ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1η σειρά ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Ημερομηνία παράδοσης: Μέχρι και την Πέμπτη 28 Νοεμβρίου 2019

Σημειώστε τις ασκήσεις για τις οποίες έχετε παραδώσει λύση:

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1.6	1.7	1.8	1.9	1.10
1.11	1.12	1.13	1.14	1.15
1.16				

1.1) Έστω $A, B \subseteq \Omega$ με $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/2$ και $P(A \cup B) = 2/3$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(\overline{A}|B)$, $P(\overline{B}|A)$, $P(\overline{A}|\overline{B})$, $P(A \cap B|A \cup B)$, $P(A|A \cup B)$ και $P(A|A \cap B)$.

1.2) Αν $P(A) = a$ και $P(B) = b$, να δειχθεί ότι $P(A|B) \geq \dfrac{a+b-1}{b}$.

1.3) i) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα A, B ισχύει ότι

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$$

ii) Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ισχύει ότι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1)$$

1.4) Έστω ότι A, B είναι ενδεχόμενα με $P(A), P(B) > 0$. Λέμε ότι το B *υποστηρίζει* το A αν και μόνο αν $P(A|B) > P(A)$ και ότι το B *δεν υποστηρίζει* το A αν και μόνο αν $P(A|B) < P(A)$.

i) Να δειχθεί ότι αν το B υποστηρίζει το A, τότε και το A υποστηρίζει το B.

ii) Έστω $P(\overline{B}) > 0$. Να δειχθεί ότι το B υποστηρίζει το A αν και μόνο αν το $\overline{B}$ δεν υποστηρίζει το A.

1.5) Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού έτσι ώστε η πιθανότητα να εμφανιστεί 6 τουλάχιστον μια φορά σε αυτές τις ρίψεις να είναι μεγαλύτερη ή ίση από

(α) 2/3, (β) 0.999 (γ) p, όπου $0 \leq p < 1$.

1.6) Έστω μια ομάδα n ατόμων, όπου $2n < 365$. Να δειχθεί ότι η πιθανότητα p_n δύο τουλάχιστον άτομα της ομάδας να έχουν την ίδια μέρα γενέθλια ή σε διαδοχικές μέρες ισούται με

$$p_n = 1 - 365^{-n+1}\frac{(365-n-1)!}{(365-2n)!}.$$

Να βρεθεί ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ατόμων n ώστε $p_n \geq 1/2$.

1.7) Ένας μεγάλος αριθμός φοιτητών σε μια αίθουσα ερωτώνται να αναφέρουν την ημερομηνία των γενεθλίων τους. Ο πρώτος φοιτητής για τον οποίο τα γενέθλια του συμπίπτουν με τα γενέθλια κάποιου από τους ήδη ερωτηθέντες φοιτητές κερδίζει ένα δώρο. Να δειχθεί ότι αν βρίσκεστε στην αίθουσα, η πιθανότητα να κερδίσετε γίνεται μέγιστη αν είστε το 20ο άτομο που θα ερωτηθεί. Στην περίπτωση αυτή πόσο μεγάλη είναι αυτή η πιθανότητα;

1.8) Ένας επιστήμονας έστειλε τα αποτελέσματα της έρευνάς του για δημοσίευση σε ένα από τα γνωστά διεθνή περιοδικά. Η εργασία του φτάνει σε 3 ανεξάρτητους κριτές, οι οποίοι αξιολογούν θετικά με πιθανότητες 6/11, 3/7 και 4/9 αντίστοιχα. Ποια είναι η πιθανότητα η πλειοψηφία των κριτών να αξιολογήσει θετικά την εργασία του επιστήμονα, οπότε αυτή να δημοσιευθεί;

1.9) Σε κάποιο μάθημα εξετάστηκαν 250 άτομα, τα οποία τοποθετήθηκαν σε 3 αίθουσες A, B, Γ: 70 στην A, 90 στην B και τα υπόλοιπα στην Γ. Προβιβάσιμο βαθμό πήρε το 80% των γραπτών της αίθουσας A, το 88% της B και το 72% της Γ.

i) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν εξεταζόμενο ποια είναι η πιθανότητα το γραπτό του να βαθμολογήθηκε κάτω από τη βάση;

ii) Αν πάρουμε ένα γραπτό που έχει βαθμολογηθεί πάνω από τη βάση, ποιά είναι η πιθανότητα να προέρχεται από την αίθουσα A;

1.10) Ένας χρήστης έχει παρατηρήσει ότι από τα email που λαμβάνει μόνο το 9% περιέχουν κακόβουλο λογισμικό. Έστω ότι ένα antivirus έχει τις εξής πιθανότητες να κάνει λανθασμένο χαρακτηρισμό ενός email: Με πιθανότητα 1% μαρκάρει ένα κανονικό email ως κακόβουλο και με πιθανότητα 2% δεν ανιχνεύει ένα email που περιέχει κακόβουλο λογισμικό.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα ένα email να περιέχει κακόβουλο λογισμικό δεδομένου ότι το antivirus δεν το έχει μαρκάρει.

ii) Ποιά είναι η αντίστοιχη πιθανότητα αν την πρώτη φορά που τρέχουμε το antivirus για το email δεν το μαρκάρει, αλλά το μαρκάρει την δεύτερη φορά. (Θεωρείστε ότι τα ενδεχόμενα το email να μαρκαριστεί ή όχι είναι ανεξάρτητα δεδομένου ότι το email περιέχει κακόβουλο λογισμικό.)

1.11) Είναι γνωστό ότι το 5% των οχημάτων, σε ένα συγκεκριμένο τμήμα της εθνικής οδού, κινείται με ταχύτητα που υπερβαίνει το όριο ταχύτητας. Έστω ότι η τροχαία των εθνικών οδών χρησιμοποιεί ένα αυτοματοποιημένο σύστημα μέτρησης της ταχύτητας των οχημάτων το οποίο ανιχνεύει τα οχήματα που κινούνται στο συγκεκριμένο τμήμα με ταχύτητα πάνω από επιτρεπτό όριο και το ποσοστό σφάλματος του συστήματος είναι 3% (είτε θετικά, είτε αρνητικά).

i) Να βρεθεί η πιθανότητα ένα όχημα να κινούνταν με υπερβολική ταχύτητα δεδομένου ότι πήρε κλήση από το σύστημα της τροχαίας.

ii) Να βρεθεί η πιθανότητα ένα όχημα να κινούνταν με υπερβολική ταχύτητα δεδομένου ότι δεν πήρε κλήση από το σύστημα της τροχαίας.

iii) Να βρεθεί η πιθανότητα ένα όχημα να πάρει κλήση από το σύστημα.

1.12) Ο Κώστας απαντάει σε ένα τεστ με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής το οποίο περιέχει 30 ερωτήσεις με 5 επιλογές η κάθεμια εκ των οποίων μόνο μια είναι σωστή. Ο Κώστας γνωρίζει την απάντηση σε κάποιες από αυτές, ενώ τις υπόλοιπες τις απαντάει στην τύχη. Έστω ότι η πιθανότητα να γνωρίζει την απάντηση δεδομένου ότι απάντησε σωστά στην ερώτηση είναι 0.9.

i) Να βρεθεί η πιθανότητα p ο Κώστας να γνωρίζει την απάντηση σε μια τυχαία ερώτηση.

ii) Να βρεθεί η πιθανότητα q ο Κώστας να απαντήσει σωστά σε μια τυχαία ερώτηση.

1.13) Δύο φίλοι συμφωνούν να συναντηθούν στην πλατεία Κοραή κάποια στιγμή στο διάστημα μεταξύ 5:00 μ.μ. και 6:00 μ.μ. Ο καθένας τους φτάνει κάποια τυχαία στιγμή, περιμένει για 15 λεπτά, και αν δεν έρθει ο άλλος φεύγει. Ποια η πιθανότητα να συναντηθούν;

1.14) Οι διαδοχικές ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος είναι ανεξάρτητες, ή όπως λέμε το νόμισμα δεν έχει μνήμη. Αυτό συνήθως δεν συμβαίνει με τον άνθρωπο όταν κατ' επανάληψη κάνει τυχαίες επιλογές. Συγκεκριμένα, έστω ότι ζητάμε από κάποιον να μας δώσει δύο τυχαίες ακολουθίες ρίψεων ενός αμερόληπτου νομίσματος με μήκος 200 η κάθε μια: Την μια να την παράγει χρησιμοποιώντας ένα νόμισμα, και την άλλη να την παράγει επιλέγοντας ο ίδιος με το μυαλό του το αποτέλεσμα κάθε ρίψης. Τότε χωρίς να μας πει ποιά είναι ποιά, μπορούμε με μεγάλη πιθανότητα να διακρίνουμε αυτή που έχει παραχθεί από το νόμισμα, από αυτή που έχει παραχθεί από το μυαλό του.

Ένας απλός τρόπος είναι ο παρακάτω: Θεωρούμε το πείραμα τύχης όπου ρίχνουμε ένα (αμερόληπτο) νόμισμα 200 φορές.

Γράψτε ένα πρόγραμμα που εκτελεί πολλές φορές (π.χ. 100000 φορές) το παραπάνω πείραμα και βρίσκει την σχετική συχνότητα των πειραμάτων που περιέχουν 7 ή περισσότερες διαδοχικές εμφανίσεις της ίδιας όψης.

Με βάση τη συχνότητα που θα βρείτε, θα καταλάβετε ότι η ακολουθία που παράγει το νόμισμα είναι πιθανότερο να είναι αυτή που έχει 7 ή περισσότερες διαδοχικές εμφανίσεις της ίδιας όψης.

Αντίθετα, οι περισσότεροι άνθρωποι δεν σημειώνουν περισσότερες από 4 ή 5 διαδοχικές εμφανίσεις της ίδιας όψης διότι θεωρούν ότι κάτι τέτοιο δεν είναι τυχαίο.

Παραδώστε ηλεκτρονικά τόσο τον κώδικά σας όσο και τα αποτελέσματα των εκτελέσεων του πειράματος.

1.15) Σε ένα αεροπλάνο n αριθημένων θέσεων ετοιμάζονται να επιβιβαστούν n επιβάτες. Κάθε επιβάτης γνωρίζει τον αριθμό της θέσης του, όμως ο πρώτος επιβάτης επιλέγει να καθίσει τυχαία σε μια θέση. Στη συνέχεια, κάθε ένας από τους επόμενους επιβάτες, κάθεται στη θέση του εκτός αν είναι ήδη πιασμένη από άλλον, οπότε κάθεται τυχαία σε μια από τις άδειες θέσεις.

Να βρεθεί η πιθανότητα p_n ο τελευταίος επιβάτης να καθίσει στην θέση του.

Αν δεν μπορείτε να βρείτε τύπο για την πιθανότητα p_n, γράψτε ένα πρόγραμμα που προσομοιώνει το σενάριο αυτό για $n = 100$, και με τη βοήθεια του οποίου προσεγγίστε πειραματικά την πιθανότητα p_{100}.

Παραδώστε ηλεκτρονικά τόσο τον κώδικά σας όσο και τα αποτελέσματα των εκτελέσεων του προγράμματος.

1.16) Έστω ότι ρίχνουμε 3 αμερόληπτα νομίσματα. Προφανώς, 2 τουλάχιστον από αυτά θα έχουν την ίδια ένδειξη και το τρίτο νόμισμα θα έχει ίση πιθανότητα να είναι κορώνα ή γράμματα, άρα η πιθανότητα και τα 3 νομίσματα να έχουν την ίδια ένδειξη ισούται με 1/2. Που είναι το σφάλμα στον συλλογισμό αυτό;