k \times A^k.$$

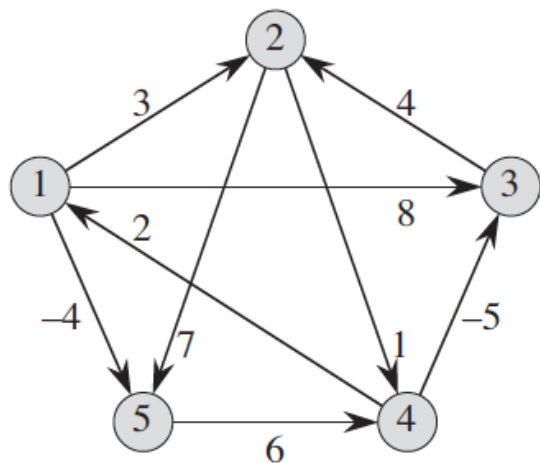
Υπολόγισε $A^2, A^4, \dots, A^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}}$

$O(\lg n)$ τετραγωνισμοί

Σημείωση: $A^{n-1} = A^n = A^{n+1} = \dots$

Χρόνος = $\Theta(n^3 \lg n)$.

Για την ανίχνευση κύκλων αρνητικού βάρους,
έλεγχος της διαγωνίου για αρνητικές τιμές σε $O(n)$
επιπλέον χρόνο.



$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & \infty & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

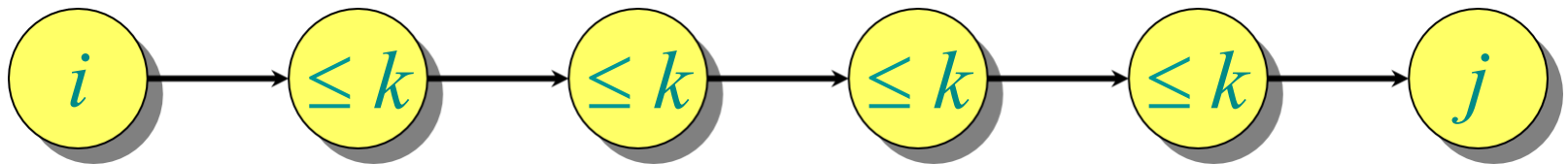
$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Σχήμα 25.1 Ένα κατευθυντό γράφημα και η ακολουθία των πινάκων $L^{(m)}$ που υπολογίζονται από τη διαδικασία ΒΡΑΔΕΙΕΣ ΣΥΝΤΟΜΟΤΑΤΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ. Όπως μπορείτε να επαληθεύσετε, ο πίνακας $L^{(5)}$, που ορίζεται ως $L^{(4)} \cdot W$, ισούται με $L^{(4)}$, και επομένως για όλα τα $m \geq 4$ έχουμε $L^{(m)} = L^{(4)}$.

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

*Επίσης Δυναμικός Προγραμματισμός,
αλλά ταχύτερος!*

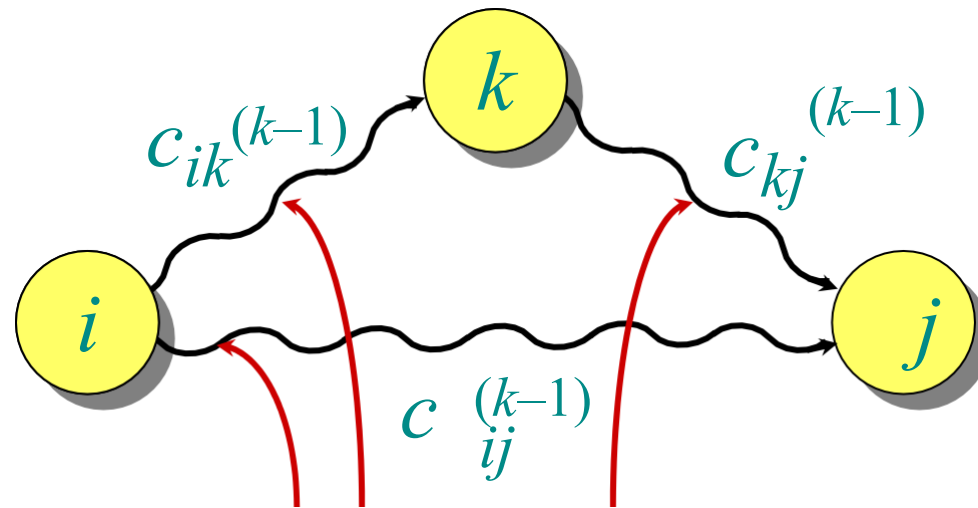
$c_{ij}^{(k)}$ = το βάρος του συντομότερου μονοπατιού από το i στο j με ενδιάμεσες κορυφές από το σύνολο $\{1, 2, \dots, k\}$.



Έτσι, $\delta(i, j) = c_{ij}^{(n)}$. Επίσης, $c_{ij}^{(0)} = a_{ij}$.

Αναδρομή του Floyd-Warshall

$$c_{ij}^{(k)} = \min_k \{c_{ij}^{(k-1)}, c_{ik}^{(k-1)} + c_{kj}^{(k-1)}\}$$



Ενδιάμεσες κορυφές στο $\{1, 2, \dots, k\}$

Ψευδοκώδικας για Floyd-Warshall

```
for  $k \leftarrow 1$  to  $n$ 
  do for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
    do for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ 
      do if  $c_{ij} > c_{ik} + c_{kj}$ 
        then  $c_{ij} \leftarrow c_{ik} + c_{kj}$  } χαλάρωση
```

Σημειώσεις:

- Τρέχει σε $\Theta(n^3)$ χρόνο.
- Μπορεί να προγραμματιστεί εύκολα.
- Αποδοτικός στην πράξη.

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \text{KENO} & 1 & 1 & \text{KENO} & 1 \\ \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} & 2 & 2 \\ \text{KENO} & 3 & \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} \\ 4 & \text{KENO} & 4 & \text{KENO} & \text{KENO} \\ \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} & 5 & \text{KENO} \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} \text{KENO} & 1 & 1 & \text{KENO} & 1 \\ \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} & 2 & 2 \\ \text{KENO} & 3 & \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} \\ 4 & 1 & 4 & \text{KENO} & 1 \\ \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} & 5 & \text{KENO} \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} \text{KENO} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} & 2 & 2 \\ \text{KENO} & 3 & \text{KENO} & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & \text{KENO} & 1 \\ \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} & 5 & \text{KENO} \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} \text{KENO} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} & 2 & 2 \\ \text{KENO} & 3 & \text{KENO} & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & \text{KENO} & 1 \\ \text{KENO} & \text{KENO} & \text{KENO} & 5 & \text{KENO} \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} \text{KENO} & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & \text{KENO} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{KENO} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{KENO} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{KENO} \end{pmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} \text{KENO} & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & \text{KENO} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{KENO} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{KENO} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{KENO} \end{pmatrix}$$

Σχήμα 25.4 Η ακολουθία των πινάκων $D^{(k)}$ και $\Pi^{(k)}$ οι οποίοι υπολογίζονται μέσω του αλγορίθμου των Floyd-Warshall για το γράφημα του Σχήματος 25.1.

Μεταβατική κλειστότητα ενός κατευθυντού γραφήματος

Υπολόγισε $t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Αν υπάρχει ένα μονοπάτι από το } i \text{ στο } j, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Ιδέα: Χρησιμοποίησε Floyd-Warshall, αλλά με (\vee, \wedge) αντί $(\min, +)$: ■

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}).$$

Χρόνος = $\Theta(n^3)$.

Αναστάθμιση Γραφήματος

Θεώρημα. Δίνεται μία συνάρτηση $h : V \rightarrow \mathbb{R}$, **αναστάθμιση** κάθε ακμή $(u, v) \in E$ με $w_h(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$.

Τότε, για οποιεσδήποτε δύο κορυφές, όλα τα μονοπάτια μεταξύ αυτών αντισταθμίζονται κατά την ίδια ποσότητα.

Απόδειξη. Έστω $p = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$ ένα μονοπάτι στο G . Έχουμε

$$\begin{aligned} w_h(p) &= \sum_{i=1}^{k-1} w_h(v_i, v_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} (w(v_i, v_{i+1}) + h(v_i) - h(v_{i+1})) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) + h(v_1) - h(v_k) \\ &= w(p) + h(v_1) - h(v_k). \end{aligned}$$

← ίδια ποσότητα

Συντομότερα μονοπάτια σε ανασταθμισμένα γραφήματα

Πόρισμα. $\delta_h(u, v) = \delta(u, v) + h(u) - h(v)$. □

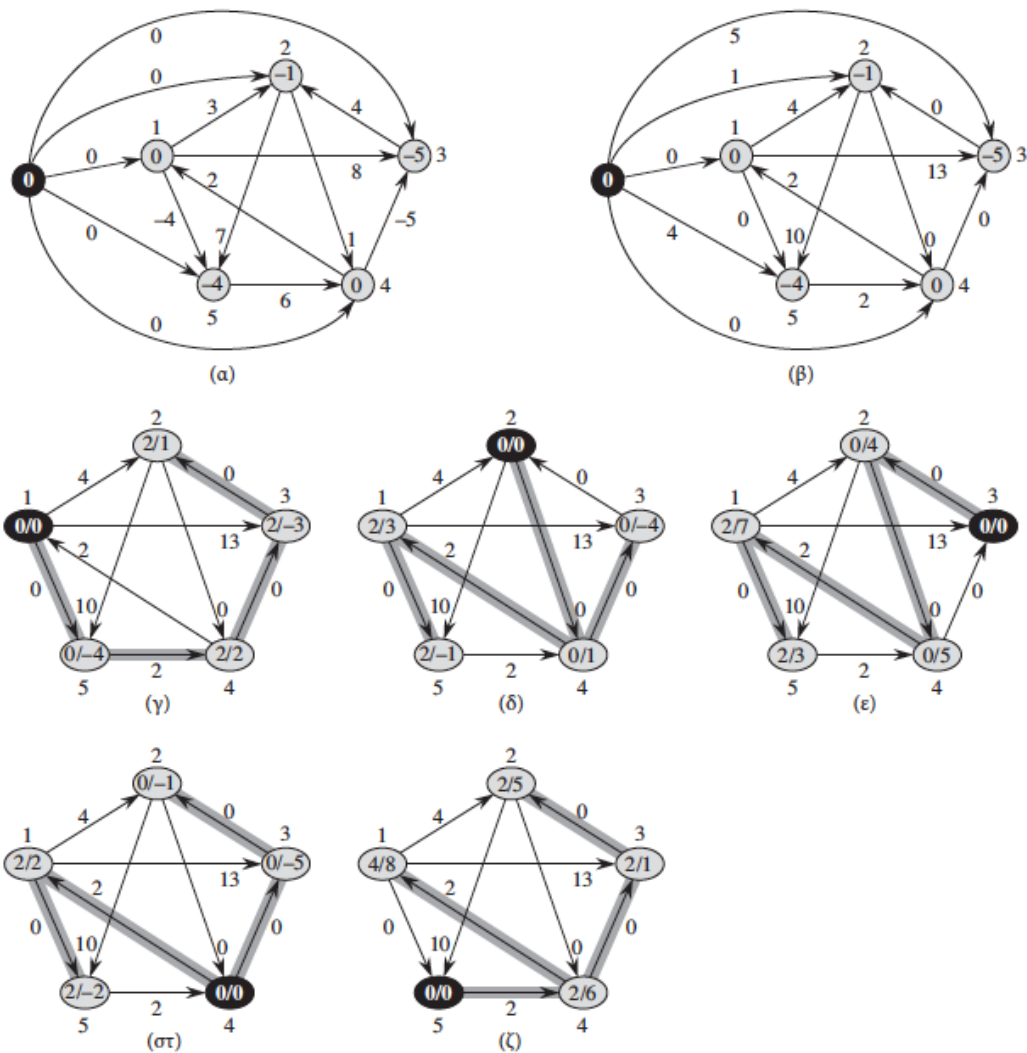
Ιδέα: Βρες μία συνάρτηση $h : V \rightarrow \mathbb{R}$
τέτοια ώστε $w_h(u, v) \geq 0$ για κάθε $(u, v) \in E$.
Τότε, τρέξε τον αλγόριθμο του Dijkstra από
κάθε κορυφή του ανασταθμισμένου
γραφήματος.

Σημείωση: $w_h(u, v) \geq 0$ iff $h(v) - h(u) \leq w(u, v)$.

Αλγόριθμος του Johnson

JOHNSON(G, w)

- 1 compute G' , where $G'.V = G.V \cup \{s\}$,
 $G'.E = G.E \cup \{(s, v) : v \in G.V\}$, and
 $w(s, v) = 0$ for all $v \in G.V$
- 2 if BELLMAN-FORD(G', w, s) == FALSE
- 3 print “the input graph contains a negative-weight cycle”
- 4 else for each vertex $v \in G'.V$
- 5 set $h(v)$ to the value of $\delta(s, v)$
 computed by the Bellman-Ford algorithm
- 6 for each edge $(u, v) \in G'.E$
- 7 $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$
- 8 let $D = (d_{uv})$ be a new $n \times n$ matrix
- 9 for each vertex $u \in G.V$
- 10 run DIJKSTRA(G, \hat{w}, u) to compute $\hat{\delta}(u, v)$ for all $v \in G.V$
- 11 for each vertex $v \in G.V$
- 12 $d_{uv} = \hat{\delta}(u, v) + h(v) - h(u)$
- 13 return D



Σχήμα 25.6 Η εκτέλεση του αλγορίθμου συντομότατων διαδρομών πλήρους σύζευξης του Johnson για το γράφημα του Σχήματος 25.1. Οι αριθμοί των κόμβων αναγράφονται έξω από τους κόμβους. (α) Το γράφημα G' με την αρχική συνάρτηση βάρους w . Ο νέος κόμβος s απεικονίζεται με μαύρο χρώμα. Εντός κάθε κόμβου v αναγράφεται η ποσότητα $h(v) = \delta(s, v)$. (β) Μετά την αναστάθμιση της κάθε ακμής (u, v) με συνάρτηση βάρους την $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$. (γ)–(ζ) Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του αλγορίθμου του Dijkstra για κάθε κόμβο του G υπό τη συνάρτηση βάρους \hat{w} . Σε καθένα από τα σχήματα, ο αφετηριακός κόμβος u απεικονίζεται με μαύρο χρώμα, ενώ οι σκιασμένες ακμές είναι εκείνες που ανήκουν στο δένδρο συντομότατων διαδρομών το οποίο υπολογίζει ο αλγόριθμος. Εντός κάθε κόμβου v αναγράφονται οι τιμές $\hat{\delta}(u, v)$ και $\delta(u, v)$, χωριζόμενες μεταξύ τους με μια κάθετο. Η τιμή $d_{uv} = \delta(u, v)$ ισούται με $\hat{\delta}(u, v) + h(v) - h(u)$.