Αρχές και Εφαρμογές Σημάτων και Συστημάτων

Ασκήσεις

Καθηγητής Χ. Δουληγέρης

E-mail: cdoulig@unipi.gr

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

Άσκηση 1 (Ιδιότητες Σημάτων και Συστημάτων):

Έστω τα σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$, τα οποία είναι περιοδικά με περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα. Πότε το σήμα $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ είναι περιοδικό;

Λύση $x_1(t) = x_1(t+T_1) = x_1(t+mT_1)$ $\forall\, m$ ακέραιο

$x_2(t) = x_2(t+T_2) = x_2(t+nT_2)$ $\forall\, n$ ακέραιο

Επειδή $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, θέλουμε να υπάρχει T_3 ώστε

$$x(t+T) = x_1(t+T_3) + x_2(t+T_3) =$$

$$x_1(t+kT_3) + x_2(t+kT_3)$$

Αν $T_3 = mT_1 = nT_2$ τότε η παραπάνω σχέση ισχύει διότι $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{n}{m}$

Αν $\dfrac{n}{m}$ είναι άρρητος, δεν υπάρχει κοινός πολλαπλασιαστής ρητός αριθμός.

Άσκηση 2 (Ιδιότητες Σημάτων και Συστημάτων):

Είναι τα σήματα (α) $\boldsymbol{x_1}(t) = cos\frac{1}{3}t + cos\frac{1}{4}t$

(β) $\boldsymbol{x_2}(t) = cost + 2sin\sqrt{2}t$

περιοδικά;

Λύση

(α) $cos\frac{1}{3}t$: Περίοδος $T_1 = 6\pi$

$cos\frac{1}{4}t$: Περίοδος $T_2 = 8\pi$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Άρα $\boldsymbol{x_1}(\boldsymbol{t})$ **περιοδικό** με περίοδο $\mathrm{T} = 4T_1$=$3T_2 = 24\pi$

(β) $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$ άρρητος αριθμός, συνεπώς $\boldsymbol{x_2}(\boldsymbol{t})$ **μη περιοδικό.**

Άσκηση 3 (Σειρά Fourier):

Βρείτε τη σειρά Fourier του σήματος $x(t) = cos\omega_0 + sin^2\omega_0 t$.

Λύση

$$\underbrace{x(t)}_{\text{τριγωνομετρική}} = cos\omega_0 t + \frac{1}{2}(1 - cos2\omega_0 t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_0} + \underbrace{1}_{a_1}.\, cos\omega_0 t - \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_2} cos2\omega_0 t$$

Θυμηθείτε ότι:

$$sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}(1 - cos2\omega_0 t)$$

Για την εκθετική χρησιμοποιούμε τη σχέση του Euler

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) + [\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})]^2$$

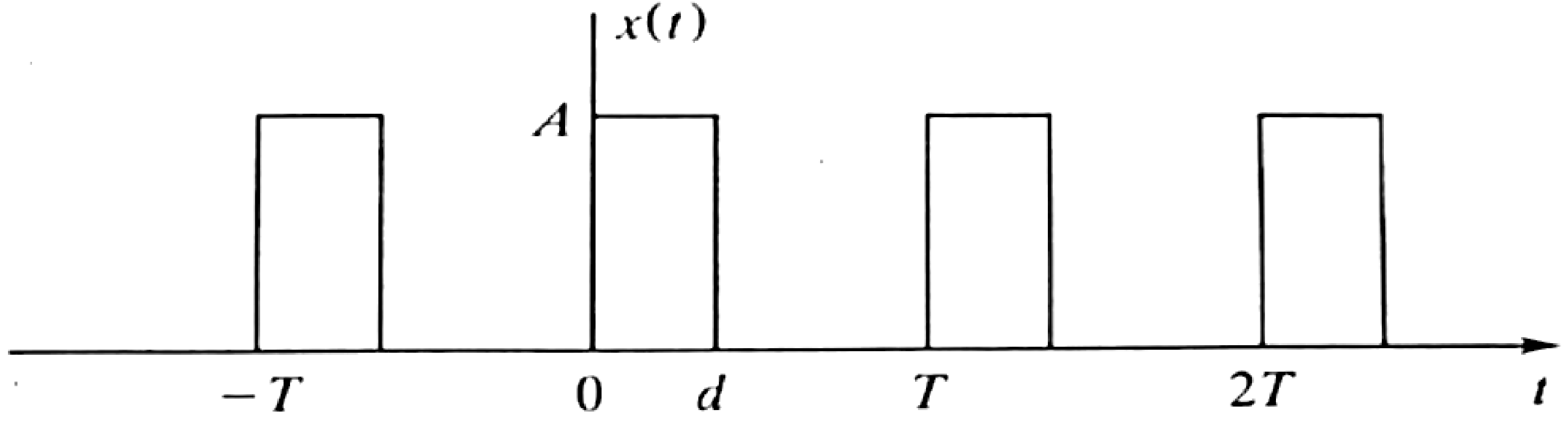
$$= \underbrace{-\frac{1}{4}}_{c_2} e^{-2j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_1} e^{-j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_{-1}} e^{j\omega_0 t} - \underbrace{\frac{1}{4}}_{c_{-2}} e^{2j\omega_0 t}$$

Θυμηθείτε ότι: $j^2 = -1$

Άσκηση 4:

Βρείτε και σχεδιάστε το φάσμα του περιοδικού “τρένου” ορθογωνίων $x(t)$.

Λύση



(a)

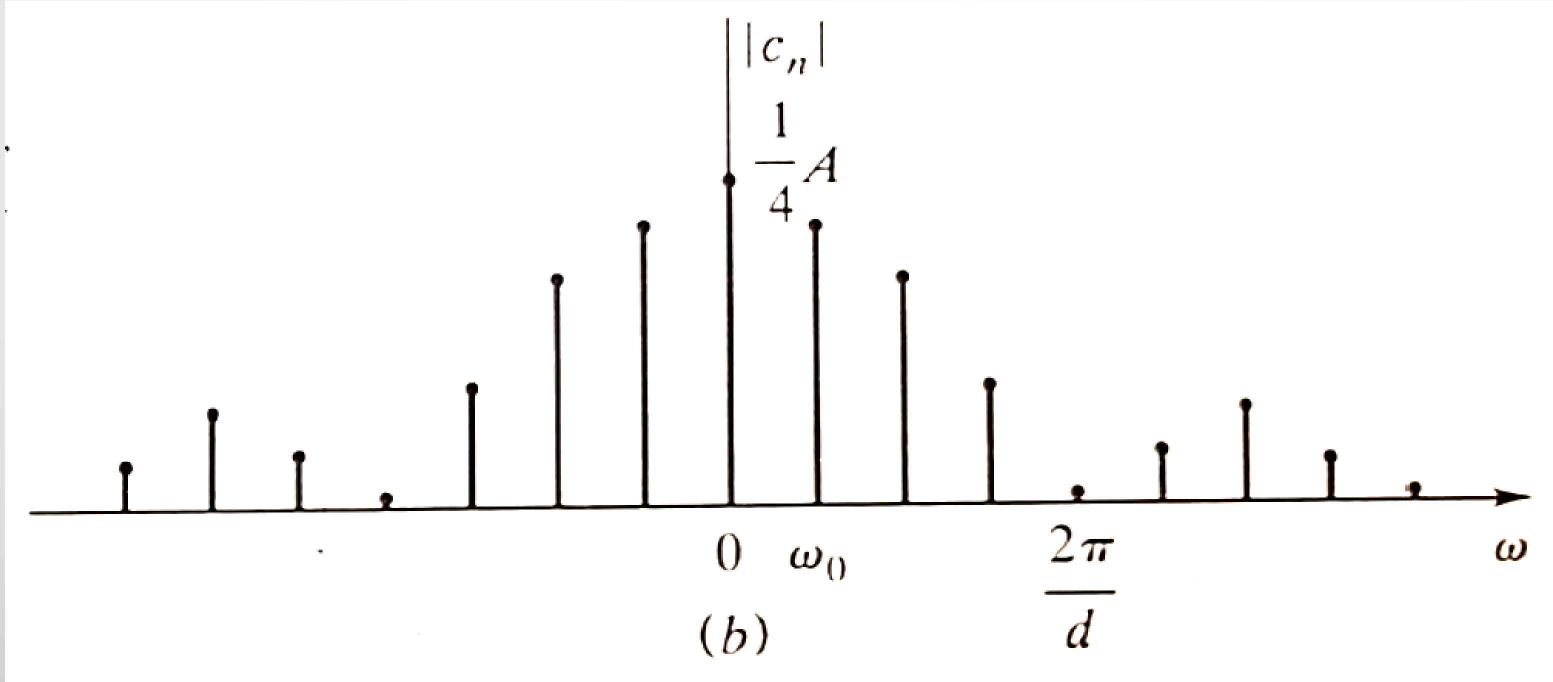
$d = {}^{T}/_{4}$

$$F_n = c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \cdots = \frac{Ad}{j}.\frac{\sin(n\omega_0\, {}^{d}/_{2})}{n\omega_0\, {}^{d}/_{2}}.e^{-jn\omega_0 {}^{d}/_{2}}$$

Παρατηρήστε ότι $|c_n| = 0$ όταν $n\omega_0\, {}^{d}/_{2} = m\pi \Leftrightarrow n\omega_0 = \dfrac{m2\pi}{d}$

Άσκηση 4 (συνέχεια):

Λύση (συνέχεια) όταν $d = {}^{T}/_{4}$ $|c_n| = \frac{A}{4} \frac{\sin({}^{n\pi}/_{4})}{{}^{n\pi}/_{4}}$



Σχεδιάσαμε το μέτρο. Η φάση θα είναι 0° ή 180° ανάλογα αν το c_n είναι θετικό ή αρνητικό.

Άσκηση 5 (Ιδιότητες Σημάτων και Συστημάτων):

Είναι το σύστημα $y(t) = ax(t) + b$ γραμμικό;

Λύση

Έστω είσοδος $f_1(t) \to y_1(t) = ax_1(t) + b$

-- // -- $f_2(t) \to y_2(t) = ax_2(t) + b$

-- // -- $f_1(t) + f_2(t) \to y(t) = a(x_1(t) + x_2(t)) + \mathrm{b} \neq y_1(t) + y_2(t)$

$$= a(x_1(t) + x_2(t)) + 2\mathrm{b}$$

Άρα το σύστημα είναι **μη γραμμικό**

Άσκηση 6 (Ιδιότητες Σημάτων και Συστημάτων):

Είναι το σύστημα $y(t) = x(t) \cdot cos\omega_0 t$ γραμμικό;

Λύση

$$y[x_1(t) + x_2(t)] = (x_1(t) + x_2(t))\, cos\omega_0 t = \underbrace{x_1(t)\, cos\omega_0 t}_{y_1(t)} + \underbrace{x_2(t)\, cos\omega_0 t}_{y_2(t)}$$

Άρα το σύστημα $y(t)$ είναι **γραμμικό.**

Το σύστημα όμως $y(t) = (a + x(t))cos\omega_0 t$ **δεν είναι γραμμικό.**

Άσκηση 7 (Ιδιότητες Σημάτων και Συστημάτων):

Είναι το σύστημα $y(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

α) γραμμικό;

β) αναλλοίωτο ως προς τον χρόνο;

Λύση

α) Αν βάλουμε είσοδο το $x_1(t)+x_2(t)$ τότε η έξοδος θα είναι $y_1(t)+y_2(t)$

Άρα το σύστημα είναι **γραμμικό.**

β) Αντιπαράδειγμα: Ας βάλουμε $x_1(t) = cos(\frac{2\pi}{T})t \Rightarrow y_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(nT)\delta(t-nT)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\frac{2\pi}{T}nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

Αν βάλουμε είσοδο το $x_2(t) = x_1(t - \frac{T}{4}) = sin(\frac{2\pi}{T}t)$ τότε

$$y_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\frac{2\pi}{T}nT)\delta(t-nT) = 0 \neq y_1(t-\frac{T}{4})$$

$$= \sin(2\pi n) = 0$$

Άσκηση 8 (Μετασχηματισμός Fourier):

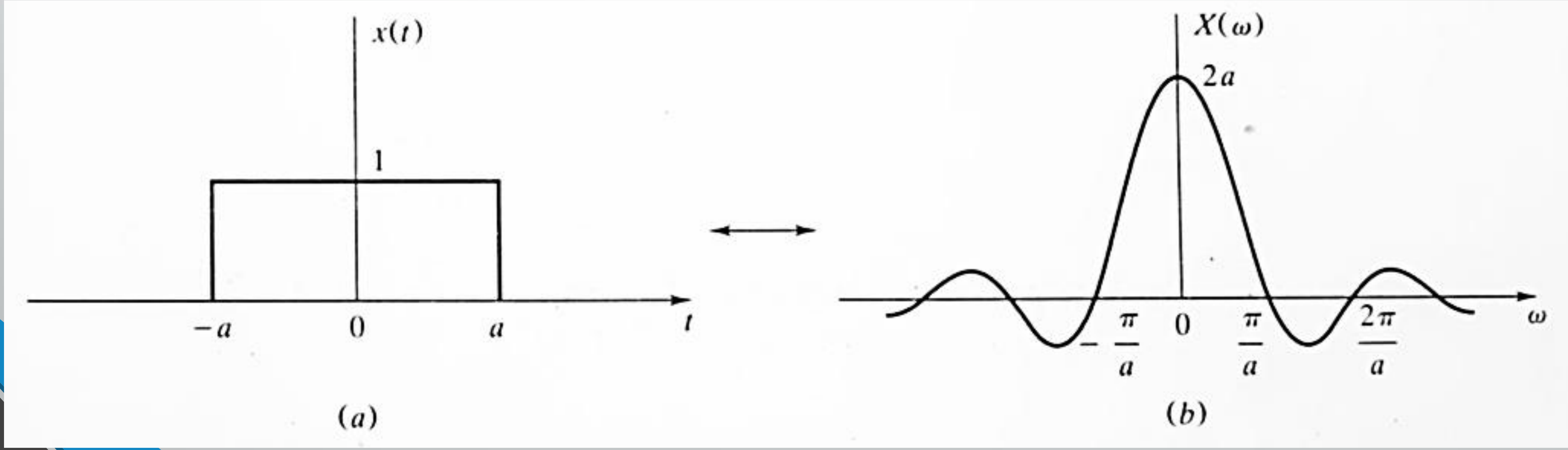
Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του ορθογώνιου παλμού $x(t) = \Pi({}^{t}/_{a}) = \begin{cases} 1 & |t| \leq a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$

Λύση $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}dt = 2\frac{sin a\omega}{\omega} = 2a\frac{sin a\omega}{a\omega} = 2a \cdot Sa(a\omega)$$

όπου $Sa(x) = \frac{sinx}{x}$,

αλλού θα δείτε τη χρήση της συνάρτησης: $sinc(x) = \frac{sin\pi x}{\pi x}$

Sa: sampling function (συνάρτηση δειγματοληψίας)



Άσκηση 9 (Μετασχηματισμός Fourier):

Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του $x(t) = \dfrac{\sin at}{at}$

Λύση

Από τη λύση της προηγούμενης άσκησης βλέπουμε ότι:

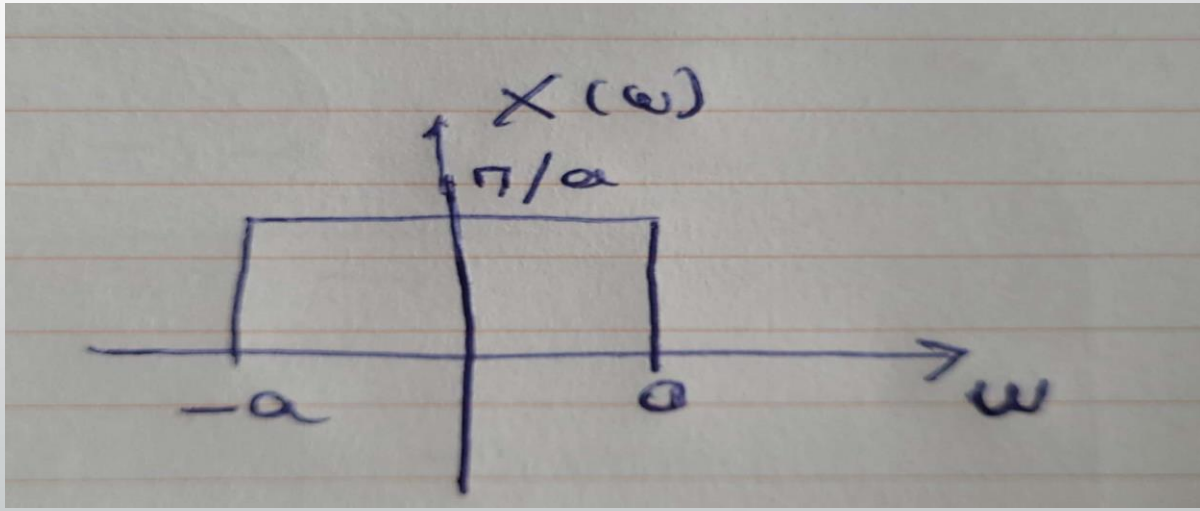
$$\mathcal{F}\{\Pi(t/a)\} = 2\alpha \frac{\sin a\omega}{a\omega}$$

Από την ιδιότητα της δυαδικότητας του μετασχηματισμού Fourier:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{t} sinat\right] = \pi.\Pi(-\omega)$$

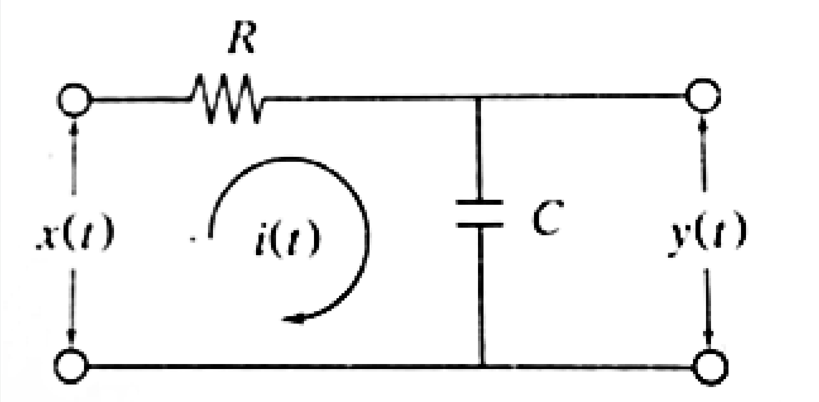
Άρα: $\mathcal{F}\left\{\dfrac{sinat}{at}\right\} =$

$$\frac{1}{a}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t} sinat\right\} = (\frac{\pi}{\alpha})\Pi(-\omega) = (\frac{\pi}{\alpha})\Pi(\omega)$$



Άρα το σημείο αυτό έχει συχνότητες $|\omega| \leq a$

Άσκηση 10 (Σχέσεις Εισόδου-Εξόδου):



Ισχύει: $R \cdot i(t) + y(t) = x(t) \Rightarrow RC\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

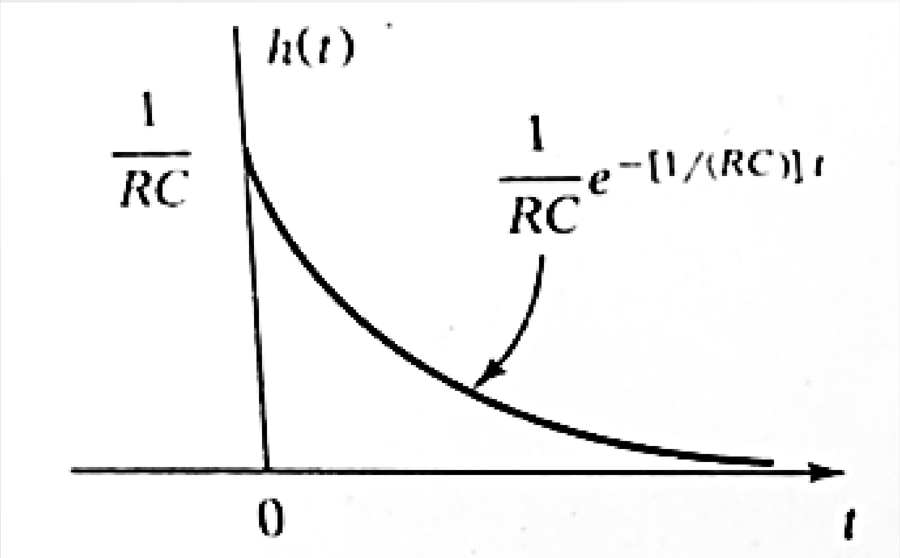
Αν πάρουμε τον μετασχηματισμό Fourier, τότε έχουμε:

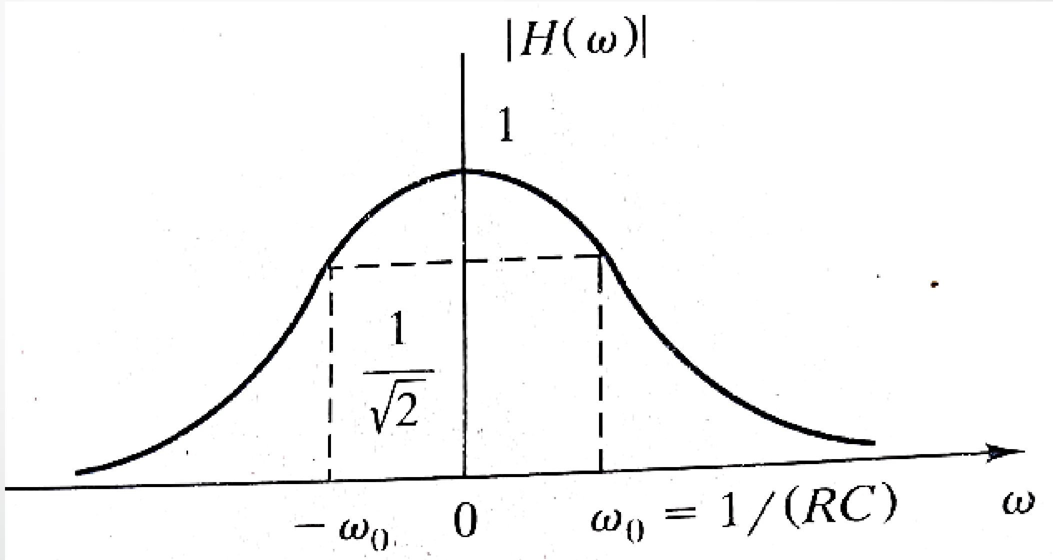
$$j\omega RCY(\omega) + Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{j\omega RCY + 1} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{j\omega + {}^{1}/_{RC}}$$

Άσκηση 10 (Σχέσεις Εισόδου-Εξόδου) (συνέχεια):

Αν πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, τότε έχουμε:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{H}(\omega)\} = \frac{1}{RC}.\, e^{-[1/_{RC}]t}.\, u(t)$$



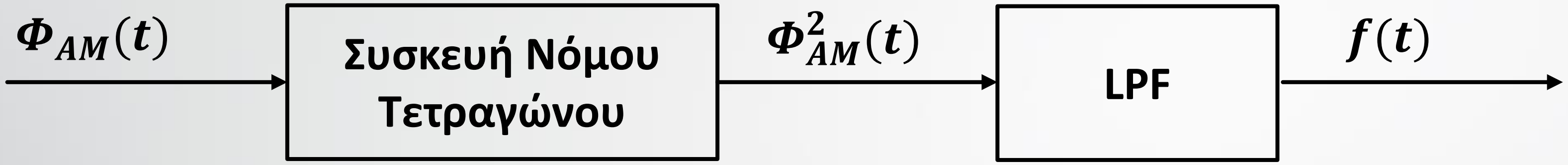


Είναι ένα **LPF**

Άσκηση 11:

Δείξτε ότι ένα σήμα AM (DSB-LC)μπορεί να αποδιαμορφωθεί αν το περάσουμε από ένα βαθυπερατό φίλτρο αφού πρώτα το έχουμε τετραγωνίσει.

Λύση



$$\Phi_{AM}(t) = [A + m(t)] \cos \omega_c t$$

$$\Phi_{AM}^2(t) = \big(A + m(t)\big)^2 cos\omega_c^2(t) = \big(A^2 + 2.A.m(t) + m^2(t)\big).\frac{(1 + \cos 2\omega_c t)}{2}$$

Το LPF θα κόψει τις συχνότητες στο 2cos $\omega_c t$ και θα μείνει μόνο το:

$$\frac{A}{2} + A.m(t) + \frac{m^2(t)}{2}$$

σε διπλές συχνότητες φεύγει

ο όρος DC φεύγει με κατάλληλο LPF

μένει μόνο αυτό

Δοκιμάστε το με $m(t) = a \cos \omega_m t$

Άσκηση 12:

Σχεδιάστε ένα σήμα AM για διαμόρφωση με m=0.5 και m=1.

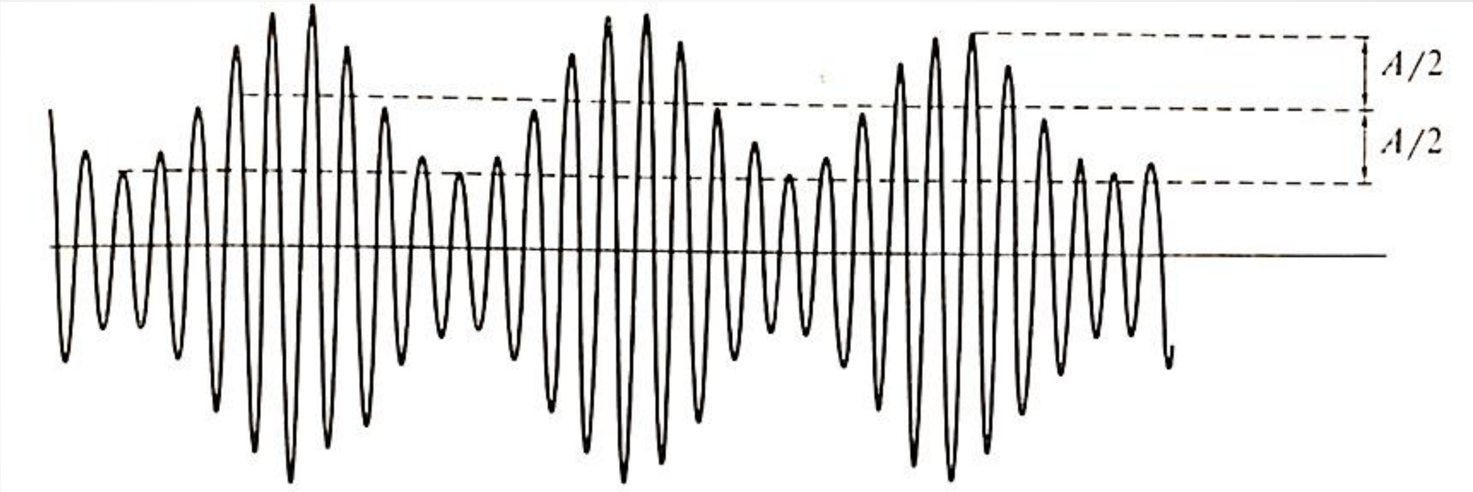
Λύση

$$\Phi_{AM}(t) = \mathrm{A}(1 + m cos\omega_m t) cos\omega_c t$$

$$max: \ A(1+m), \ min: \ A(1-m)$$

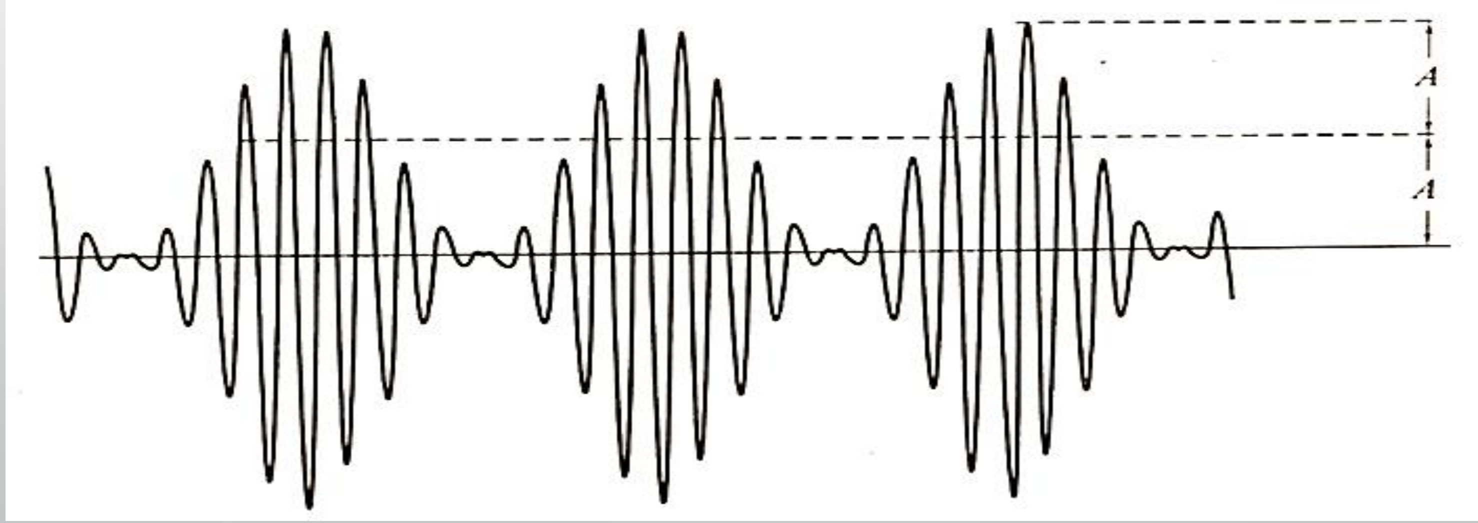
$$\Gamma\iota\alpha \ \mathrm{m} = 0.5 \rightarrow \mathrm{max:} \ \ {}^{3\mathrm{A}}/_{2}$$

$$\mathrm{min:} \ \ {}^{\mathrm{A}}/_{2}$$



$$\Gamma\iota\alpha \ \mathrm{m} = 1 \rightarrow \mathrm{max:} \ \ 2\mathrm{A}$$

$$\mathrm{min:} \ \ 0$$



Άσκηση 13 (Διαμόρφωση γωνίας):

Βρείτε τη στιγμιαία συχνότητα των σημάτων:

(α) $10\cos(200\pi t + {}^{\pi}/_{3})$

(β) $10\cos(20\pi t + \pi t^2)$

(γ) $cos200\pi t.\cos(5sin2\pi t) + sin200\pi t + \sin(5sin2\pi t) = \cos(200\pi t - 5sin2\pi t)$

Λύση:

(α) $\omega_i = \dfrac{d\theta}{dt} = 200\pi$

(β) $\omega_i = \dfrac{d\theta}{dt} = 20\pi + 2\pi t$

(γ) $\omega_i = \dfrac{d\theta}{dt} = 200\pi - 10\pi cos2\pi t = 2\pi(100 - 5cos2\pi t)$

Άσκηση 14 (Διαμόρφωση γωνίας):

Διαμορφώνουμε ένα συνημιτονοειδές σήμα συχνότητας 2 kHz με Δf=5 kHz.

(α) Ποιο είναι το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος;

(β) Το πλάτος του ημιτονοειδούς αυξάνεται κατά τρεις φορές και η συχνότητά του πέφτει στο 1 kHz. Βρείτε τα Δf και BW.

Λύση:

(α) $\beta = \dfrac{k_f \cdot a_m}{\omega_m} = \dfrac{\Delta\mathrm{f}}{f_m} = \dfrac{5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^3} = 2.5$

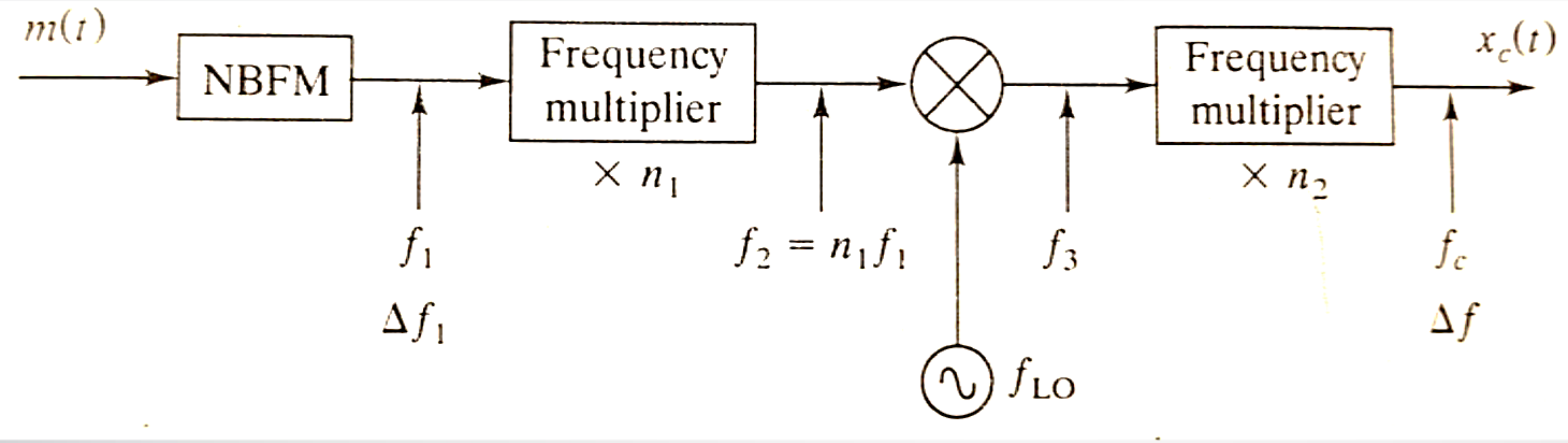
(β) $\beta_1 = \dfrac{k_f \cdot 3a_m}{{}^1\!/_2\, \omega_m} = 6 \cdot \dfrac{k_f \cdot a_m}{W_m} = 6\beta = 15$

$\Delta\mathrm{f} = \beta_1 \cdot f_{m_1} = 15.1 = 15\ kHz$

$BW_1 = 2 \cdot (\beta_1 + 1) \cdot f_{m_1} = 2 \cdot (15 + 1) \cdot (1) = 32\ kHz$

Άσκηση 15:

Σε ένα διαμορφωτή τύπου Armstrong



$f_1 = 200\ kHz$

$f_{LOW} = 10.8\ MHz$

$\Delta f_1 = 25\ Hz$

$n_1 = 64$

$n_2 = 48$

$$\Delta \mathrm{f} = \Delta f_1 . n_1 . n_2 = 76.8\ kHz$$

$$f_2 = n_1 . f_1 = 12.8\ MHz$$

$$f_3 = f_2 \pm f_{LOW} = \begin{cases} 23.6\ MHz \\ 2.0\ \ MHz \end{cases}$$

Αν πάρουμε την $f_3 = 23.6\ \mathrm{MHz} \Rightarrow f_C = n_2 . f_3 = 1132.8\ MHz$

--//-- $f_3 = 2\ \mathrm{MHz} \Rightarrow f'_C = 96\ MHz$

Άσκηση 16:

Έστω ένα σήμα με περιορισμένο εύρος ζώνης 3.6 kHz και τρία άλλα σήματα $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, με 1.2 kHz το καθένα. Αν θέλουμε να στείλουμε και τα τέσσερα σήματα με TDM:

(α). βρείτε τους απαραίτητους ρυθμούς δειγματοληψίας

Λύση:

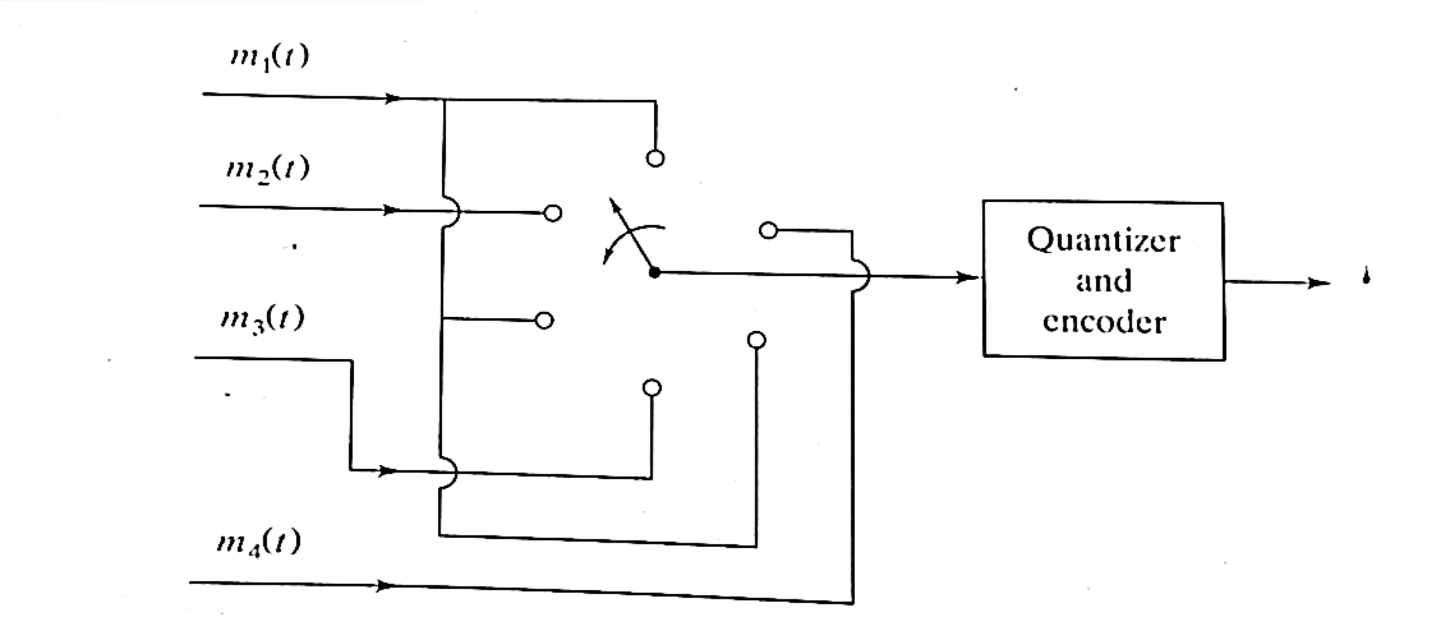
Σήμα	**BW**	**Nyquist**
$f(t)$	3.6 kHz	7.2 kHz
$f_1(t)$	1.2 kHz	2.4 kHz
$f_2(t)$	1.2 kHz	2.4 kHz
$f_3(t)$	1.2 kHz	2.4 kHz

Άσκηση 16 (συνέχεια):

Έστω ένα σήμα με περιορισμένο εύρος ζώνης 3.6 kHz και τρία άλλα σήματα $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, με 1.2 kHz το καθένα. Αν θέλουμε να στείλουμε και τα τρία σήματα με TDM

(β). Σχεδιάστε ένα πρακτικό σύστημα που να πετυχαίνει την πολυπλεξία αυτή

Λύση:



Άσκηση 16 (συνέχεια):

Έστω ένα σήμα με περιορισμένο εύρος ζώνης 3.6 kHz και τρία άλλα σήματα $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, με 1.2 kHz το καθένα. Αν θέλουμε να στείλουμε και τα τέσσερα σήματα με TDM

(γ). Αν χρησιμοποιούμε κβάντωση με L=1024 και στο τέλος στείλουμε δυαδικά ψηφία, ποιος είναι ο τελικός ρυθμός;

(δ). Ποιο είναι το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης;

Λύση

(γ). Αν χρησιμοποιούμε L=1024 επίπεδα = $2^{10} \Rightarrow$ n=10.

Στην έξοδο θα βλέπουμε $7200+3\cdot 2400=14400$ δείγματα/sec, ή

$\mathrm{R} = 10\cdot 14400 = 144$ kbps

(δ). Το ελάχιστο εύρος ζώνης που θα χρησιμοποιούμε είναι:

$$\mathrm{BW} = \frac{1}{2}(7.2 + 2.4 + 2.4 + 2.4) = 7.2\ kHz$$

Άσκηση 17:

Βρείτε τον ρυθμό δειγματοληψίας κατά Nyquist των παρακάτω σημάτων:

(α). $f(t) = 5cos1000\pi t.cos4000\pi t$

$$= 2.5(cos3000\pi t + cos5000\pi t)$$

Άρα: $f_{max} = 2500\ Hz, f_S \geq 5000\ Hz$

(β). $f(t) = \dfrac{sin200t}{\pi t} \leftrightarrow F(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 200\ Hz \\ 0 & |\omega| > 200\ Hz \end{cases}$

δείτε την άσκηση 9

Άρα: $f_{max} = 200\ Hz, f_S \geq 2\ f_{max} = 400\ Hz$

(γ). $f(t) = (\dfrac{sin200t}{\pi t})^2$ $\leftrightarrow$ από ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

$f_{max} = 400\ Hz \Longrightarrow f_S \geq 800\ Hz$

Άσκηση 18:

Έστω ένα δυαδικό κανάλι με R_b=36 kbps με κωδικοποίηση PCM. Βρείτε τα f_S, L και n, αν $f_m = 3{,}2\ kHz,$ n αριθμός των bit ανά δείγμα και L ο αριθμός των επιπέδων.

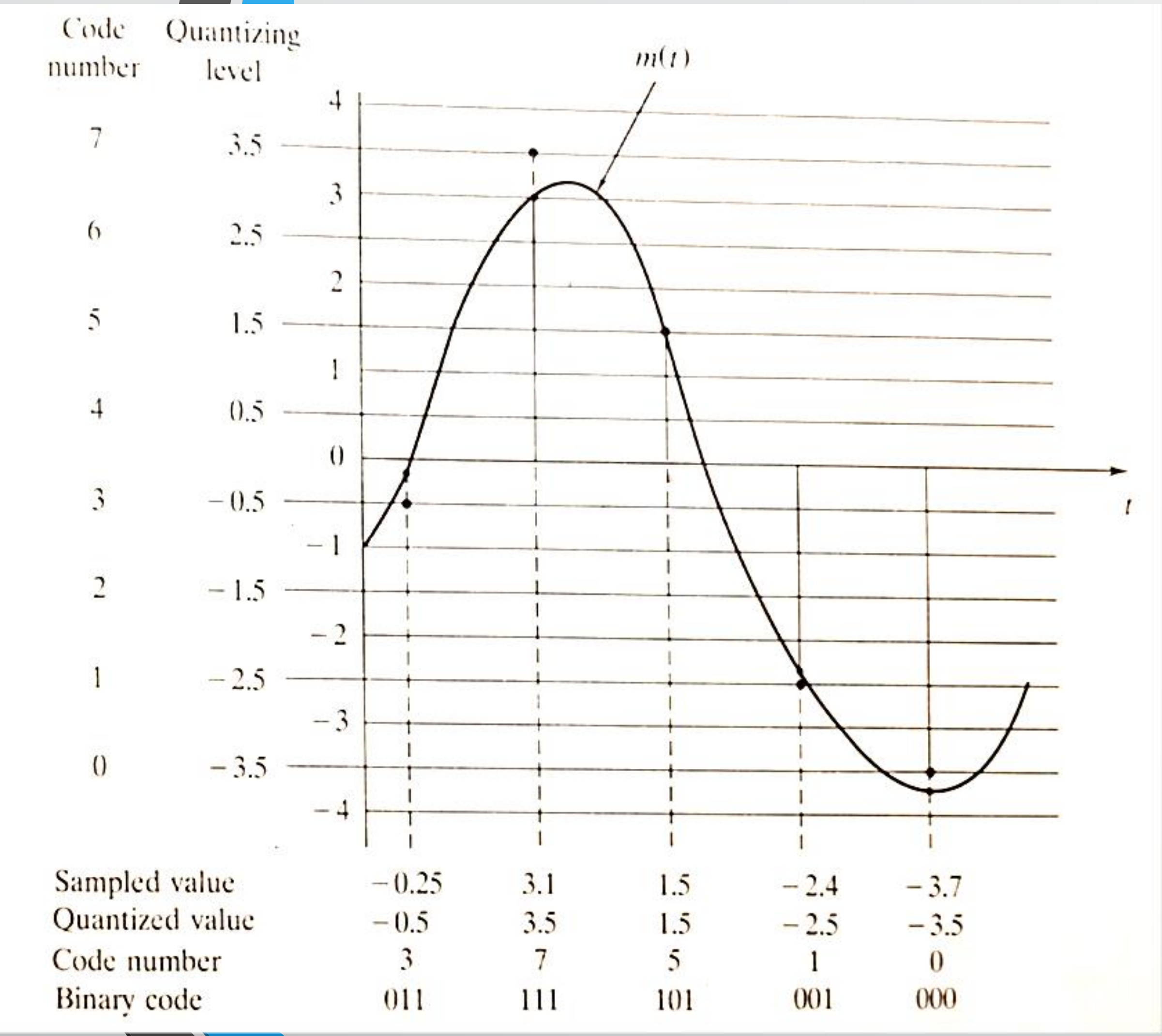
Λύση:

Θέλουμε $f_S \geq 2f_m = 2 \cdot 3200 = 6{,}4\ kHz$

$$n \cdot f_S \leq R_b \Rightarrow n \leq \frac{R_b}{f_S} = \frac{36000}{6400} = 5{,}6$$

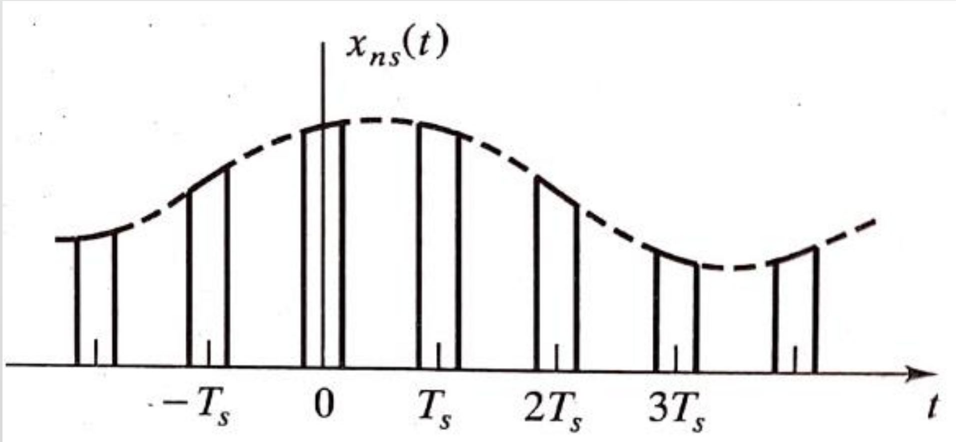
άρα n=5 $\Longrightarrow L = 2^5 = 32$ και $\quad f_{S\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{o}} = \dfrac{36000}{5} = 7{,}2kHz$

Άσκηση 19 (Δειγματοληψία – Κωδικοποίηση):

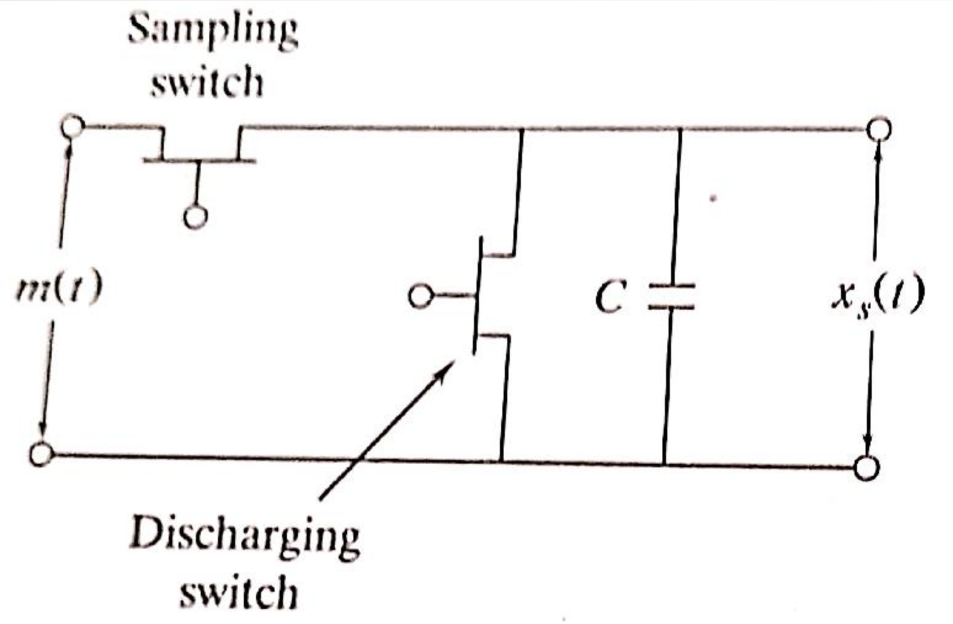


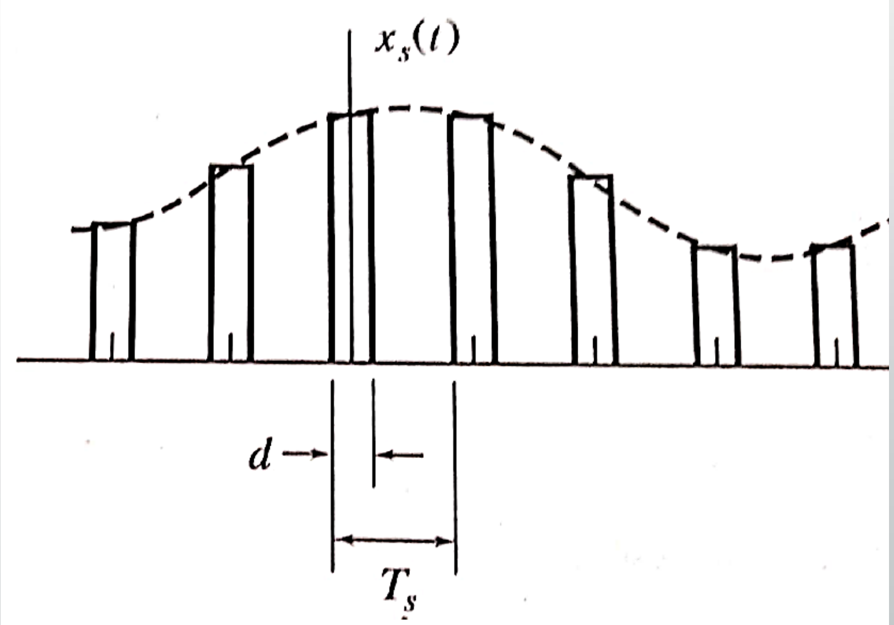
Τιμή δείγματος	-0.25	3.1	1.5	-2.4	-3.7
Κβαντική τιμή	-0.5	3.5	1.5	-2.5	-3.5
Αριθμός	3	7	5	1	0
Δυαδική τιμή	011	111	101	001	000

Άσκηση 19 (Δειγματοληψία – Κωδικοποίηση) (συνέχεια):



Φυσική δειγματοληψία





Σήμα PAM

Άσκηση 20:

Στην Αμερική το σύστημα Τ1 πολυπλέκει 24 κανάλια φωνής βασισμένα σε PCM με 8 bit. Κάθε σήμα έχει μέγιστη συχνότητα τα 3.4 kHz και η δειγματοληψία γίνεται στα 8 kHz. 1 bit προστίθεται για συγχρονισμό.

(α) Κάθε πότε γίνεται δειγματοληψία; Πόσα bit μεταδίδονται στο διάστημα αυτό;

T_b (περίοδος δειγματοληψίας): $\frac{1}{8000} = 125\ \mu sec$

24 σήματα · 8 bits/σήμα = 192 bits

+1 bit

----

193 bits

(β) Ο τελικός ρυθμός μετάδοσης είναι: $R_b = \frac{193}{T_b} = 1.544\ \mathrm{Mbps}$

(γ) Το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος ζώνης είναι: $f_{BW} = \frac{1}{2T_x} = 772\ kHz$

Στην Ευρώπη έχουμε γραμμές E1, όπου πολυπλέκονται 30 γραμμές και ο ρυθμός γίνεται 2.0 Mbps.