

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

2η σειρά ασκήσεων

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Ημερομηνία παράδοσης: Μέχρι και την Τρίτη 8 Ιανουαρίου 2019

Σημειώστε τις ασκήσεις για τις οποίες έχετε παραδώσει λύση:

2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
2.6	2.7	2.8	2.9	2.10
2.11	2.12	2.13	2.14	2.15

2.1) Σε ένα πρόγραμμα επιλογής τυχαίων φυσικών αριθμών από το 1 έως το n οι αριθμοί έχουν πιθανότητα εμφάνισης ανάλογη του μεγέθους τους, δηλαδή η πιθανότητα να εμφανισθεί ο αριθμός k ισούται με $C \cdot k$, για κάθε $k \in [n]$, όπου C είναι μια σταθερά.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα εμφάνισης κάθε αριθμού k , όπου $k = 1, \dots, n$, δηλαδή να προσδιορισθεί η σταθερά C .

(Υπόδειξη: Το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων ισούται με 1.)

ii) Προτείνετε έναν τρόπο υλοποίησης ενός προγράμματος παραγωγής τυχαίων αριθμών στο διάστημα $[1, n]$ με τις παραπάνω πιθανότητες.

iii) Να υπολογισθεί η πιθανότητα εμφάνισης του αριθμού 1 δεδομένου ότι επιλέχθηκε αριθμός από το 1 έως το n , όπου $n \leq n$.

iv) Να βρεθεί η αναμενόμενη τιμή των αριθμών που εμφανίζονται.

v) Να βρεθεί η διακύμανση των αριθμών που εμφανίζονται.

2.2) Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο \mathbb{R} έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-kx} & \text{αν } 0 \leq x < +\infty \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

όπου $k > 0$.

i) Να βρεθεί η σταθερά a .

ii) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της X .

iii) Να βρεθεί η πιθανότητα $P(0 \leq X \leq 1/k)$.

2.3) Αν παίζεις τάβλι με έναν ισοδύναμο αντίπαλο, ποιο ενδεχόμενο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα:

A = Να κερδίσεις τρεις από τις τέσσερις παρτίδες.

B = Να κερδίσεις έξι από τις οκτώ παρτίδες.

Παρατηρήστε ότι $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, δηλαδή η αναλογία των παιχνιδιών είναι η ίδια. Πως ερμηνεύετε το αποτέλεσμα που βρήκατε;

2.4) Ένας επιβάτης έχει υπολογίσει ότι η πιθανότητα να συναντήσει ελεγκτές εισιτηρίων σε μια διαδρομή με λεωφορείο είναι $p = \frac{1}{100}$.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα να κάνει 60 διαδρομές χωρίς να συναντήσει καθόλου ελεγκτές εισιτηρίων.

ii) Να βρεθεί ο μέσος αριθμός ελέγχων που γίνονται στον επιβάτη μέσα σε 60 διαδρομές.

iii) Αν το πρόστιμο όταν συναντήσει ελεγκτή και δεν έχει εισιτήριο είναι 84 ευρώ. Ποιο είναι το αναμενόμενο πρόστιμο για 60 διαδρομές χωρίς εισιτήριο;

2.5) Ο Γιώργος και ο Δημήτρης είναι συγγάμοι και κάθε φορά που έχουν να πλύνουν πιάτα ρίχνουν ένα νόμισμα. Όποιος φέρει πρώτος κορώνα κερδίζει και ο άλλος πλένει τα πιάτα. Ο Γιώργος παρατήρησε ότι όταν ρίχνει πρώτος κερδίζει συχνότερα, ενώ όταν ξεκινάει δεύτερος καταλήγει συχνότερα στο νεροχύτη. Υπολογίστε τις πιθανότητες και στις δυο περιπτώσεις. Είναι ο ισχυρισμός του Γιώργου σωστός;

2.6) Έστω ότι ο αριθμός των γκολ που πετυχαίνει η Εθνική ομάδα ποδοσφαίρου στα εκτός έδρας παιχνίδια ακολουθεί την κατανομή Poisson. Επίσης, είναι γνωστό ότι στα εκτός έδρας παιχνίδια η Εθνική έχει την ίδια πιθανότητα να πετύχει ένα ή δύο γκολ. Να βρεθεί η πιθανότητα στο επόμενο εκτός έδρας παιχνίδι η Εθνική να πετύχει τέσσερα γκολ.

- 2.7) Οι ημερήσιες συχνότητες επιθέσεων σε ένα site τον πρώτο χρόνο λειτουργίας του δίδονται στον επόμενο πίνακα

Αριθμός επιθέσεων	0	1	2	3	4
Συχνότητα (ημέρες)	223	110	27	4	1

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός X των επιθέσεων που γίνονται στο site μέσα σε μια ημέρα ακολουθεί την κατανομή Poisson να βρεθεί η παράμετρος λ η οποία προσεγγίζει τις παραπάνω παρατηρήσεις.

Στην συνέχεια να βρεθεί με βάση τον τύπο της κατανομής Poisson ο αναμενόμενος αριθμός ημερών στις οποίες θα έχουμε 0, 1, 2, 3, 4 επιθέσεις αντίστοιχα μέσα στον επόμενο χρόνο.

(Υπόδειξη: Να υπολογισθεί ο μέσος αριθμός επιθέσεων σε μια μέρα με βάση τα στοιχεία του πίνακα.)

- 2.8) i) Ένα κουτί περιέχει 6 μπλε και 4 κόκκινες σφαίρες. Διαλέγουμε στην τύχη 5 σφαίρες χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα να βγούν 3 κόκκινες σφαίρες;
ii) Ένα κουτί περιέχει 6 μπλε και 4 κόκκινες σφαίρες. Διαλέγουμε στη τύχη μια σφαίρα χωρίς επανατοποθέτηση. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο 5 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να βγουν 3 κόκκινες σφαίρες;
- 2.9) Ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη στα ταμεία μιας τράπεζας είναι 3.5 λεπτά. Να βρεθεί η πιθανότητα ο χρόνος που θα περιμένετε για να εξυπηρετηθεί ο προηγούμενος από εσάς πελάτης να είναι:
i) μεγαλύτερος από πέντε λεπτά.
ii) ανάμεσα σε δύο και τέσσερα λεπτά.
- 2.10) Μια εταιρεία τηλεφώνων εκτιμά ότι η μέση διάρκεια ζωής της μπαταρίας τους κάτω από κανονικές συνθήκες ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 4 χρόνια. Αν η εταιρεία έχει την δυνατότητα να αντικαταστήσει δωρεάν (μέσα στην εγγύηση) την μπαταρία μέχρι το 40% των συσκευών που θα πωληθούν στην αγορά, ποιος πρέπει να είναι ο μέγιστος χρόνος εγγύησης που θα δοθεί για την μπαταρία;
- 2.11) Ο χρόνος που χρειάζεται ένας πεζός για να φτάσει από τον σταθμό του Ηλεκτρικού του Πειραιά στο κεντρικό κτήριο του Πα.Πει λόγω φαναριών δεν είναι σταθερός αλλά ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 17 λεπτά και διακύμανση 9 λεπτά. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ο πεζός να φτάσει:
i) σε λιγότερο από 19 λεπτά
ii) αργότερα από 22 λεπτά
iii) σε λιγότερο από 21 αλλά περισσότερο από 13 λεπτά.
- 2.12) Το 40% των ψηφοφόρων μιας πόλης ευνοούν τον υποψήφιο Α. Αν πάρουμε ένα τυχαίο δείγμα 80 ψηφοφόρων, ποια είναι η πιθανότητα να πλειοψηφούν στο δείγμα οι ευνοούντες τον Α;
- 2.13) Ο Λεωνίδας έχει κανονίσει συνάντηση στο σταθμό του μετρό Άγιος Δημήτριος με φίλους του και πρέπει να είναι εκεί σε 20 λεπτά αν δεν θέλει να τους καθυστερήσει. Έχει τις εξής επιλογές:
In επιλογή: Να περιμένει το λεωφορείο το οποίο αναμένεται να έρθει σε 7 λεπτά και με το οποίο ο χρόνος μετάβασης μέχρι τον Άγιο Δημήτριο ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 10 λεπτά και διακύμανση 9 λεπτά.

2η επιλογή: Να περπατήσει μέχρι το σταθμό του μετρό που απέχει 10 λεπτά. Γνωρίζει ότι οι συρμοί έρχονται στο σταθμό κάθε 10 λεπτά και ο χρόνος μετάβασης διαρκεί 4 λεπτά.

3η επιλογή: Να καλέσει ταξί, το οποίο βρίσκεται 10 λεπτά μακριά και ο χρόνος μετάβασης ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 6 λεπτά και διακύμανση 4 λεπτά.

Με βάση τα παραπάνω στοιχεία

- i) Να βρεθεί η πιθανότητα να μην αργήσει στη συνάντηση σε κάθε μια από τις επιλογές.
- ii) Αν ο Λεωνίδας διαλέγει τυχαία μια από τις 3 επιλογές ποιά είναι η πιθανότητα να μην αργήσει για την συνάντηση;
- iii) Αν ο Λεωνίδας άργησε να πάει στη συνάντηση, ποια είναι η πιθανότητα να μην πήρε ταξί;

2.14) Ένας blogger θέλει να εμφανίζει ότι το site του έχει μεγάλη επισκεψιμότητα και χρησιμοποιεί ένα μετρητή επισκεψιμότητας, ο οποίος αυξάνει από τις πραγματικές επισκέψεις στο site αλλά και αυτόματα χρησιμοποιώντας μια γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών n οποία παράγει κάθε λεπτό, με ίση πιθανότητα, ένα φυσικό αριθμό από το 1 έως το 10, ο οποίος προστίθεται στον μετρητή επισκεψιμότητας.

- i) Να βρεθεί μέσος αριθμός των “επισκεψεων” στο site του blogger μέσα σε 1 μέρα.
- ii) Αν σε 1 μέρα το site είχε 8000 επισκέψεις (πραγματικές και εικονικές). Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός των πραγματικών επισκέψεων με πιθανότητα τουλάχιστον 99%.

2.15) Έστω ότι οι ανεξάρτητες τ.μ. X_1, X_2, \dots, X_n έχουν μέση τιμή $E(X_k) = k$ και διακύμανση $\text{Var}(X_k) = \frac{k}{4}$ για κάθε $k \in [n]$. Θεωρούμε την τ.μ. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- i) Να βρεθεί η μέση τιμή μ και η διακύμανση σ^2 της S_n .
- ii) Με τη βοήθεια της ανισότητας του Chebyshev να βρεθεί ένα διάστημα της μορφής $[\mu - \theta, \mu + \theta]$ στο οποίο η X λαμβάνει τιμές με πιθανότητα τουλάχιστον 60%.
- iii) Να εξηγηθεί γιατί δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η S_n προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή.