ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Βασικές Ταυτότητες:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Μετασχηματισμοί:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$$

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x$$

$$\cos(\pi \pm x) = -\cos x$$

Αθροίσματα:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Γινόμενα:

$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Στους παρακάτω τύπους ισχύει οτι: α) u, υ, w είναι συναρτήσεις του x,
β) c, n είναι σταθερές, γ) ε=2.7128.... είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων,
δ) lnu είναι ο φυσικός λογάριθμος του u (u > 0).

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad [n \text{ ακέραιος ή πραγματικός}]$$

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u\upsilon) = u\frac{d\upsilon}{dx} + \upsilon\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon(du/dx) - u(d\upsilon/dx)}{\upsilon^2}$$

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad [\text{παράγωγος σύνθετης συνάρτησης}]$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int a dx = ax$$

$$\int x^n dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, & n \neq -1 \\ \ln x, & n = -1 \end{cases}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln\cos x$$

$$\int \cot x dx = \ln\sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\left.\int f(g(x))dx = \int f\big(g(x)\big)\frac{d\big(g(x)\big)}{g'(x)}\quad\right\}$$ Ολοκλήρωμα σύνθετης συνάρτησης

<u>Ορισμένο ολοκλήρωμα:</u>

Αν $g'(x) = f(x)$ τότε ορίζουμε ως ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_b^a f(x)dx = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Επίσης για τα ορισμένα ολοκληρώματα ισχύουν:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

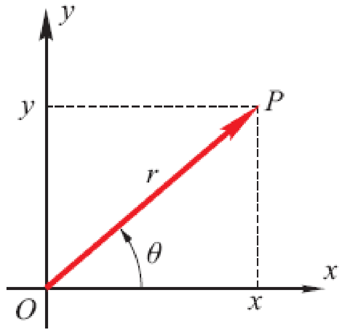
Αν a, b πραγματικοί αριθμοί και $i = \sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα, τότε ο
z = a + bi είναι ένας μιγαδικός αριθμός.
Ο συζυγής μιγαδικός του είναι ο z*=a-bi.
Το πραγματικό και μιγαδικό μέρος του z είναι αντίστοιχα: Re(z)=a και Im(z)=b.

Το Μιγαδικό επίδεδο

Ο μιγαδικός αριθμός x + yi παριστάνεται από ένα σημείο P με τετμημένη x και τεταγμένη y.
Το $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι το μήκος του διανύσματος OP.
Η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού είναι:

$$x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Όπου r είναι το μέτρο (ή απόλυτη τιμή) του μιγαδικού και συμβολίζεται: $|x + yi|$ και θ η γωνία (ή το όρισμα) του μιγαδικού αριθμού και συμβολίζεται με $\arg(x + yi)$.



Πράξεις μιγαδικών αριθμών

$$(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

Τύπος Euler και πράξεις

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

ΤΥΠΟΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Ανάλυση Fourier περιοδικού σήματος:

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{j2\pi nt}{T_0}\right)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_p(t)\exp\left(\frac{-j2\pi nt}{T_0}\right)dt, \qquad n = \ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

Συνέλιξη συναρτήσεων:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Μετασχηματισμός Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\exp(j2\pi ft)df$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\exp(-j2\pi ft)dt$$

Εναλλακτικός ορισμός μετασχηματισμού Fourier:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt$$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

- Γραμμικότητα: $ag_1(t)+bg_2(t) \leftrightarrow aG_1(f)+bG_2(f)$
- Αλλαγή κλίμακας στο χρόνο: $g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}G(\frac{f}{a})$
- Δυϊσμός: $g(t) \leftrightarrow G(f) \Leftrightarrow G(t) \leftrightarrow g(-f)$
- Χρονική ολίσθηση: $g(t\text{-}t_0) \leftrightarrow G(f)\exp\{-j2\pi f t_0\}$
- Ολίσθηση συχνότητας: $g(t)\exp\{j2\pi f_c t\} \leftrightarrow G(f\text{-}f_c)$
- Συζυγείς συναρτήσεις: $g^*(t) \leftrightarrow G^*(-f)$
- **Συνέλιξη:**

$$g_1(t) * g_2(t) \longleftrightarrow G_1(f)G_2(f)$$
$$g_1(t)g_2(t) \longleftrightarrow G_1(f) * G_2(f)$$

Η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση (συνάρτηση Δέλτα):

$$\delta(t) = 0 \quad \gamma\iota\alpha\, \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\, t \neq 0\, \kappa\alpha\iota$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)dt = 1$$

Μερικές ιδιότητες της δ(t):

$$a)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

$$b)\quad \delta(t) = \frac{d[u(t)]}{dt} \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad \eta \quad u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (\mu o\nu\alpha\delta\iota\acute{\alpha}\alpha\ \beta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta)$$

$$c)\quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$d)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)x(t)dt = x(t_0)$$

$$e)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta^n(t)dt = (-1)^n x^n(0)$$