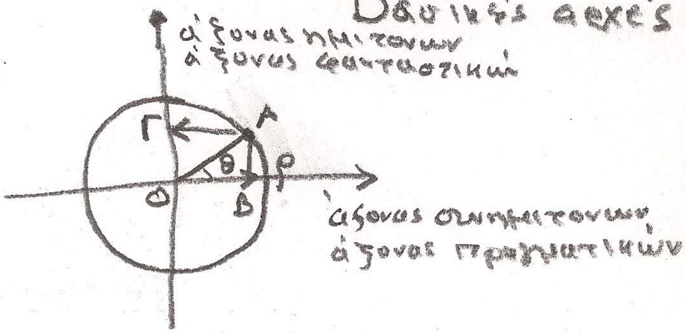
Βασικές αρχές Σημάτων & Συστημάτων



$$\vec{O A} = \vec{O B} + \vec{O \Gamma}$$
$$= \rho\cos\theta + j\rho\sin\theta$$

$j=\sqrt{-1}$ αλλού γράφεται $i=\sqrt{-1}$

ένας άλλος τρόπος γραφής

$$\vec{O A} = \rho e^{j\theta} \leftarrow \text{γωνία}$$

↑ μέτρο

Κάθε μιγαδικός αριθμός ορίζεται από το μέτρο ρ & τη γωνία.

$$|e^{j\theta}| = |\cos\theta + j\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = 1$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} = \cos\theta$$

$$\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} = \sin\theta$$

Τύποι Euler

Με τη χρήση των τύπων αυτών μπορούμε να μεταφερθούμε από τα εκθετικά στα συνημίτονα και αντίστροφα.

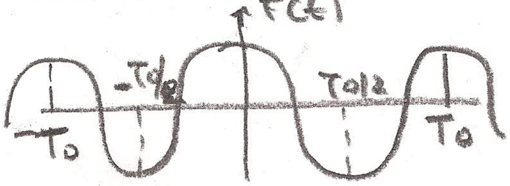
$$f(t) = A\cos(2\pi f_0 t+\theta) = A\cos(\omega_0 t+\theta)$$

πλάτος: A, συχνότητα (Hz): f_0

$f_0 = \frac{1}{T_0}$, T_0: περίοδος

$\omega_0 = 2\pi f_0$ κυκλική συχνότητα (rad/sec)

Η έννοια της συχνότητας.



Στα πραγματικά σήματα το συνημίτονο έχει μία και μοναδική συχνότητα την f_0 (ω_0).
Αν χρησιμοποιήσουμε τη μιγαδική μορφή, έχουμε δύο συχνότητες την f_0 (ω_0) και την $-f_0$ ($-\omega_0$), $f(t) = \frac{A}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t}$

(θέτοντας $\theta=0$ για ευκολία)

Γιατί συνημίτονα και εκθετικά;

Γιατί οι παράγωγοί τους και τα ολοκληρώματά τους μας δίνουν πάλι συνημίτονα και εκθετικά.

$$\frac{d}{dt}\cos\omega_0 t = -\omega_0\sin\omega_0 t = \omega_0\cos(\omega_0 t+\pi/2)$$

$$\int\cos\omega_0 t = \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t = \frac{1}{\omega_0}\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})$$

$$\int e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{j\omega_0}e^{j\omega_0 t}, \quad \frac{d e^{j\omega_0 t}}{dt} = j\omega_0 e^{j\omega_0 t}$$

ΣΗΜΑΤΑ:

Περιοδικά: $f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, T η περίοδος

Μη περιοδικά: Δεν υπάρχει T : $f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Ψηφιακά: Λαμβάνουν διακριτές τιμές (στα μεγέθη που παρατηρούμε)

Αναλογικά: Λαμβάνουν συνεχείς τιμές (")

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Γραμμικά: Αν με είσοδο $f_1(t)$ η έξοδος είναι $y_1(t)$

Αν με είσοδο $f_2(t)$ η έξοδος είναι $y_2(t)$

Με είσοδο $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$ η έξοδος είναι $\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$

π.χ. $y(t) = \frac{d}{dt} f(t)$, $y(t) = \alpha f(t)$

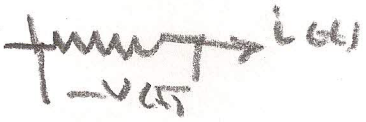
όχι όμως $y(t) = \alpha f(t) + \beta$, $y(t) = \alpha f^2(t)$

Αναλλοίωτα ως προς το χρόνο. $f(t) \to y(t) \Rightarrow f(t-\tau) \to y(t-\tau)$

Αιτιατά: Η έξοδος $y(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 εξαρτάται μόνο από εισόδους $f(t)$, $t \le t_0$ και όχι από εισόδους $f(t)$ $t > t_0$.

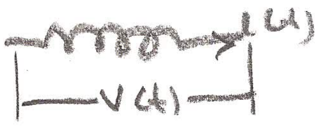
Σχέση εισόδου εξόδου για

αντιστάσεις: $V = iR$



πυκνωτές: $V = \frac{1}{C} \int i(t)\,dt$

πηνία: $V = L \frac{di(t)}{dt}$

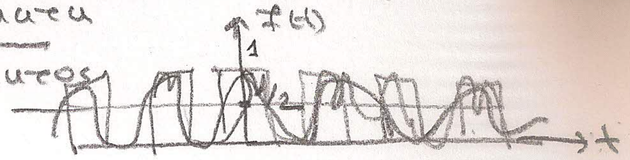


Τα συστήματα που αποτελούνται από L, R, C είναι γραμμικά, αναλλοίωτα ως προς το χρόνο και αιτιατά. Δεν δημιουργούν νέες συχνότητες (αφού κάνουν πολλαπλασιασμό, ολοκλήρωση ή παραγώγιση)

"Ένα σήμα περιέχει συχνότητες.- δηλαδή μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα (ολοκλήρωμα) κάποιων (διακριτών ή απείρων) συνημιτόνων (ή εκθετικών)

Περιοδικά σήματα

Προσέγγιση σήματος



Το σήμα $f(t)$,

μπορεί να προσεγγισθεί από τη μέση του τιμή $1/2$ (χάνονται όλες οι άλλες) ή καλύτερα από το άθροισμα του $1/2$ με ένα συνημίτονο ή ακόμη καλύτερα αν προσθέσουμε και ένα συνημίτονο διπλάσιας συχνότητας κ.ο.κ.

Γενικά ένα περιοδικό σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συνημιτονοειδών σημάτων $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$

(όπου τα a_0, a_n, b_n υπολογίζονται: $a_0=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\,dt$

$$a_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt)$$

Ισοδύναμα: $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t+\theta_n)$

(τα c_n, θ_n μπορεί να υπολογισθούν από τα a_0, a_n, b_n).

Η σειρά αυτή ονομάζεται τριγωνομετρική σειρά Fourier.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τα εκθετικά:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$, εκθετική σειρά Fourier

$$F_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$ (τα F_n μπορεί να υπολογισθούν από τα a_0, a_n, b_n)

Δηλαδή τα περιοδικά σήματα έχουν διακριτές συχνότητες πολλαπλάσιες της βασικής συχνότητας: nf_0, $n\omega_0$. Η "δύναμη" της κάθε συχνότητας δίνεται από τους συντελεστές Fourier.

Μη περιοδικά σήματα

Η σειρά Fourier γίνεται ολοκλήρωμα Fourier: (μετασχηματισμός)

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$ (μερικές φορές ορίζεται και ως $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}\,dt$)

Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$