Οι διαφάνειες βασίζονται σε αυτές του ακόλουθου μαθήματος:

Introduction to Algorithms (6-046J), MIT

https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-046j-introduction-to-algorithms-sma-5503-fall-2005/

Ελάχιστα Γεννητικά Δένδρα

Είσοδος: Ένα συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathsf{R}$.

- Για απλότητα, υποθέτουμε ότι όλα τα βάρη των ακμών είναι διαφορετικά.

Ελάχιστα Γεννητικά Δένδρα

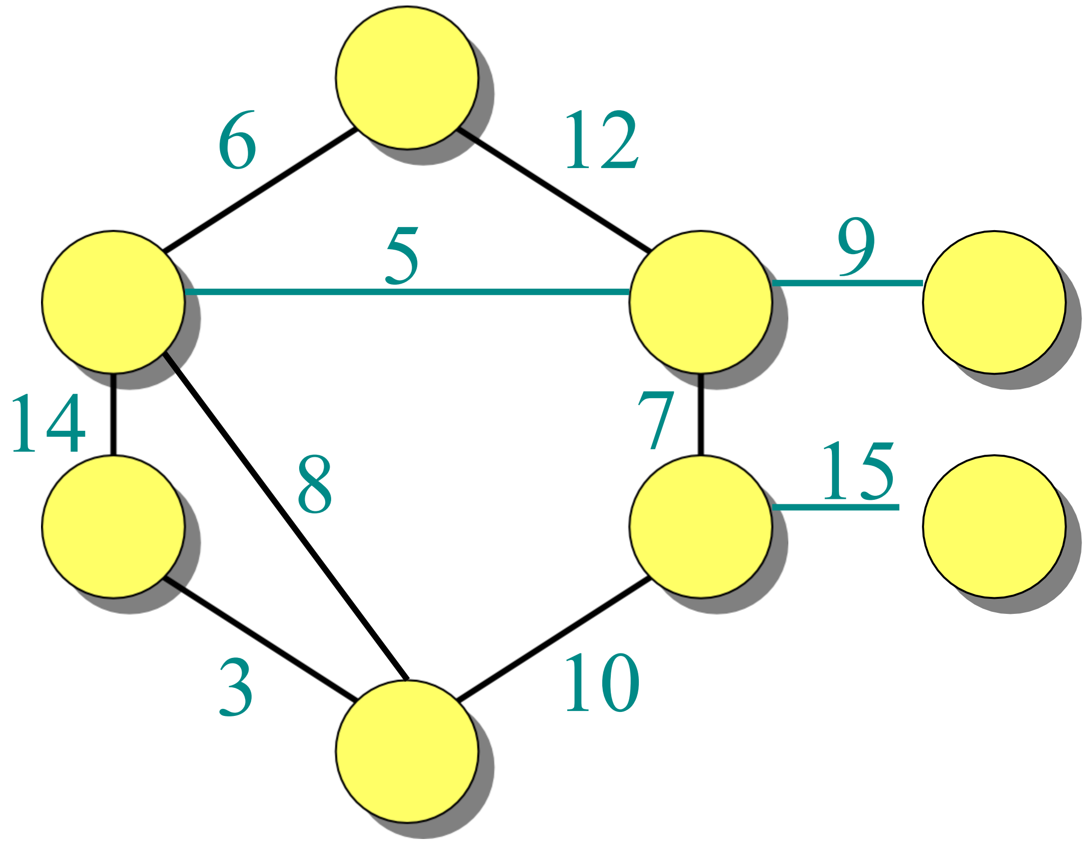
Είσοδος: Ένα συνεκτικό, μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{R}$.

- Για απλότητα, υποθέτουμε ότι όλα τα βάρη των ακμών είναι διαφορετικά.

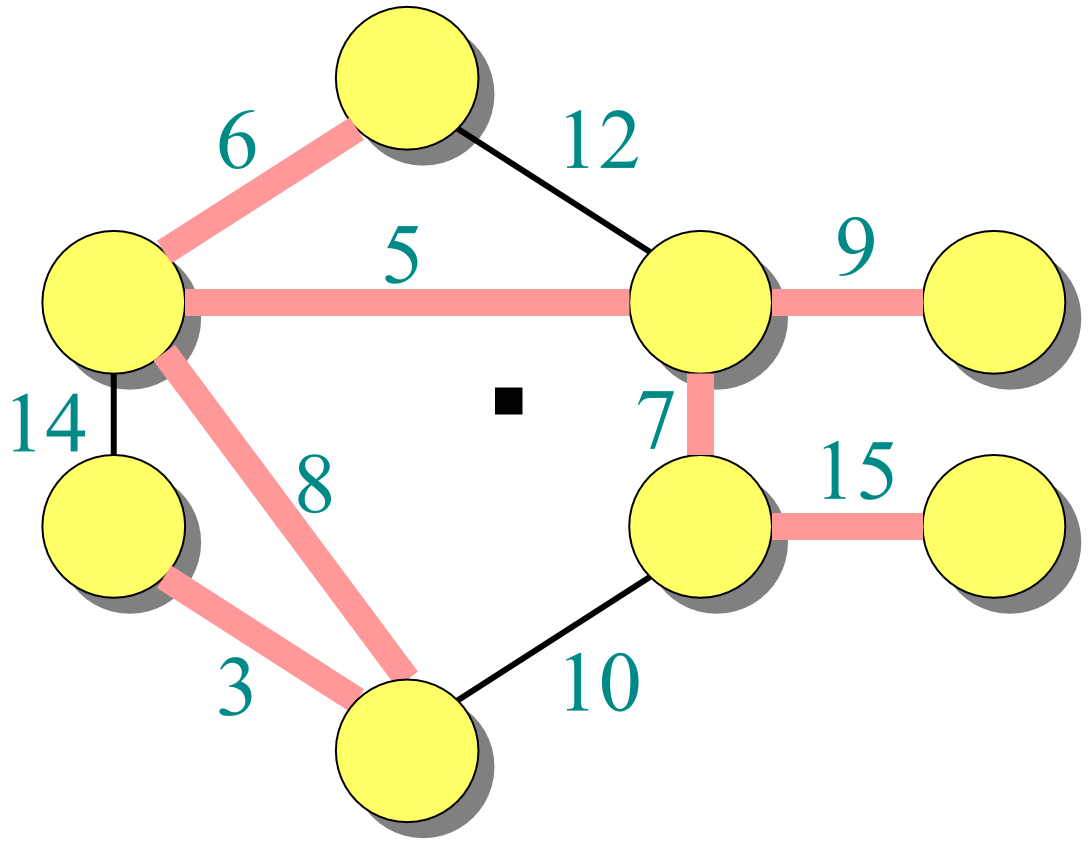
Έξοδος: Ένα ***γεννητικό δέντρο*** T — ένα δέντρο το οποίο περιέχει όλους τους κόμβους — ελάχιστου συνολικά βάρους:

$$w(T) = \sum_{(u,v) \in T} w(u, v).$$

Παράδειγμα ΕΓΔ



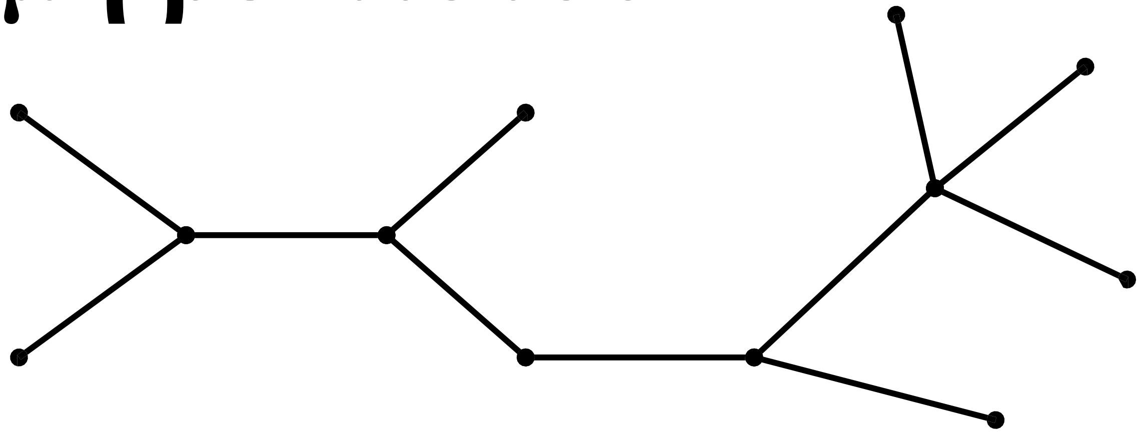
Παράδειγμα ΕΓΔ



Υποδομή βέλτιστου

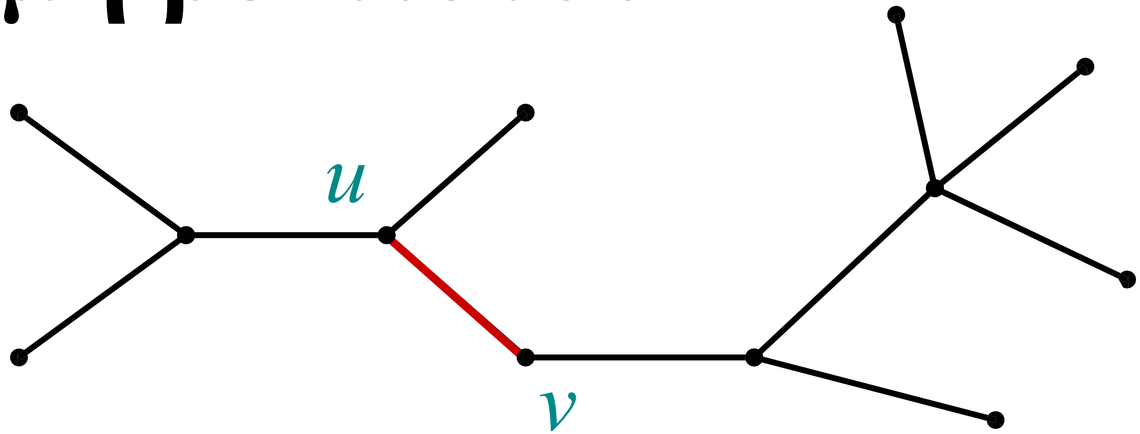
ΕΓΔ *T*:

(Οι άλλες ακμές του *G* δεν εμφανίζονται.)



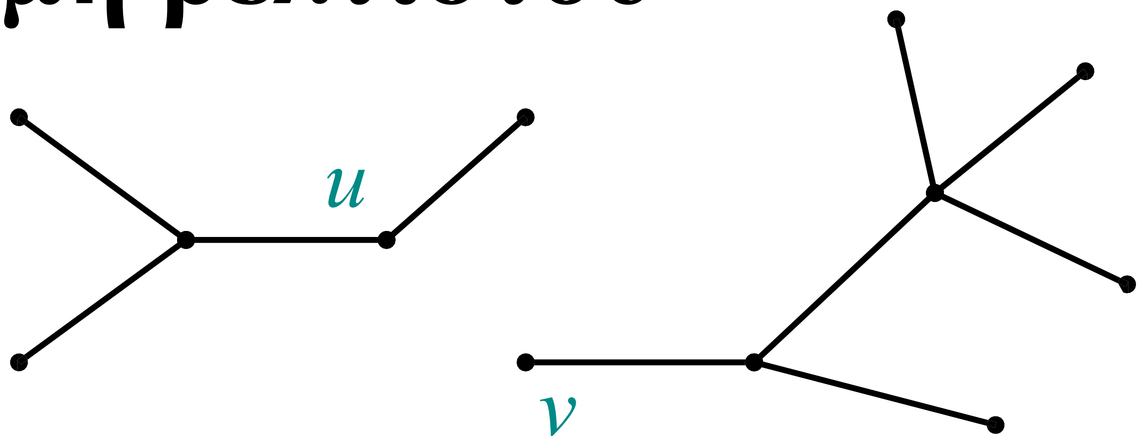
■

Υποδομή βέλτιστου



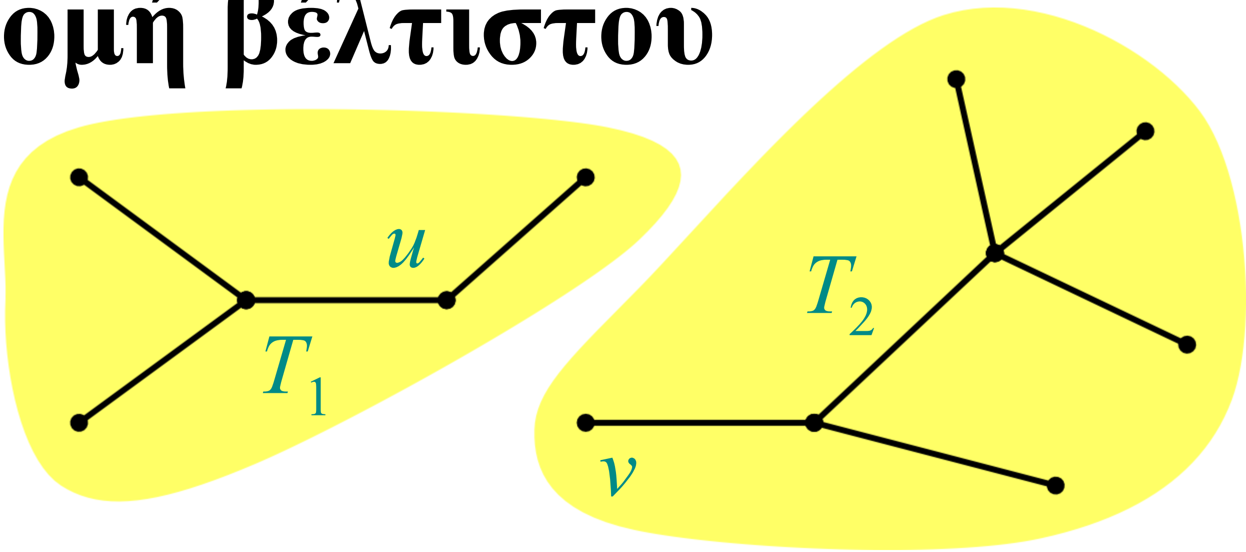
Αφαίρεσε μία ακμή $(u, v) \in T$.

Υποδομή βέλτιστου



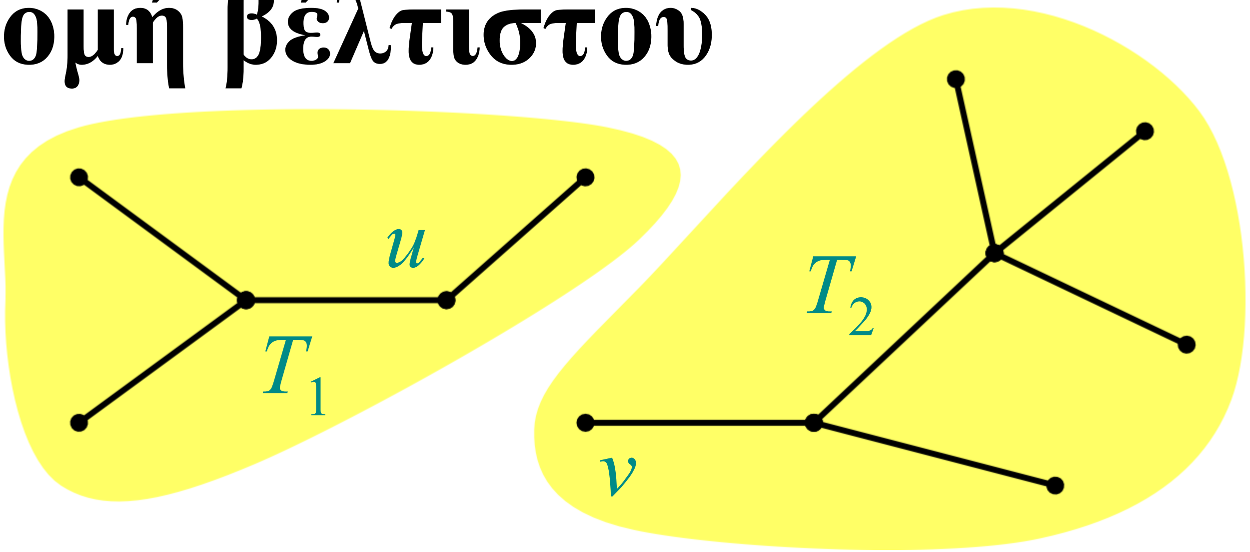
■

Υποδομή βέλτιστου



Το T χωρίζεται σε δύο υποδέντρα T_1 και T_2.

Υποδομή βέλτιστου



Θεώρημα. Το υποδέντρο T_1 είναι ένα ΕΓΔ του $G_1 = (V_1, E_1)$, το υπογράφημα που επάγεται από τις κορυφές του T_1:

$V_1 =$ κορυφές του T_1,

$E_1 = \{(x, y) \in E : x, y \in V_1\}$.

Ομοίως για T_2.

Απόδειξη της υποδομής βέλτιστου

Απόδειξη. Αποκοπή και επικόλληση:

$$w(T) = w(u, v) + w(T_1) + w(T_2).$$

Αν T_1' ήταν ένα χαμηλότερου βάρους γεννητικό δέντρο από ότι το T_1 για το G_1, τότε $T' = \{(u, v)\} \cup T_1' \cup T_2$ θα ήταν ένα χαμηλότερου βάρους γεννητικό δέντρο από ότι το T για το G.

Απόδειξη της υποδομής του βέλτιστου

Απόδειξη. Αποκοπή και επικόλληση:

$$w(T) = w(u, v) + w(T_1) + w(T_2).$$

Αν T_1' ήταν ένα χαμηλότερου βάρους γεννητικό δέντρο από ότι το T_1 για το G_1, τότε $T' = \{(u, v)\} \cup T_1' \cup T_2$ θα ήταν ένα χαμηλότερου βάρους γεννητικό δέντρο από ότι το T για το G.

Υπάρχουν επικαλυπτόμενα προβλήματα;

- Ναι.

Απόδειξη της υποδομής του βέλτιστου

Απόδειξη. Αποκοπή και επικόλληση:

$$w(T) = w(u, v) + w(T_1) + w(T_2).$$

Αν T_1' ήταν ένα χαμηλότερου βάρους γεννητικό δέντρο από ότι το T_1 για το G_1, τότε $T' = \{(u, v)\} \cup T_1' \cup T_2$ θα ήταν ένα χαμηλότερου βάρους γεννητικό δέντρο από ότι το T για το G.

Υπάρχουν επικαλυπτόμενα προβλήματα;

- Ναι.

Ο δυναμικός προγραμματισμός μπορεί να εφαρμοσθεί.

- Ναι, αλλά το πρόβλημα του ΕΓΔ έχει άλλη μία ισχυρή ιδιότητα που οδηγεί σε ακόμα πιο αποδοτικό αλγόριθμο.

Το χαρακτηριστικό των “άπληστων” αλγορίθμων

Η ιδιότητα της άπληστης επιλογής

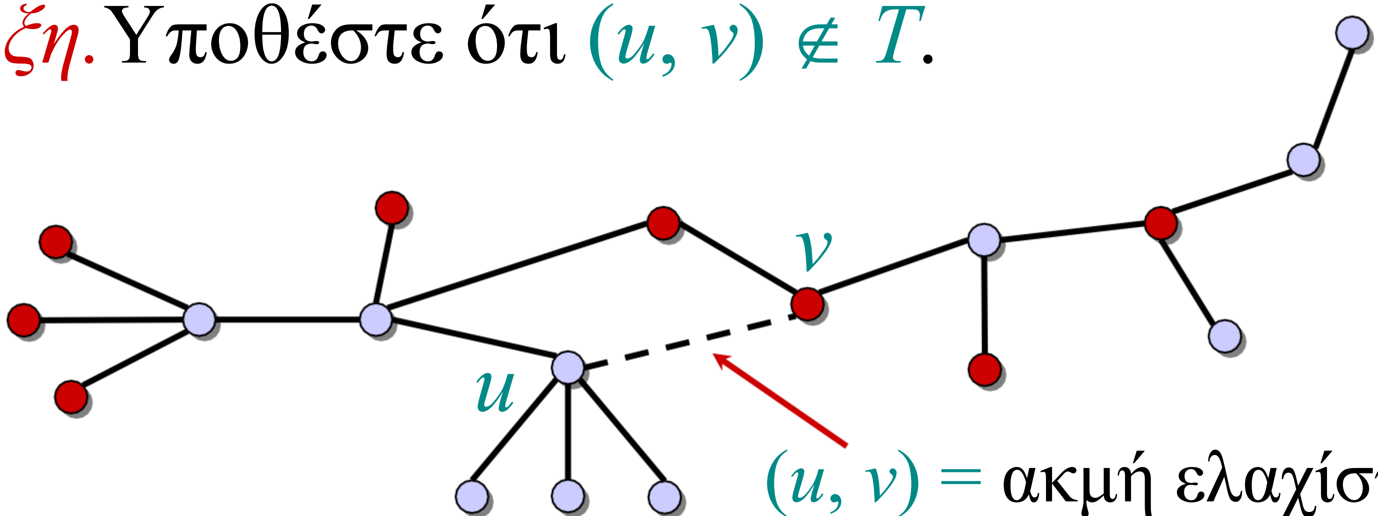
Μία τοπικά βέλτιστη επιλογή είναι και συνολικά βέλτιστη.

Θεώρημα. Έστω T είναι το ΕΓΔ του $G = (V, E)$, και έστω $A \subseteq V$. Υποθέσετε ότι $(u, v) \in E$ είναι η ακμή ελαχίστου βάρους που συνδέει το A με το $V - A$. Τότε, $(u, v) \in T$.

Απόδειξη του Θεωρήματος

Απόδειξη. Υποθέστε ότι $(u, v) \notin T$.

T:



$\in A$

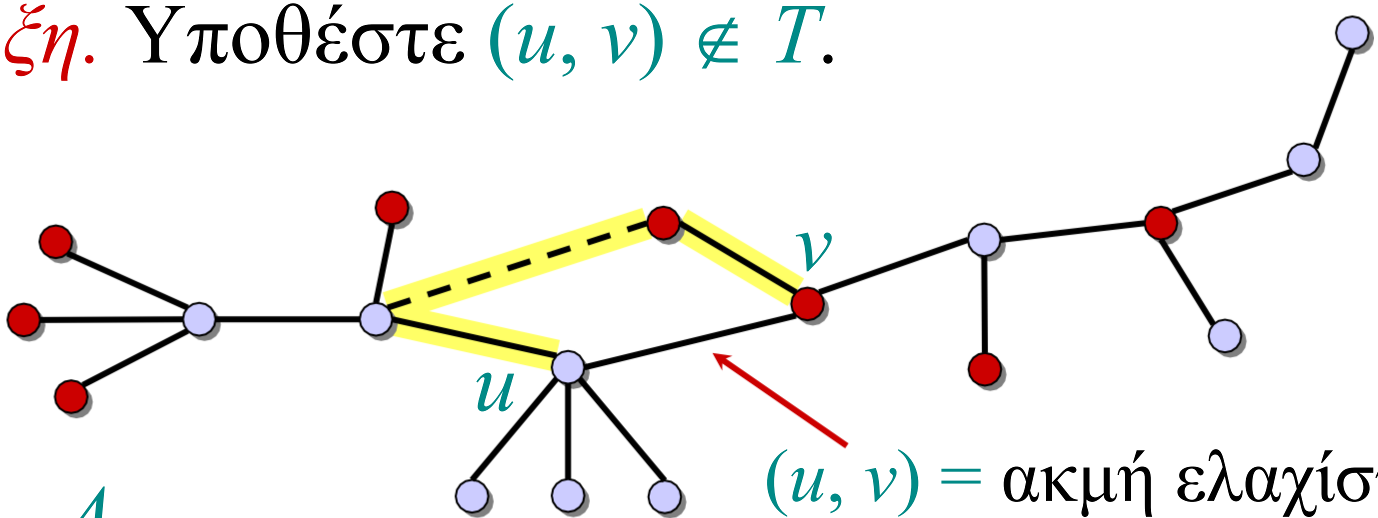
$\in V - A$

(u, v) = ακμή ελαχίστου βάρους που συνδέει A με $V - A$

Απόδειξη Θεωρήματος

Απόδειξη. Υποθέστε $(u, v) \notin T$.

T:



● $\in A$

● $\in V - A$

(u, v) = ακμή ελαχίστου βάρους που συνδέει το A με το $V - A$

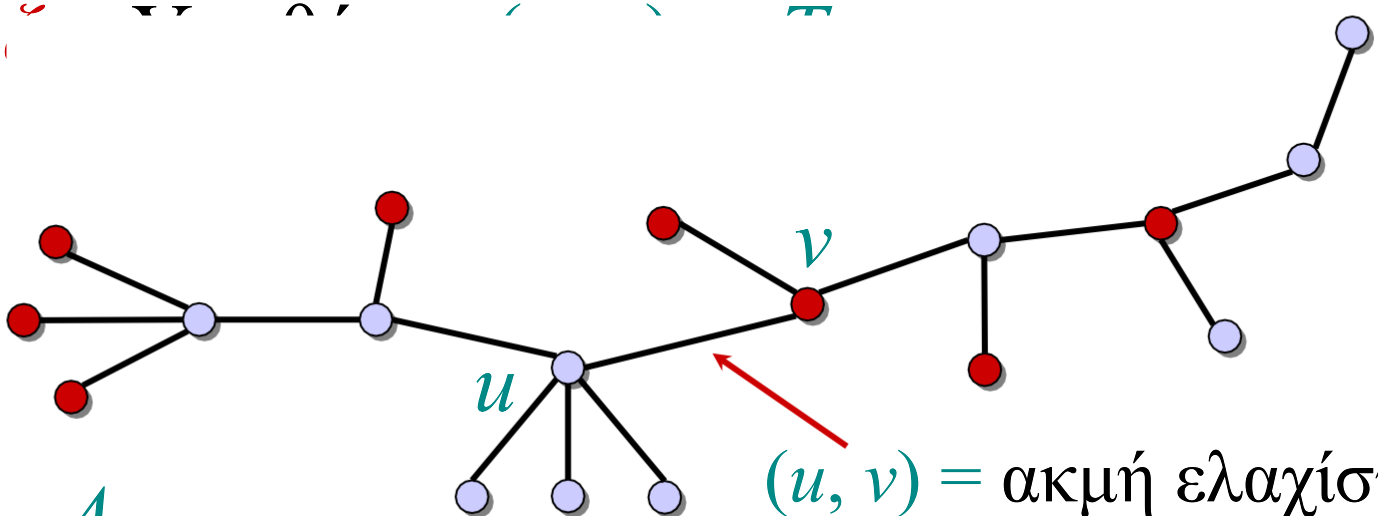
Θεωρήστε το μοναδικό απλό μονοπάτι από το u στο v εντός T.

Εναλλαξε τη (u, v) με τη πρώτη ακμή στο μονοπάτι η οποία συνδέει μία κορυφή από το A με μία κορυφή στο $V - A$.

Απόδειξη Θεωρήματος

Απόδει

T':



$\in A$

$\in V - A$

(u, v) = ακμή ελαχίστου βάρους που συνδέει το A με το $V - A$

Προκύπτει ένα γεννητικό δέντρο χαμηλότερου συνολικά βάρους από ότι το T.

Αλγόριθμος του Prim

Ιδέα: Αποθήκευσε τους κόμβους του $V - A$ σε μία ουρά προτεραιότητας Q. Το κλειδί κάθε κόμβου στο Q είναι το βάρος της ακμής ελαχίστου βάρους που συνδέει τον κόμβο αυτό με ένα κόμβο στο A.

$Q \leftarrow V$

$key[v] \leftarrow \infty$ for all $v \in V$

$key[s] \leftarrow 0$ for some arbitrary $s \in V$

while $Q \neq \emptyset$

  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

   for each $v \in Adj[u]$

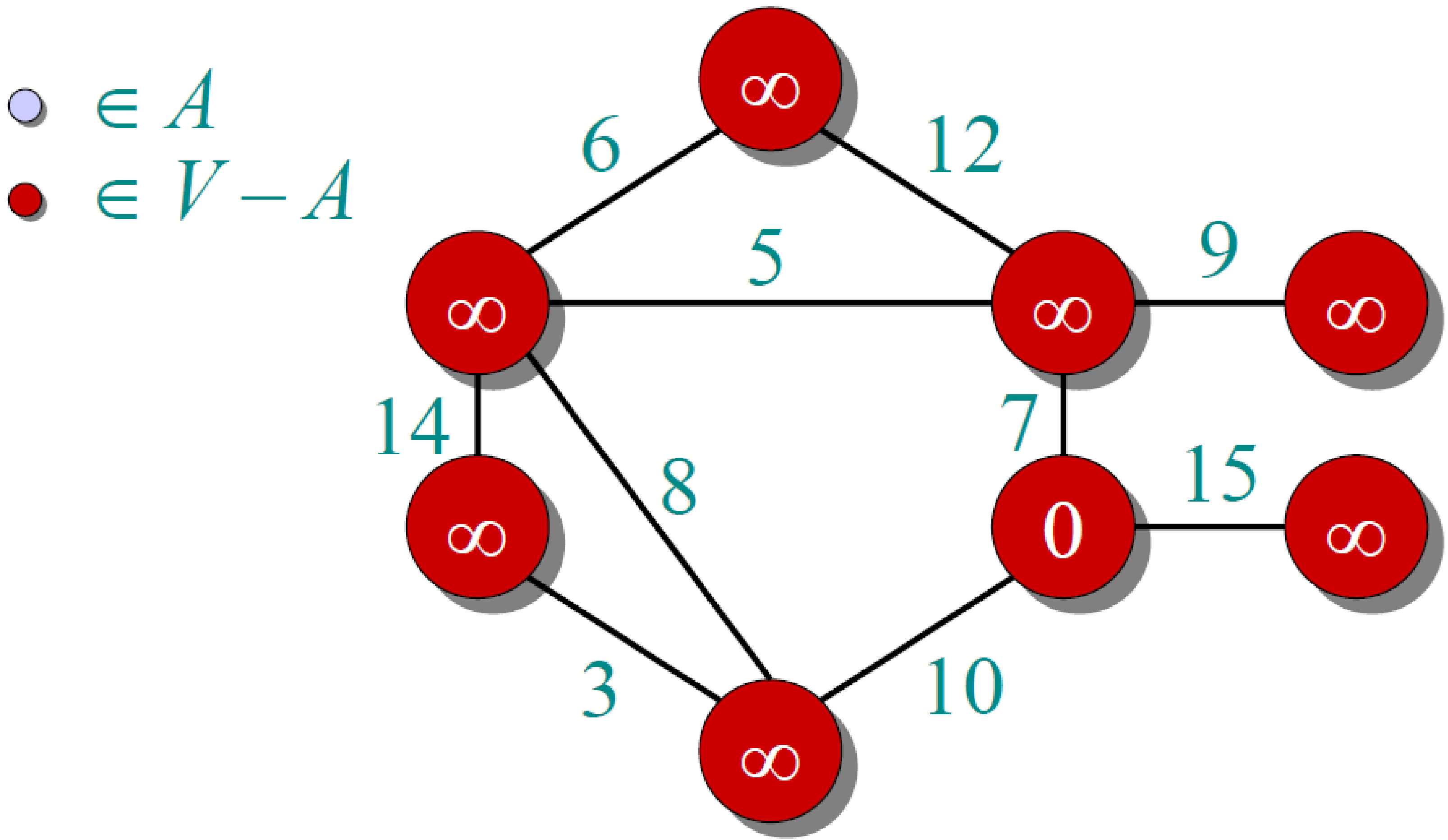
    do if $v \in Q$ and $w(u, v) < key[v]$ ▷ DECREASE-KEY

     then $key[v] \leftarrow w(u, v)$

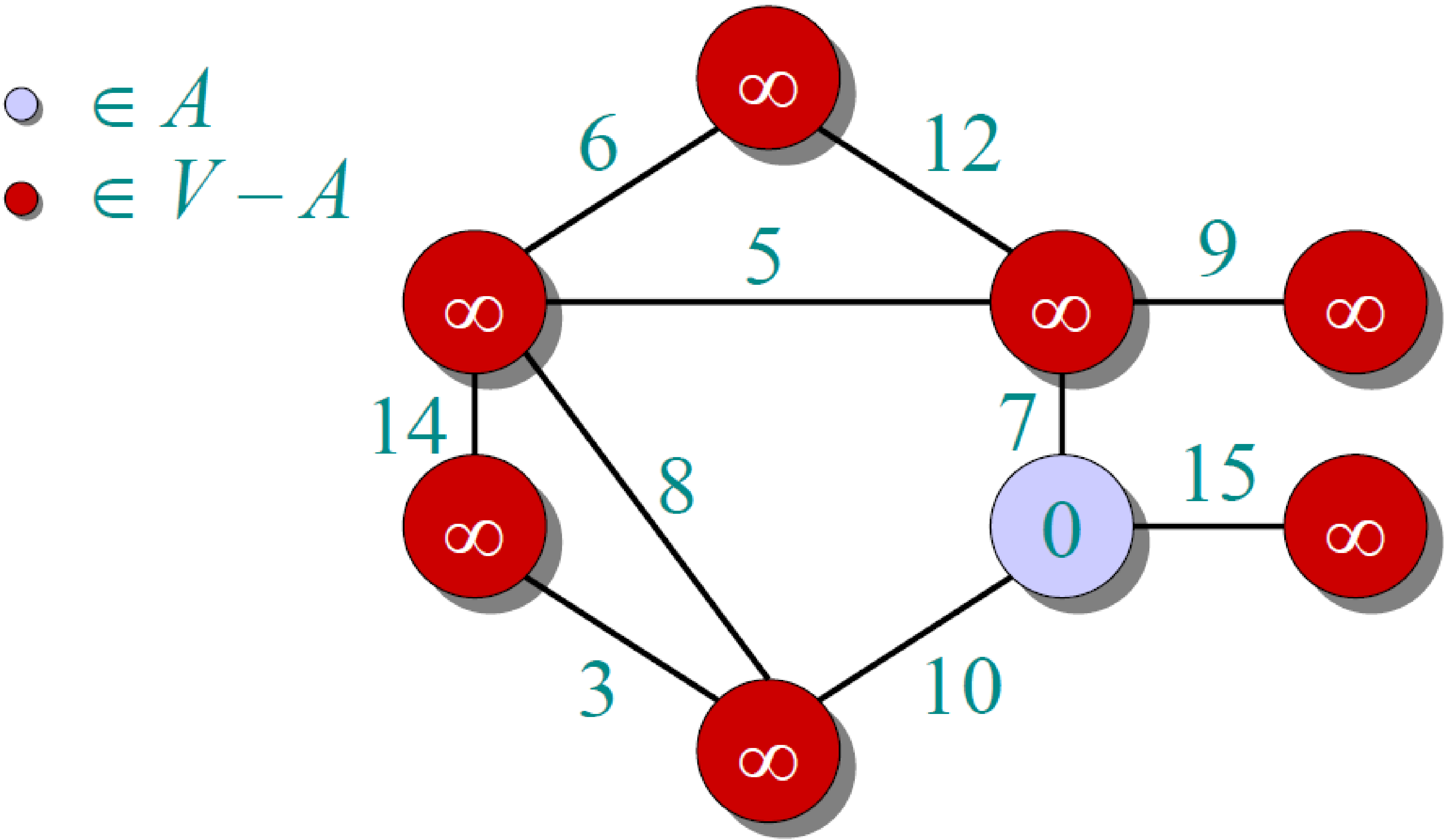
      $\pi[v] \leftarrow u$

Στο τέλος, $\{(v, \pi[v])\}$ σχηματίζουν το MST.

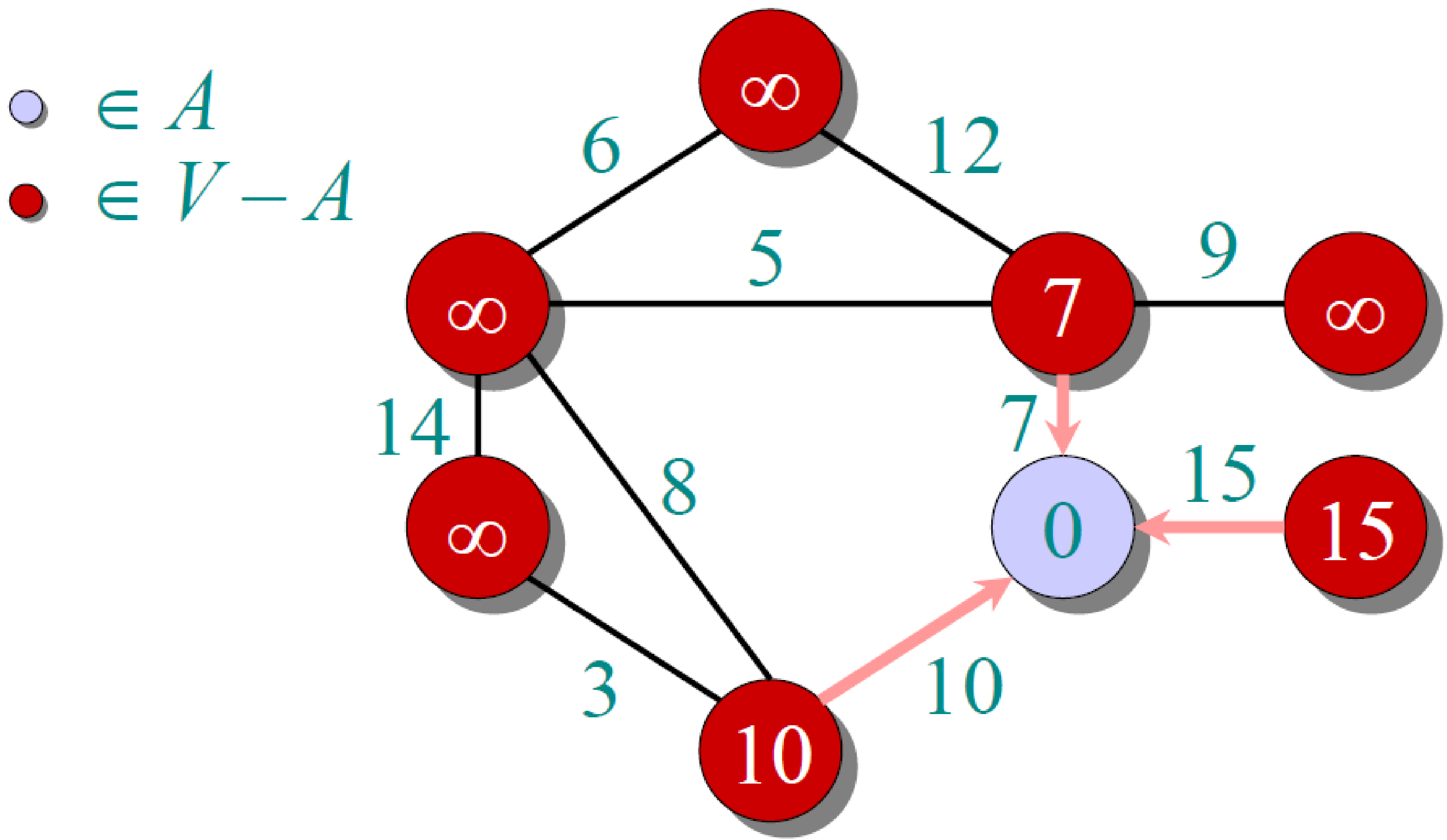
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



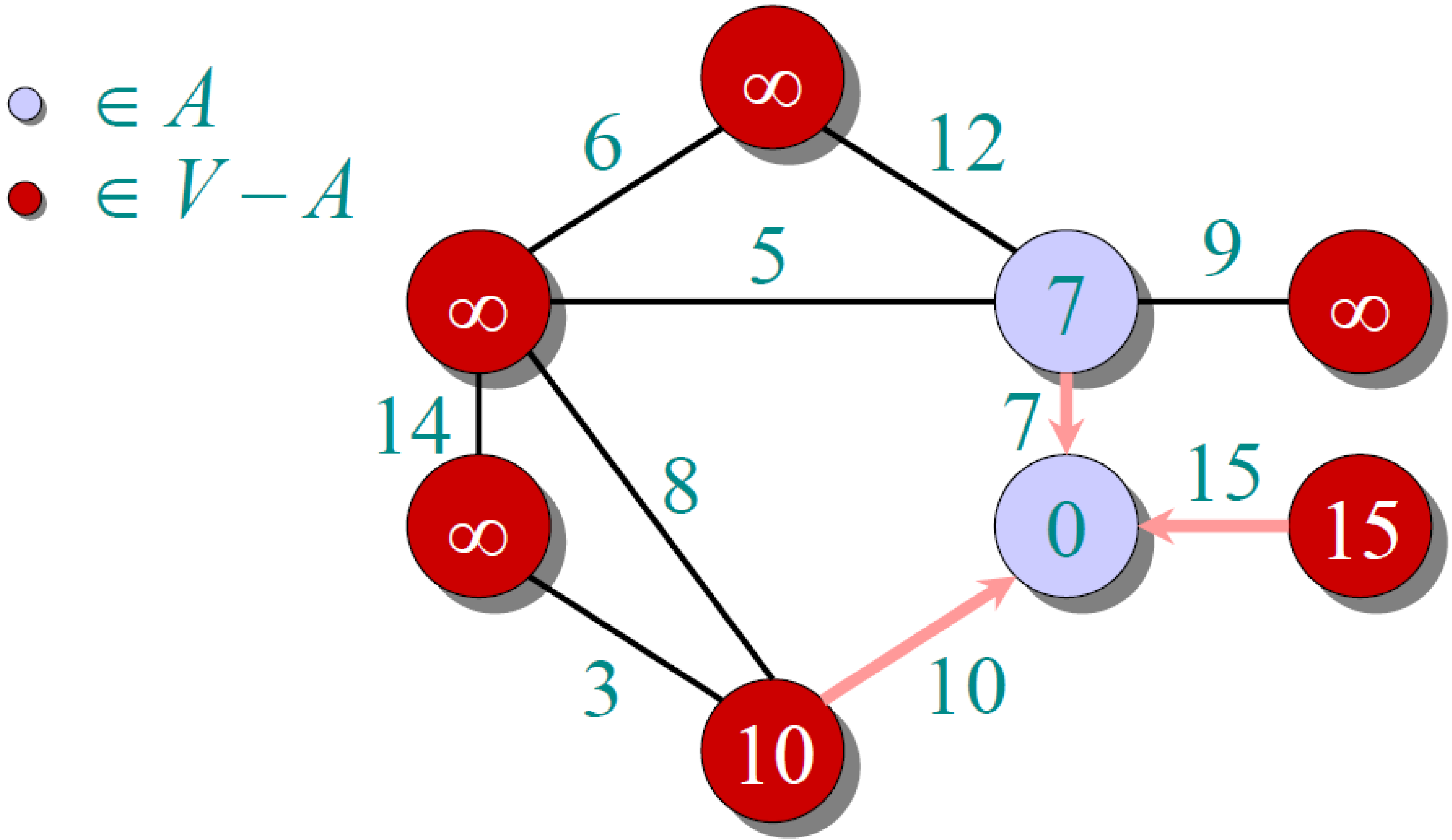
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



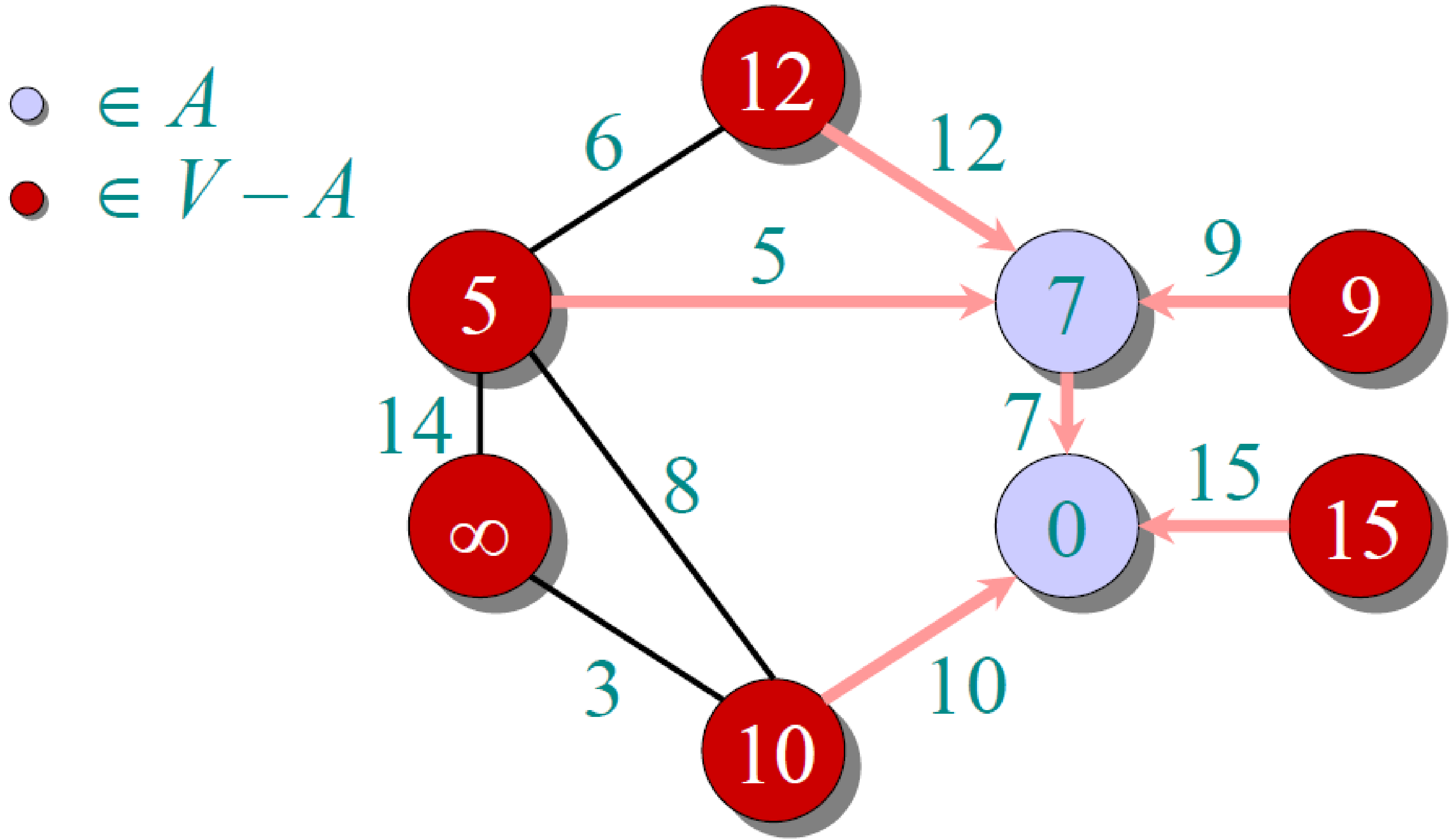
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



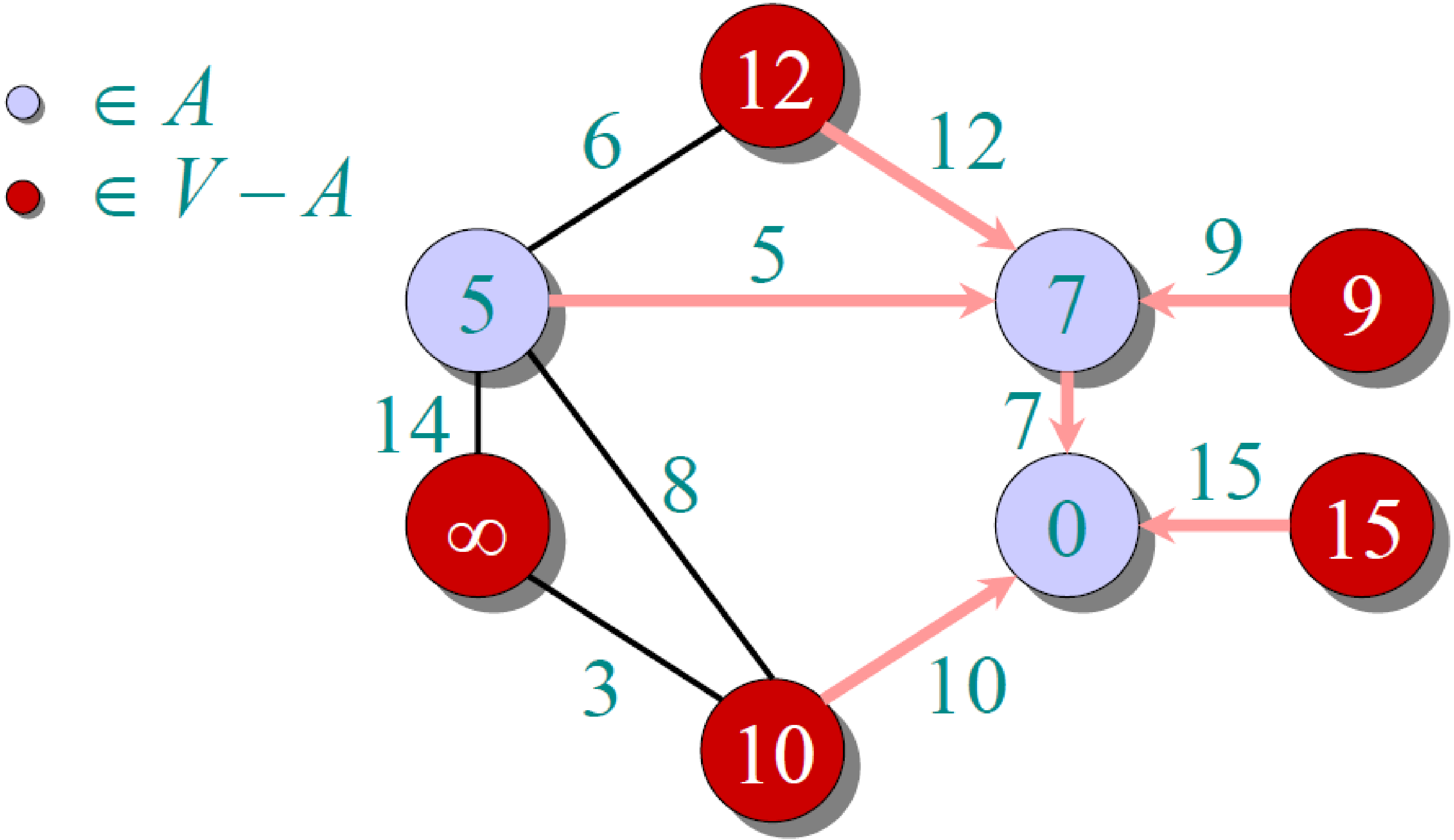
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



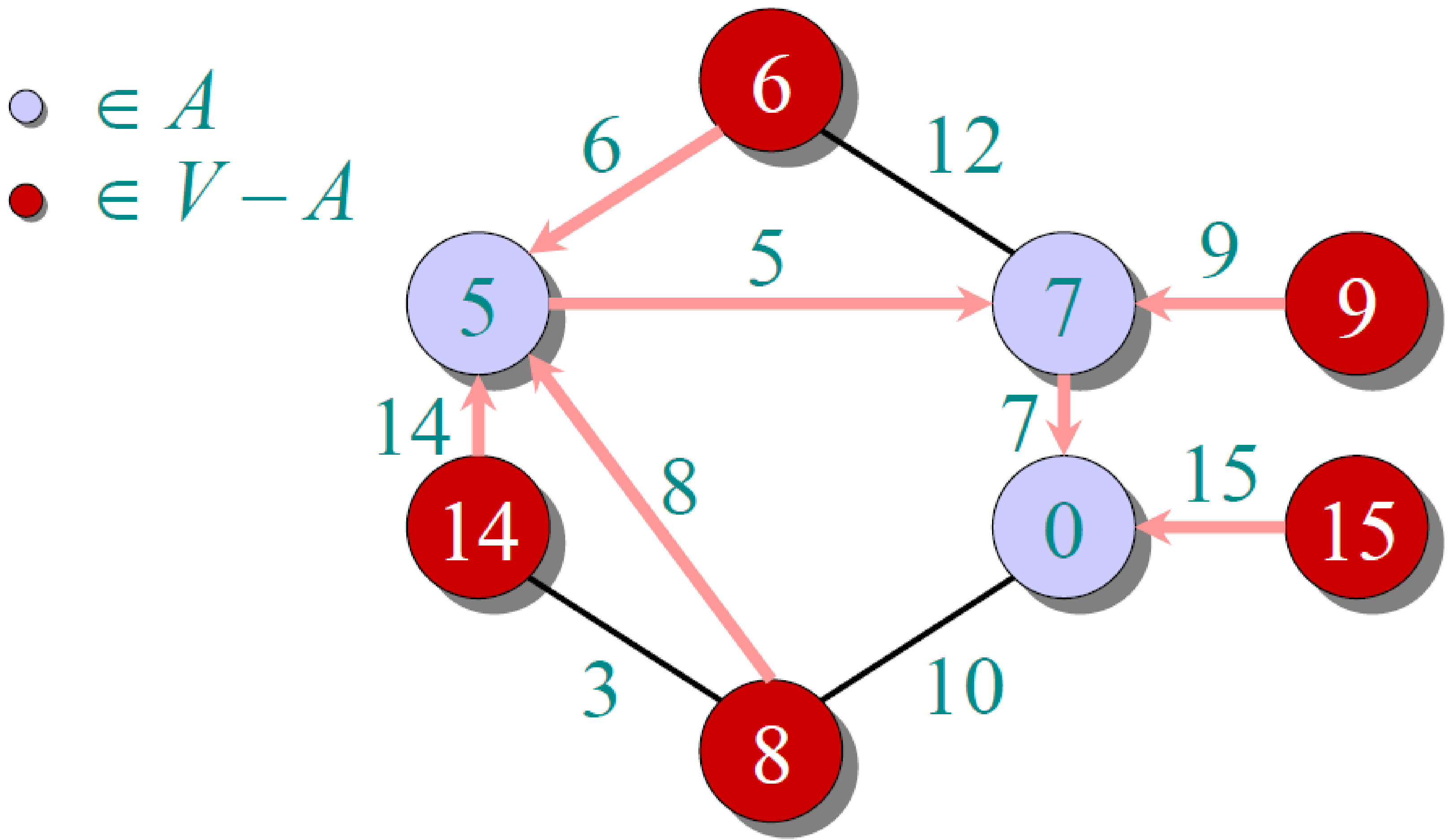
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



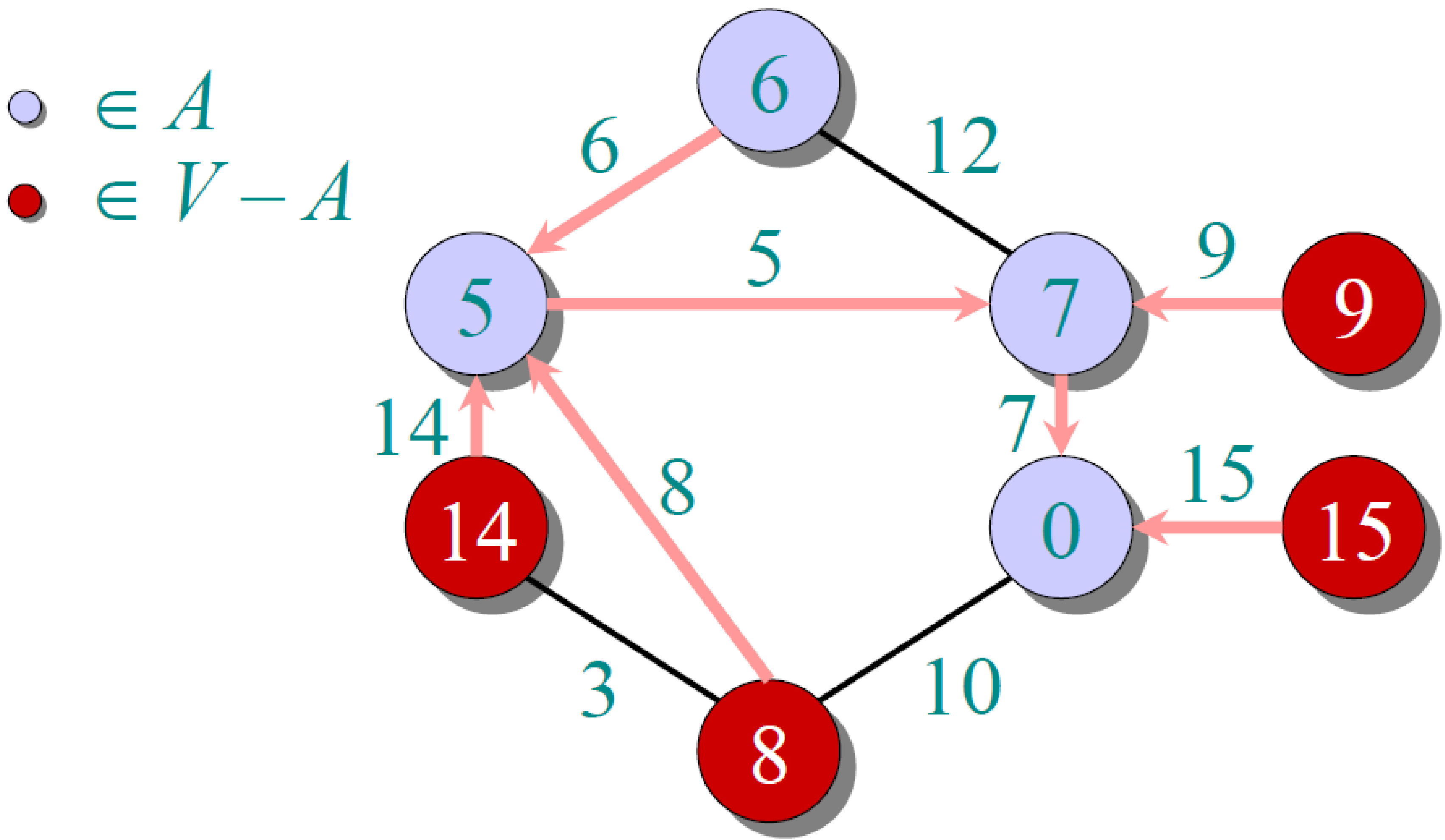
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



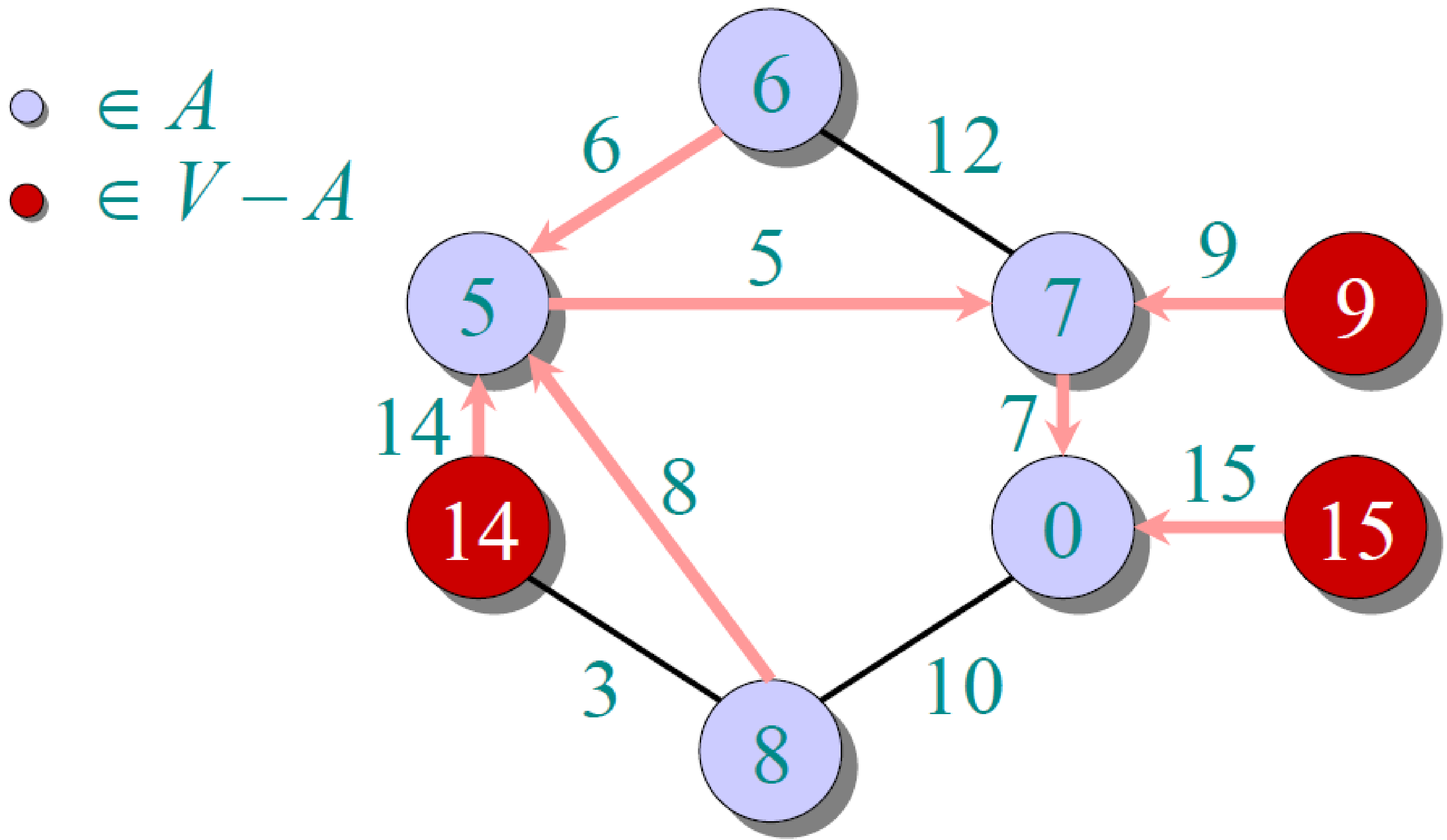
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



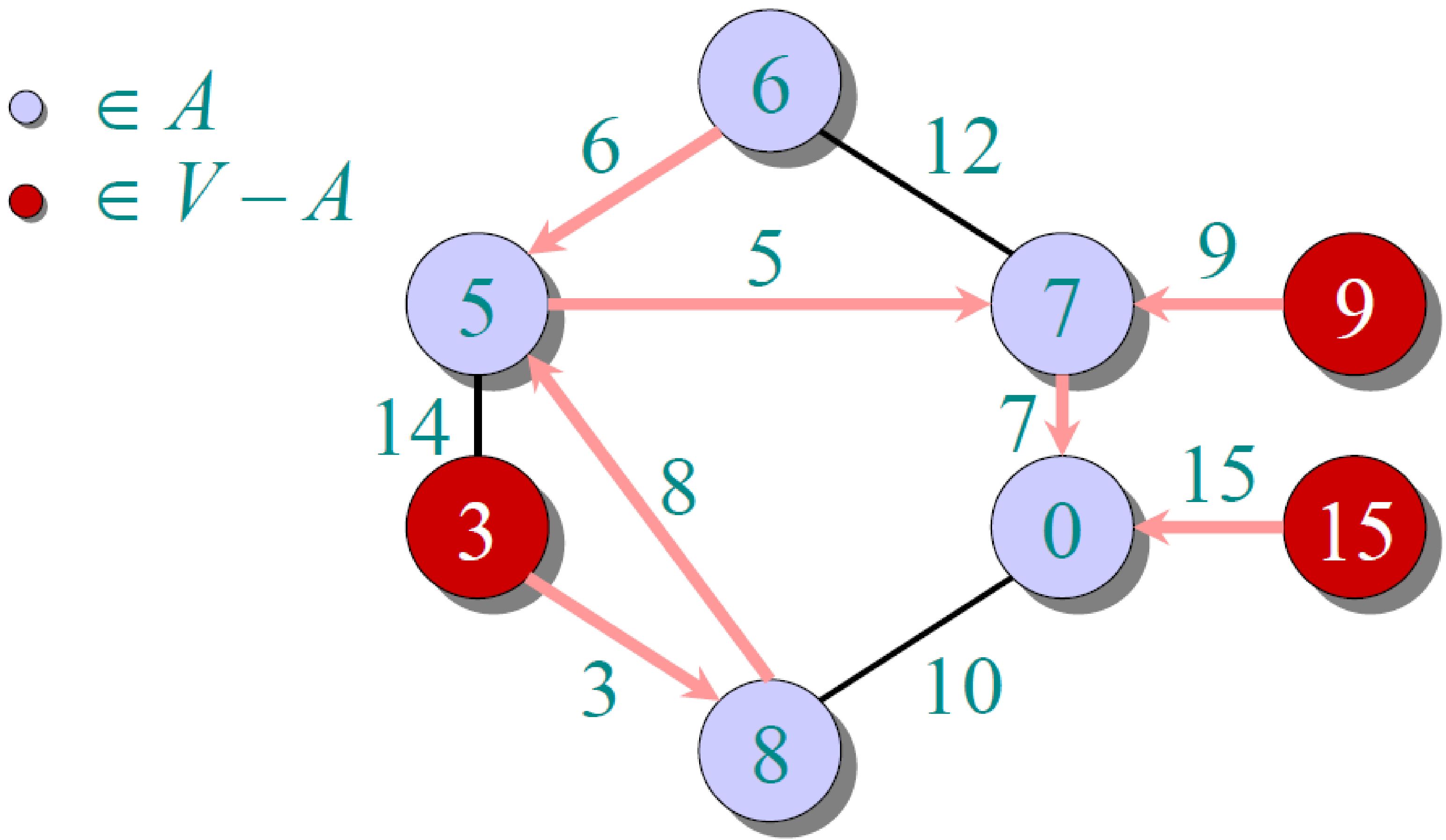
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



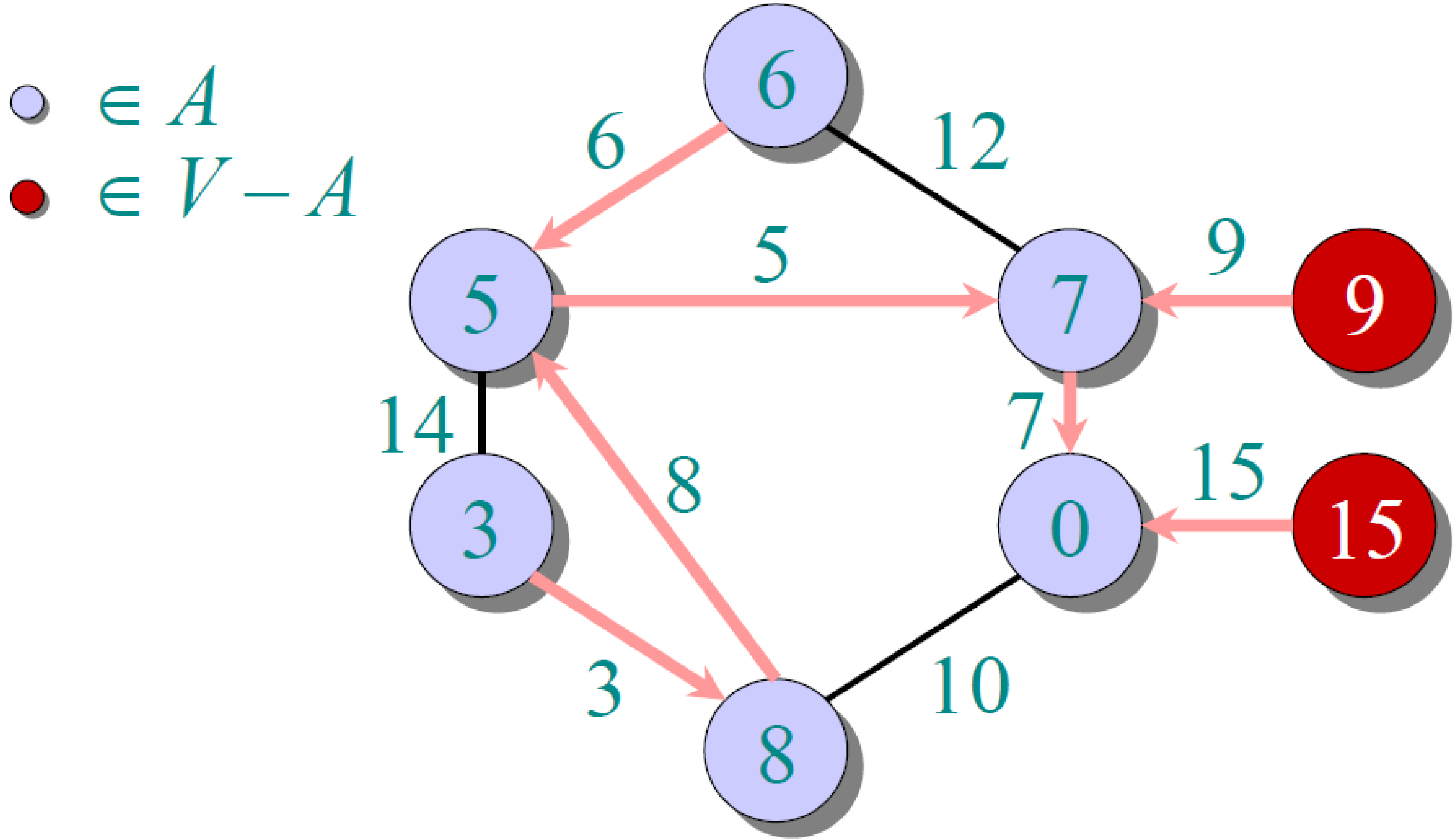
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



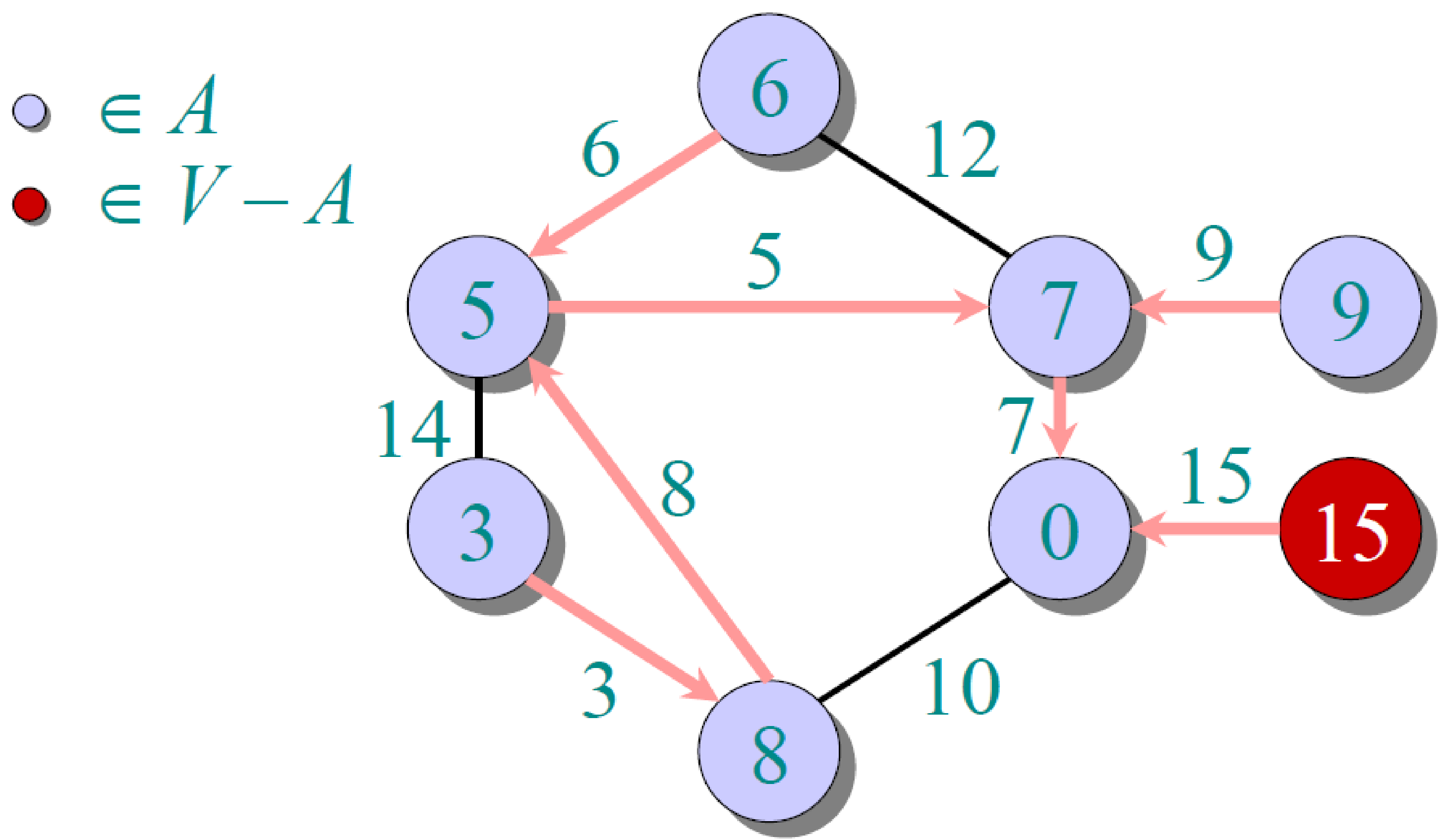
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



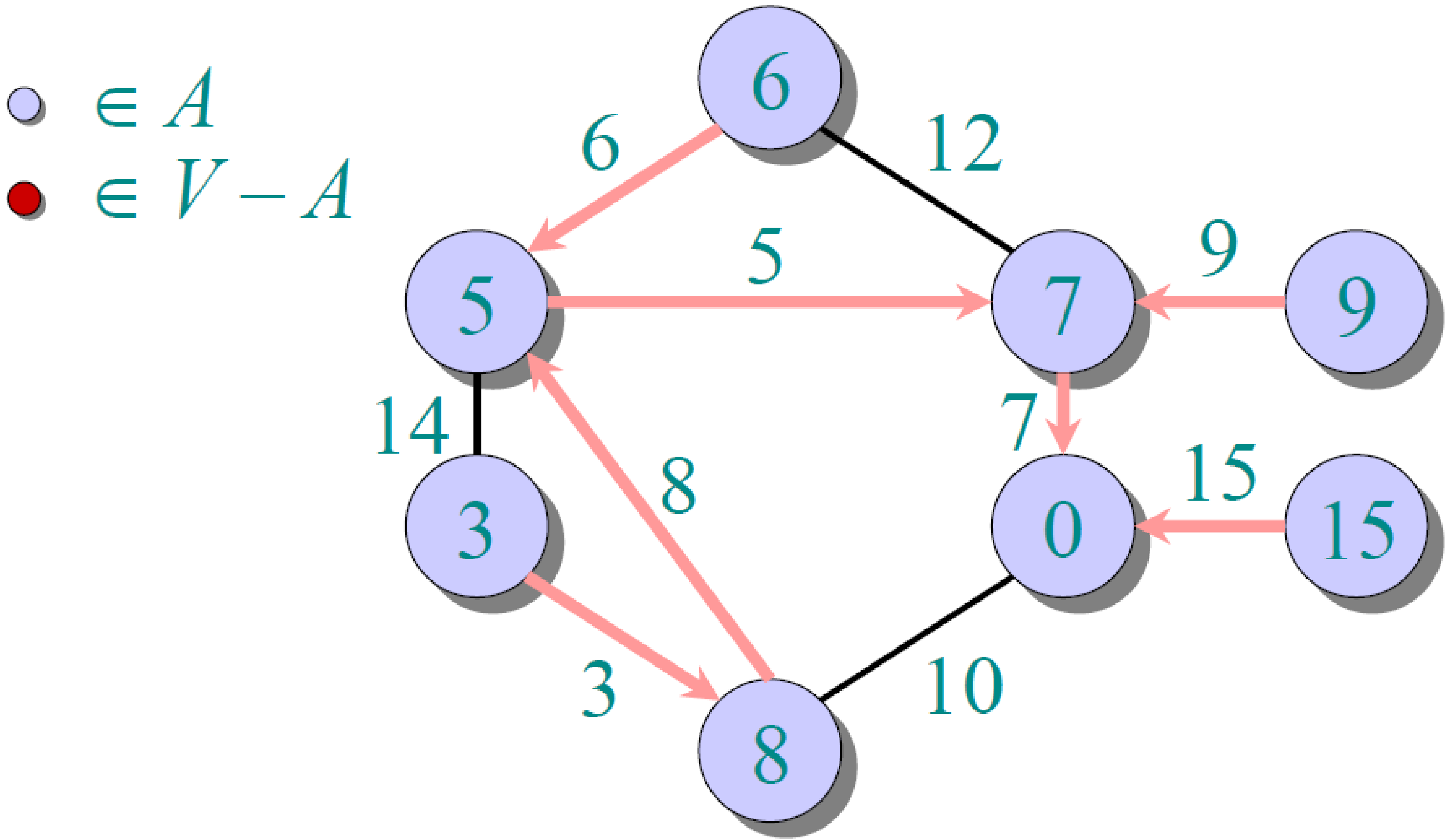
Παράδειγμα αλγορίθμου Prim

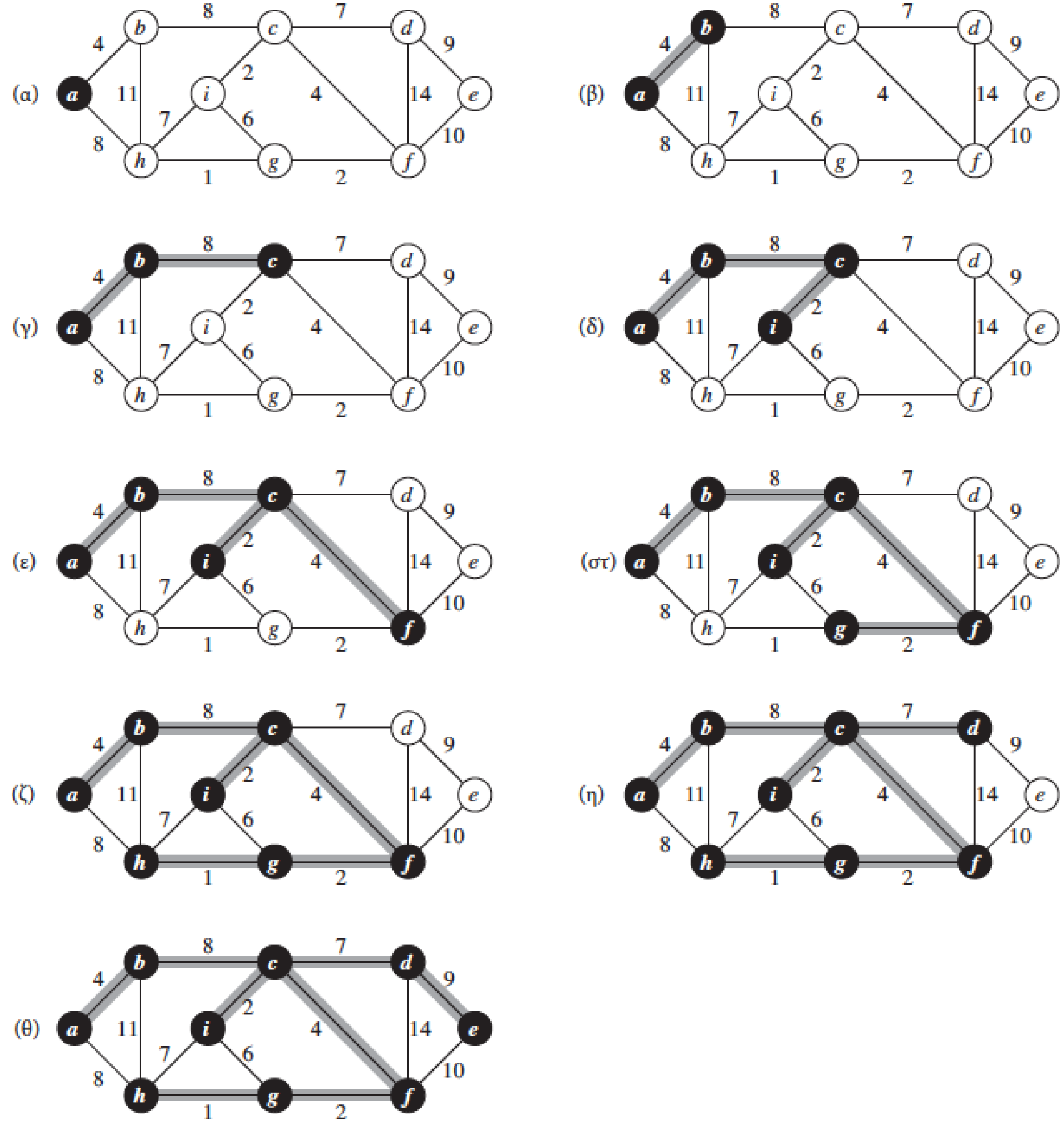


Παράδειγμα αλγορίθμου Prim



Παράδειγμα αλγορίθμου Prim





Σχήμα 23.5 Η λειτουργία του αλγορίθμου του Prim στο γράφημα του Σχήματος 23.1. Ο ριζικός κόμβος είναι ο a. Οι σκιασμένες ακμές και οι μαύροι κόμβοι ανήκουν στο αναπτυσσόμενο δένδρο. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου, οι κόμβοι του δένδρου ορίζουν μια τομή του γραφήματος, και η ακμή που προστίθεται στο δένδρο είναι μια ελαφρά ακμή ως προς τη διάσχιση αυτής της τομής. Στο δεύτερο βήμα, παραδείγματος χάριν, ο αλγόριθμος έχει τη δυνατότητα να προσθέσει στο δένδρο είτε την ακμή (b, c) είτε την ακμή (a, h), αφού και οι δύο είναι ελαφρείς ως προς τη διάσχιση της τομής.

Ανάλυση του αλγορίθμου του Prim

$Q \leftarrow V$
$key[v] \leftarrow \infty$ for all $v \in V$
$key[s] \leftarrow 0$ for some arbitrary $s \in V$
while $Q \neq \emptyset$
  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
    for each $v \in Adj[u]$
      do if $v \in Q$ and $w(u, v) < key[v]$
        then $key[v] \leftarrow w(u, v)$
          $\pi[v] \leftarrow u$

Ανάλυση του αλγορίθμου του Prim

$$\begin{array}{c}\Theta(V)\\ \text{συνολικά}\end{array} \left\{ \begin{array}{l} Q \leftarrow V \\ key[v] \leftarrow \infty \text{ for all } v \in V \\ key[s] \leftarrow 0 \text{ for some arbitrary } s \in V \end{array}\right.$$

while $Q \neq \emptyset$

  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

    for each $v \in Adj[u]$

      do if $v \in Q$ and $w(u, v) < key[v]$

        then $key[v] \leftarrow w(u, v)$

          $\pi[v] \leftarrow u$

Ανάλυση του αλγορίθμου του Prim

$\Theta(V)$ συνολικά

$Q \leftarrow V$
$key[v] \leftarrow \infty$ for all $v \in V$
$key[s] \leftarrow 0$ for some arbitrary $s \in V$

$|V|$ φορές

while $Q \neq \emptyset$
  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)
    for each $v \in Adj[u]$
      do if $v \in Q$ and $w(u, v) < key[v]$
        then $key[v] \leftarrow w(u, v)$
          $\pi[v] \leftarrow u$

Ανάλυση του αλγορίθμου του Prim

$\Theta(V)$ συνολικά

$Q \leftarrow V$
$key[v] \leftarrow \infty$ for all $v \in V$
$key[s] \leftarrow 0$ for some arbitrary $s \in V$

$|V|$ φορές

while $Q \neq \emptyset$
  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

$degree(u)$ φορές

    for each $v \in Adj[u]$
      do if $v \in Q$ and $w(u, v) < key[v]$
        then $key[v] \leftarrow w(u, v)$
          $\pi[v] \leftarrow u$

Ανάλυση του αλγορίθμου του Prim

$\Theta(V)$ total:

$Q \leftarrow V$
$key[v] \leftarrow \infty$ for all $v \in V$
$key[s] \leftarrow 0$ for some arbitrary $s \in V$

$|V|$ times:

while $Q \neq \emptyset$
  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

$degree(u)$ times:

  for each $v \in Adj[u]$
   do if $v \in Q$ and $w(u, v) < key[v]$
    then $key[v] \leftarrow w(u, v)$
     $\pi[v] \leftarrow u$

$\Theta(E)$ DECREASE-KEY's.

Ανάλυση του αλγορίθμου του Prim

$\Theta(V)$ total:

$Q \leftarrow V$
$key[v] \leftarrow \infty$ for all $v \in V$
$key[s] \leftarrow 0$ for some arbitrary $s \in V$

$|V|$ times:

while $Q \neq \emptyset$
  do $u \leftarrow$ EXTRACT-MIN(Q)

  $degree(u)$ times:

   for each $v \in Adj[u]$
    do if $v \in Q$ and $w(u, v) < key[v]$
     then $key[v] \leftarrow w(u, v)$
      $\pi[v] \leftarrow u$

Χρόνος $= \Theta(V) \cdot T_{\text{EXTRACT-MIN}} + \Theta(E) \cdot T_{\text{DECREASE-KEY}}$

Ανάλυση του αλγόριθμου του Prim

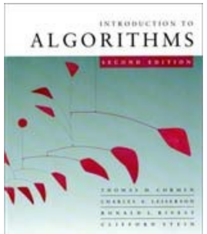
$$\text{Time} = \Theta(V) \cdot T_{\text{EXTRACT-MIN}} + \Theta(E) \cdot T_{\text{DECREASE-KEY}}$$

Q	$T_{\text{EXTRACT-MIN}}$	$T_{\text{DECREASE-KEY}}$	Σύνολο

Analysis of Prim (continued)

Time = $\Theta(V)\cdot T_{\text{EXTRACT-MIN}} + \Theta(E)\cdot T_{\text{DECREASE-KEY}}$

Q	$T_{\text{EXTRACT-MIN}}$	$T_{\text{DECREASE-KEY}}$	Total
array	$O(V)$	■ $O(1)$	$O(V^2)$



Analysis of Prim (continued)

Time = $\Theta(V) \cdot T_{\text{EXTRACT-MIN}} + \Theta(E) \cdot T_{\text{DECREASE-KEY}}$

Q	$T_{\text{EXTRACT-MIN}}$	$T_{\text{DECREASE-KEY}}$	Total
array	$O(V)$	$O(1)$	$O(V^2)$
binary heap	$O(\lg V)$	$O(\lg V)$	$O(E \lg V)$

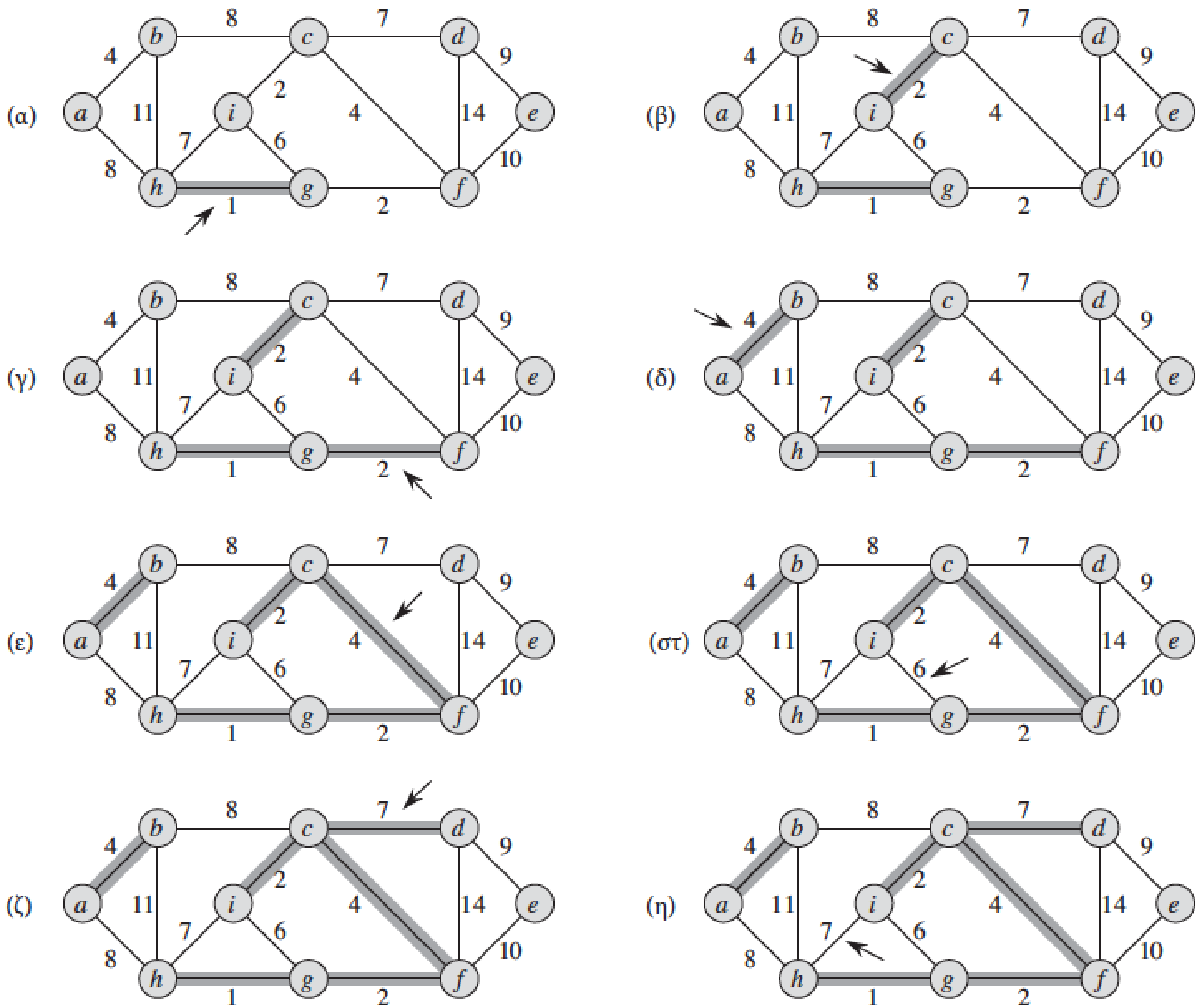
Ανάλυση του αλγόριθμου του Prim

$$\text{Time} = \Theta(V) \cdot T_{\text{EXTRACT-MIN}} + \Theta(E) \cdot T_{\text{DECREASE-KEY}}$$

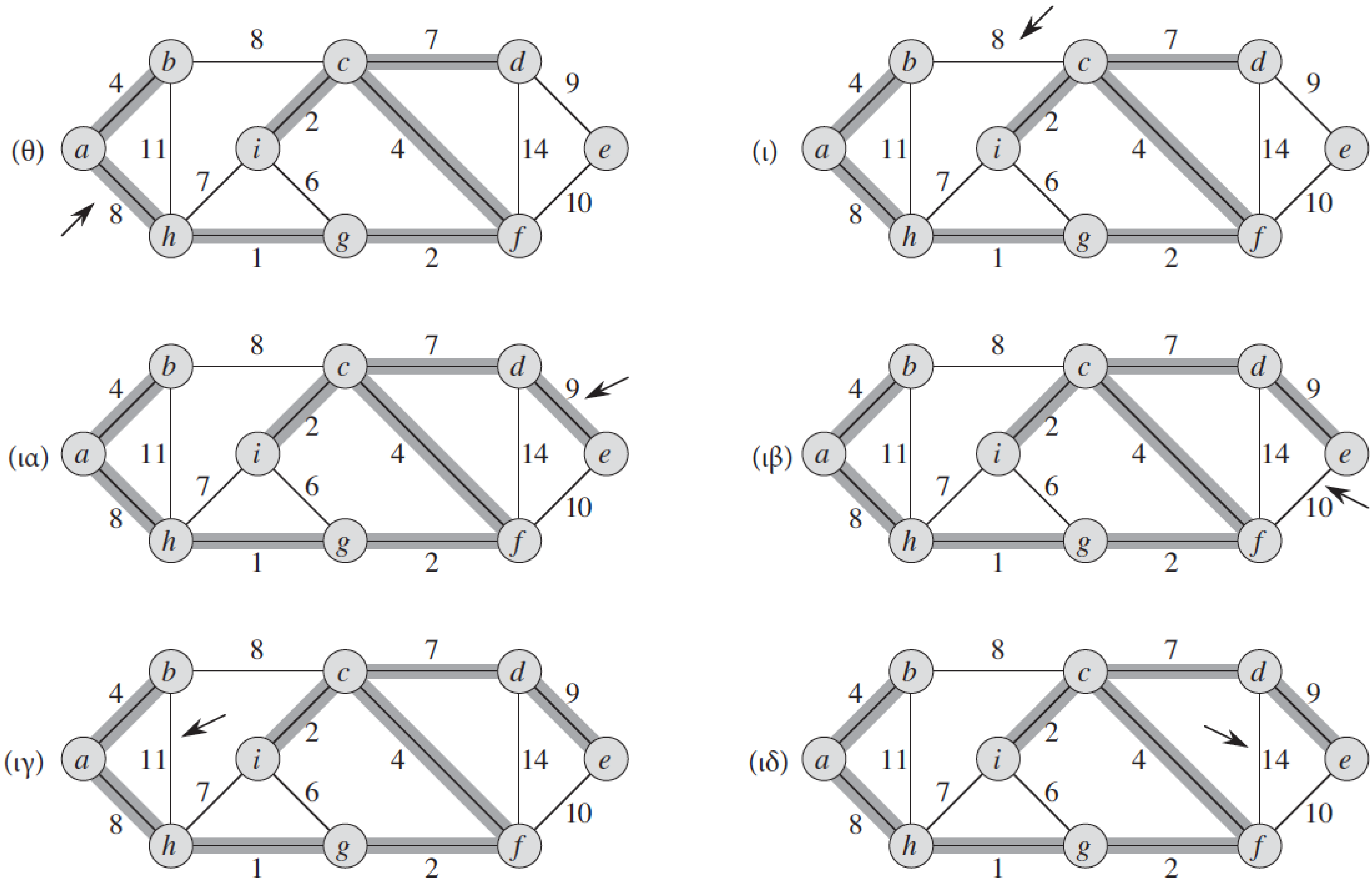
Q	$T_{\text{EXTRACT-MIN}}$	$T_{\text{DECREASE-KEY}}$	Σύνολο
array	$O(V)$	$O(1)$	$O(V^2)$
binary heap	$O(\lg V)$	$O(\lg V)$	$O(E \lg V)$
Fibonacci heap	$O(\lg V)$ Επιμερισμένο	$O(1)$ Επιμερισμένο	$O(E + V \lg V)$ Χειρότερης Περίπτωσης

Αλγόριθμος του Kruskal

```
MST-KRUSKAL(G, w)
A = ∅
for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
for each edge (u, v) ∈ G.E, taken in nondecreasing order by weight
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
            A = A ∪ {(u, v)}
            UNION(u, v)
return A
```



Σχήμα 23.4 Η λειτουργία του αλγορίθμου του Kruskal στο γράφημα του Σχήματος 23.1. Οι σκιασμένες ακμές είναι αυτές που ανήκουν στο αναπτυσσόμενο δάσος A. Ο αλγόριθμος εξετάζει τις ακμές με βάση τη διάταξή τους ως προς το βάρος. Η εξεταζόμενη ακμή σε κάθε βήμα του αλγορίθμου υποδεικνύεται από το βέλος. Εάν η ακμή αυτή συνδέει δύο διαφορετικά δένδρα του δάσους, προστίθεται στο δάσος, συγχωνεύοντας με τον τρόπο αυτό τα δύο δένδρα.



Σχήμα 23.4, συνέχ. Επιπλέον βήματα στην εκτέλεση του αλγορίθμου του Kruskal.