Πιθανότητες και Στατιστική

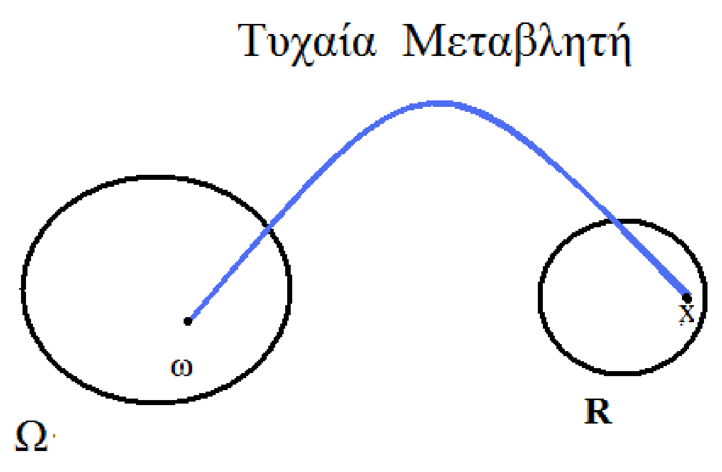
Ενότητα : Τυχαίες Μεταβλητές

Μιλτιάδης Χαλικιάς

Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός Κάθε κανόνας απεικόνισης (συνάρτηση) που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο ω του δειγματοχώρου Ω ένα πραγματικό αριθμό x, καλείται τυχαία μεταβλητή.

Δηλαδή κάθε τυχαία μεταβλητή είναι μια συνολοσυνάρτηση με πεδίο ορισμού το Ω και πεδίο τιμών το R.



Είδη τυχαίων μεταβλητών

- Διακριτές
- Συνεχείς

Πιθανότητα κατά Kolmogorov

Ορισμός (Ορισμός πιθανότητας κατά Kolmogorov) Η συνάρτηση $P(X = x_i) = p(x_i)$ μας δίνει την πιθανότητα η διακριτή τυχαία μεταβλητή X να πάρει την τιμή x_i και ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας πιθανότητας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

Η συνάρτηση πιθανότητας $p(x_i)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$i)\ p(x_i) > 0\ ,\ i = 1,2,\ldots$$

$$ii)\ p(x) = 0\ ,\ x \neq x_i\ ,\ i = 1,2,\ldots$$

$$iii)\sum_i p(x_i) = 1$$

Επίσης, αν A είναι ένα πιθανό ενδεχόμενο μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής τότε

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k έτσι ώστε η ακόλουθη συνάρτηση να είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X

$$p(x) = k\frac{2^{x-1}}{4^x} \quad , \quad x = 1,2,3,\ldots$$

Λύση

Καταρχάς πρέπει p(x) ≥ 0. Επομένως θα πρέπει k ≥ 0. Ακόμη θα πρέπει να ισχύει

$$\sum_{x=1}^{\infty} k\frac{2^{x-1}}{4^x} = 1 \Rightarrow k\sum_{x=1}^{\infty}\frac{2^{x-1}}{4 \cdot 4^{x-1}} = 1 \Rightarrow \frac{k}{4}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{2^{x-1}}{4^{x-1}} = 1 \Rightarrow \frac{k}{4}\sum_{x=1}^{\infty}(\frac{2}{4})^{x-1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k}{4}\sum_{x=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{x-1} = 1 \Rightarrow \frac{k}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{k}{4}\cdot 2 = 1 \Rightarrow k = 2$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

Ορισμός Μία συνάρτηση f(x) ονομάζεται συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής Χ αν ικανοποιεί τις ιδιότητες

I. $f(x) \geq 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty$

II. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι αν Α είναι ένα ενδεχόμενο μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής τότε

$$P(X \in A) = \int_{A} f(x)dx$$

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

Ορισμός Για κάθε τυχαία μεταβλητή, διακριτή ή συνεχή ορίζεται η ακόλουθη συνάρτηση

$$F(x) = P(X \leq x)$$

η οποία ονομάζεται **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** ή **συνάρτηση κατανομής**. Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή μικρότερη ή ίση με το x. Μέσω της $F(x)$ μπορούμε να υπολογίσουμε και την πιθανότητα P(X>α). Πράγματι $P(X > \alpha) = 1 - P(X \leq \alpha) = 1 - F(\alpha)$.

Με βάση τα προηγούμενα εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει το ακόλουθο θεώρημα που δίνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμές μέσα σε ένα διάστημα (α,β].

Παράδειγμα

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη τιμή μεταξύ δύο ζαριών. Να κατασκευαστεί η συνάρτηση πυκνότητας και κατανομής για την X καθώς και το διάγραμμα κατανομής.

Λύση

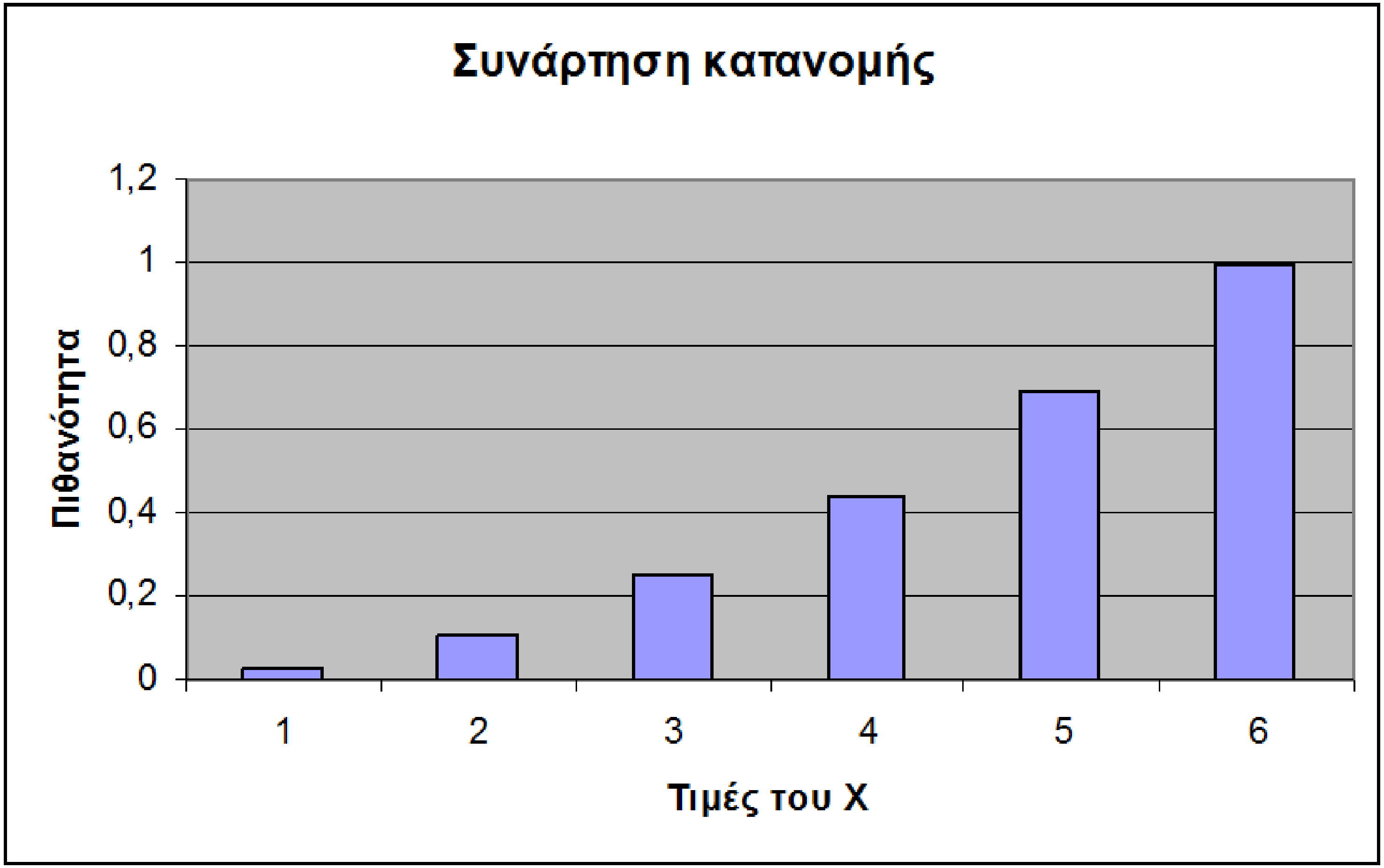
X	Ενδεχόμενα	P
1	(1,1)	1/36=0,027
2	(1,2), (2,1), (2,2)	3/36
3	(1,3), (3,1) (3,2), (2,3) (3,3)	5/36
4	(1,4), (4,1) (4,2), (2,4) (3,4), (4,3) (4,4)	7/36
5	(1,5), (5,1) (2,5), (5,2) (5,3), (3,5), (5,4), (4,5), (5,5)	9/36
6	(1,6), (6,1) (2,6), (6,2), (6,3), (3,6), (6,4), (4,6), (6,5), (5,6), (6,6)	11/36

Λύση

Έτσι καταλήγουμε στις συναρτήσεις πυκνότητας και κατανομής:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}027 & X = 1 \\ 0{,}081 & X = 2 \\ 0{,}135 & X = 3 \\ 0{,}189 & X = 4 \\ 0{,}243 & X = 5 \\ 0{,}297 & X = 6 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & X < 1 \\ 0{,}027 & X < 2 \\ 0{,}11 & X < 3 \\ 0{,}25 & X < 4 \\ 0{,}44 & X < 5 \\ 0{,}69 & X < 6 \\ 1 & X \geq 6 \end{cases}$$

Το διάγραμμα της κατανομής είναι το:


Συνάρτηση κατανομής
Πιθανότητα
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
1
2
3
4
5
6
Τιμές του Χ

Παράδειγμα

Το πλήθος των ατόμων που κερδίζουν ποσά μεγαλύτερα των 10.000 ευρώ σε μία μέρα στην Ελλάδα ακολουθεί τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x)=\begin{cases} ax & x=0,1,2,3,4,5,6,7,8 \\ a\cdot(25-x) & x=9,10,11,12,13 \end{cases}$$

i) Να βρεθεί το α.
ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να κερδίζουν πάνω από 10.000 ευρώ μέχρι και 5 άτομα.
iii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να κερδίζουν πάνω από 10.000 ευρώ περισσότερα από 5 άτομα.
iv) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να κερδίζουν πάνω από 10.000 ευρώ τουλάχιστον 5 άτομα δεδομένου ότι ξέρουμε ότι κερδίζου πάνω από 10.000 ευρώ τουλάχιστον 3 άτομα.

Λύση

i) Ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{8} ax = a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a=36a$

Ακόμα έχουμε $\sum_{i=9}^{13} a\cdot(25-x) = 16a+15a+14a+13a+12a=70a$

Εφόσον η συνάρτηση είναι πυκνότητας πιθανότητας ισχύει

$$\sum_{i=1}^{8} ax + \sum_{i=1}^{8} a\cdot(25-x) = 106a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{106}$$

ii) Η περίπτωση μέχρι και 5 ατόμα δίνεται από το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{106}x = \frac{1}{106}(1+2+3+4+5) = \frac{15}{106}$$

iii) Άρα η πιθανότητα για περισσότερα από 5 άτομα είναι $\frac{91}{106}$

iv) Η ζητούμενη πιθανότητα $P(X \geq 5 \mid X \geq 3) = \dfrac{P(X\geq 5)}{P(X \geq 3)} = \dfrac{\frac{96}{106}}{\frac{103}{106}} = \dfrac{96}{103}$

Παράδειγμα

Έστω ότι ο χρόνος αναμονής σε μία τράπεζα περιγράφεται από μια τυχαία μεταβλητή Χ με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x/4 & , \quad 0 \le x < 2 \\ x/8 & , \quad 2 \le x < 8 \\ 1 & , \quad x \ge 8 \end{cases}$$

Να υπολογισθεί η πιθανότητα

1. να περιμένει κάποιος το πολύ 3 λεπτά
2. να περιμένει κάποιος από 1 έως 4 λεπτά
3. να περιμένει κάποιος άλλα 3 λεπτά δεδομένου ότι έχει περιμένει ήδη 2,5 λεπτά

Λύση

1. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3}{8}$.
2. Η πιθανότητα να περιμένει κάποιος από 1 έως 4 λεπτά είναι

$$P(1 \leq X \leq 4) = F(4) - F(1) = \frac{4}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. Η πιθανότητα είναι

$$P(X \leq 5{,}5 \mid X \geq 2{,}5) = \frac{P(X \leq 5{,}5 \ \cap \ X \geq 2{,}5)}{P(X \geq 2{,}5)} = \frac{P(2{,}5 \leq X \leq 5{,}5)}{P(X \geq 2{,}5)} =$$

$$= \frac{F(5{,}5) - F(2{,}5)}{1 - P(X < 2{,}5)} = \frac{3}{5{,}5} = \frac{6}{11}$$

Παράδειγμα

Ο χρόνος επίλυσης προβλημάτων (σε sec) από ηλεκτρονικό υπολογιστή είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \le x < 3 \\ \alpha(6-x), & 3 \le x \le 6. \end{cases}$$

i) Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α .

ii) Ποια η πιθανότητα κατά την επίλυση ενός προβλήματος ο υπολογιστής να χρειάζεται

α). περισσότερα από 3 sec;

β). μεταξύ 1,5 και 4,5 sec;

iii) Είναι τα ενδεχόμενα των ανωτέρω δύο περιπτώσεων α και β ανεξάρτητα;

Λύση

i. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \le x < 3 \\ \alpha(6-x), & 3 \le x \le 6 \\ 0, & x \notin [0,6]. \end{cases}$$

Αυτή προφανώς είναι μη αρνητική για κάθε $x \in$ R αν $\alpha > 0$. Έτσι, προκειμένου η f να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αρκεί να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει η ισότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

δηλαδή

$$\int_0^3 \alpha x\, dx + \int_3^6 \alpha\,(6-x)dx = 1.$$

Όμως

$$\int_0^3 \alpha x\, dx + \int_3^6 \alpha(6-x)dx = \alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 6\alpha[x]_3^6 - \alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^6 = \frac{9}{2}\alpha + 18\alpha - 18\alpha + \frac{9}{2}\alpha = 9\alpha$$

,

και, ως εκ τούτου, η ζητούμενη τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha = \dfrac{1}{9}$.

Λύση

ii. Αν συμβολίσουμε με X την τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στο χρόνο επίλυσης των προβλημάτων (σε sec), η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x & x\in[0,3]\\ \frac{1}{9}(6-x) & x\in[3,6]\end{cases}$$

Η πιθανότητα κατά την οποία ο υπολογιστής χρειάζεται περισσότερα από 3 sec είναι

$$P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\int_{-\infty}^{3}f(x)dx=1-\int_{0}^{3}\frac{1}{9}x\,dx=1-\frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=1-\frac{1}{9}\left[\frac{9}{2}-0\right]=0.5$$

και η πιθανότητα κατά την οποία ο υπολογιστής χρειάζεται περισσότερα από 1,5 και λιγότερα από 4,5 sec είναι

$$P(1{,}5<X\le 4{,}5)=P(X\le 4{,}5)-P(X\le 1{,}5)=\int_{-\infty}^{4{,}5}f(x)dx-\int_{-\infty}^{1{,}5}f(x)dx=$$

$$\int_{1{,}5}^{4{,}5}f(x)dx=\int_{1{,}5}^{3}f(x)dx+\int_{3}^{4{,}5}f(x)dx=\int_{1{,}5}^{3}\frac{1}{9}x\,dx+\int_{3}^{4{,}5}\frac{1}{9}(6-x)dx$$

δηλαδή

$$P(1{,}5<X\le 4{,}5)=\frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1.5}^{3}+\frac{2}{3}[x]_3^{4{,}5}-\frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{4{,}5}=\frac{1}{9}\cdot\frac{9-2{,}25}{2}+\frac{2}{3}\cdot(4{,}5-3)-\frac{1}{9}\cdot\frac{20{,}25-9}{2}$$

$$=0{,}375+1-0{,}625=0{,}75$$

Λύση

iii. Τα ενδεχόμενα των ανωτέρω περιπτώσεων α και β του Ερωτήματος ii είναι ανεξάρτητα αν

$$P(\mathrm{X} > 3 \cap (1{,}5 < \mathrm{X} \leq 4{,}5)) = P(3 < \mathrm{X} \leq 4{,}5),$$

δηλαδή εάν

$$P(3 < \mathrm{X} \leq 4{,}5) = 0{,}5 \times 0{,}75 = 0{,}375.$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας υπολογίζουμε

$$P(3 < \mathrm{X} \leq 4{,}5) = P(\mathrm{X} \leq 4{,}5) - P(\mathrm{X} \leq 3) = \int_{-\infty}^{4,5} f(x)dx - \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \int_{3}^{4,5} f(x)dx =$$

$$= \int_{3}^{4,5} \frac{1}{9}(6 - x)dx = \frac{2}{3}[x]_3^{4.5} - \frac{1}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^{4.5} = 1 - 0{,}625 = 0{,}375$$

και επομένως τα εν λόγω ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Παράδειγμα

Ρίχνουμε ένα νόμισμα 4 φορές αν Χ ο αριθμός της ένδειξης 'Γράμματα' να κατασκευαστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας καθώς και η συνάρτηση κατανομής της Χ.

Λύση

Καταγράφουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα καθώς και τις τιμές του Χ σε κάθε περίπτωση:

Αποτέλεσμα	Χ	Αποτέλεσμα	Χ
ΓΓΓΓ	4	ΚΚΓΓ	2
ΚΓΓΓ	3	ΓΚΓΚ	2
ΓΚΓΓ	3	ΓΓΚΚ	2
ΓΓΚΓ	3	ΚΚΚΓ	1
ΓΓΓΚ	3	ΚΚΓΚ	1
ΚΓΚΓ	2	ΚΓΚΚ	1
ΚΓΓΚ	2	ΓΚΚΚ	1
ΓΚΚΓ	2	ΚΚΚΚ	0

Λύση

Οπότε για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{16} & x = 0 \\ \dfrac{4}{16} & x = 1 \\ \dfrac{6}{16} & x = 2 \\ \dfrac{4}{16} & x = 3 \\ \dfrac{1}{16} & x = 4 \\ 0 & x \neq 0,1,2,3,4 \end{cases}$$

Λύση

Και για την κατανομή:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{1}{16} & x<1 \\ \dfrac{5}{16} & x<2 \\ \dfrac{11}{16} & x<3 \\ \dfrac{15}{16} & x<4 \\ 1 & x\geq 4 \end{cases}$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = kx - \frac{1}{4} \quad , \quad 2 \le x \le 6$$

i) Να βρεθεί το k έτσι ώστε η $f(x)$ να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής.

ii) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F(x)$

iii) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(3 < X < 4)$

Λύση

i) Θα πρέπει

$$\int_2^6 f(x)dx = 1 \Rightarrow k\int_2^6 xdx - \frac{1}{4}\int_2^6 dx = 1 \Rightarrow k\left(\frac{36}{2} - \frac{4}{2}\right) - \frac{1}{4}(6-2) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16k - 1 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$$

Λύση

ii) $F(x)=\int_2^x(\frac{1}{8}t-\frac{1}{4})dt=\frac{1}{8}\int_2^x tdt-\frac{1}{4}\int_2^x dt=\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2-2^2}{2}-\frac{1}{4}\cdot(x-2)=\frac{(x-2)^2}{16}$

Επομένως η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<2\\ \dfrac{(x-2)^2}{16} & , \quad 2\le x\le 6\\ 1 & , \quad x>6\end{cases}$$

iii) $P(3<X<4)=\int_3^4\left(\frac{x}{8}-\frac{1}{4}\right)dx=\frac{1}{8}\left(\frac{4^2}{2}-\frac{3^2}{2}\right)-\frac{1}{4}(4-3)=\frac{3}{16}$

Παράμετροι τυχαίων μεταβλητών

- **Μέση τιμή ή αναμενόμενο κέρδος ή μαθηματική ελπίδα** μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζουμε τη ποσότητα E(X) όπου

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i) & , \text{ για διακριτή τ.μ.}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx & , \text{ για συνεχή τ.μ.}\end{cases}$$

- **Μέση τιμή συνάρτησης τυχαίας μεταβλητής**. Έστω η συνάρτηση g(x) για την οποία θέλουμε να βρούμε την μέση τιμή. Έχουμε

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\cdot P(X=x_i) & , \text{ για διακριτή τ.μ.}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx & , \text{ για συνεχή τ.μ.}\end{cases}$$

- **Διασπορά ή Διακύμανση** μιας τυχαίας μεταβλητής X ορίζουμε την ποσότητα

$$\sigma^2(X)\equiv VAR(X)\equiv E((X-E(X))^2)$$

Παράδειγμα :

Στη ρίψη ζαριού η μέση τιμή είναι :

$$\mu = E\{X\} = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + \ldots\ldots + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 3,5$$

και δεν αποτελεί δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος.

Παράδειγμα :

Η διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος έχει εκθετική κατανομή, δηλ.

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \qquad \text{για} \qquad x \geq 0$$

$$\mu = E\{X\} = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \tfrac{1}{\lambda}$$

Ιδιότητες
Μέσης τιμής - Διακύμανσης

Ιδιότητες μέσης τιμής

1. $E(\alpha)=\alpha$, $\alpha \in R$
2. $E(X+\beta) = E(X)+\beta$, $\beta \in R$
3. $E(\alpha X)=\alpha E(X)$, $\alpha \in R$
4. Αν $Y=\alpha X+\beta$ τότε $E(Y)=\alpha \cdot E(X)+\beta$, α , $\beta \in R$

Ιδιότητες διακύμανσης

1. $VAR(\alpha)= 0$, $\alpha \in R$
2. $VAR(X+\beta) = VAR(X)$, $\beta \in R$
3. $VAR(\alpha X)=\alpha^2 \cdot VAR(X)$ $\alpha \in R$
4. Αν $Y=\alpha X+\beta$ τότε $VAR(Y)= \alpha^2 \cdot VAR(X)$, α, $\beta \in R$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής Χ είναι:

$$f(x) = \begin{cases} 8x(k-x) & x \in [0,k] \\ 0 & x \notin [0,k] \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η σταθερά k

β) Να υπολογισθούν η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και η πιθανότερη τιμή

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα P(x<k/3 | x<k/2)

Λύση

α) $\int_0^k 8x\cdot(k-x)dx = \int_0^k 8xkdx - \int_0^k 8x^2dx = 8k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^k - 8\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^k = 4\cdot k^3 - \frac{8\cdot k^3}{3} = \frac{4}{3}k^3$

Για να είναι συνάρτηση πιθανότητας ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(x)dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}k^3 = 1 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0{,}908$$

β)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx = \int_0^{0{,}908} x\cdot 8x\cdot(0{,}908-x)dx = 8\cdot 0{,}908\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{0{,}908} - 8\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{0{,}908}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot 0{,}908^4 = 0{,}452\ .$$

Ισχύει ότι $VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ με $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx$

Λύση

Έχουμε

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx = \int_0^{0,908} x^2 \cdot 8x \cdot (0{,}908 - x)\,dx = 8 \cdot 0{,}908 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{0,908} - 8 \cdot \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{0,908}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{5} 0{,}908^5 = 0{,}247$$

Οπότε η διασπορά βρίσκεται από τον τύπο $VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ =0,247-$0{,}452^2$ =0,247-0,204=0,039 και η τυπική απόκλιση είναι ίση με $\sqrt{VAR(X)} =$ $\sqrt{0{,}039} = 0{,}197$

Πιθανότερη τιμή έχει η συνάρτηση στο σημείο που η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) παρουσιάζει μέγιστο. Από το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της $f(x) = 8x \cdot (0{,}908 - x)$ έχουμε:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (8x \cdot (0{,}908 - x))' = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot 0{,}908 - 16 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}454$. Παρατηρούμε ότι στο σημείο αυτό (όπως και σε κάθε σημείο) η δεύτερη παράγωγος είναι -16 άρα η συνάρτηση παρουσιάζει στο σημείο αυτό μέγιστο και η τιμή $x = 0{,}454$ είναι η επικρατούσα τιμή.

Λύση

γ) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(x < \frac{k}{3} / x < \frac{k}{2})$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας:

$$P(x < \frac{k}{3} / x < \frac{k}{2}) = \frac{P(x < \frac{k}{3} \cap x < \frac{k}{2})}{P(x < \frac{k}{2})} = \frac{P(x < \frac{k}{3})}{P(x < \frac{k}{2})} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{k}{3}\right)^3}{\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Άλυτες Ασκήσεις

1) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = k \cdot (16 - x), \qquad x = 1,2,\ldots 15$$

ι) Να βρεθεί το k ώστε να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
ιι) Να υπολογιστούν η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $VAR(X)$
ιιι) Να υπολογιστούν η μέση τιμή $E(Y)$ και η διασπορά $VAR(X)$ για τη μεταβλητή $Y = (X-1)\cdot(X-2)$.

2) Ο χρόνος σωστής λειτουργίας ενός λαμπτήρα είναι τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} c/x^3 & x > 180 \\ 0 & x \le 180 \end{cases}$$

(i) Ποια η πιθανότητα ο λαμπτήρας να λειτουργεί για τουλάχιστον 450 ώρες;
(ii) Πώς μεταβάλλεται αυτή η πιθανότητα εάν είναι γνωστό ότι ο λαμπτήρας λειτούργησε σωστά τις πρώτες 200 ώρες;
(iii) Σε δωμάτιο με 10 λαμπτήρες, ποια η πιθανότητα να χαλάσει ακριβώς ένας λαμπτήρας μέσα στις πρώτες 200 ώρες;

3) Έστω ότι ο χρόνος επισκευής σε ώρες X ενός Η/Υ είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 < x < 4 \\ 0 & x \notin (0,4) \end{cases}$$

και ότι το κόστος επισκευής Y του Η/Υ είναι επίσης τυχαία μεταβλητή η οποία δίνεται από την σχέση $Y = 30 + 15X$.

Να υπολογισθούν:

(i) ο αναμενόμενος χρόνος επισκευής, και

(ii) το αναμενόμενο κόστος επισκευής ενός Η/Υ.

4) Ένα κανονικό νόμισμα ρίχνεται n φορές. Έστω X το πλήθος εμφάνισης «κεφαλής».

Να υπολογιστούν τα μεγέθη : i) E(X), ii) E (nX), E(X) iii) VAR(X) iv)VAR(nX)

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης