ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
2η Εργασία

1		2		3		4		5		6	
7		8		9		10		11		12	
13		14		15		16		17			

Να λυθούν **15** από τις ασκήσεις που ακολουθούν.
Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στην εργασία που θα παραδώσετε, αφού σημειώσετε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας, καθώς και με ✓στον παραπάνω πίνακα τις ασκήσεις που λύσατε. Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγραφά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε. Η εργασία μπορεί να παραδοθεί ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 5MB, στο email `kmanes@unipi.gr`.
Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι ergasia2_pX.pdf, όπου X ο αριθμός μητρώου σας.
Η εργασία είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 0.5.

Ονοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Ημερομηνία παράδοσης: **5 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2021**

Άσκηση 1. *Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας δύο διακριτών τ.μ. X, Y δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:*

x \ y	1	2	3	4	5
3	2/15	2/15	1/15	1/15	1/30
4	2/15	1/15	1/15	1/15	1/30
5	1/15	1/30	1/30	1/30	1/30

Έστω η τ.μ. $Z = X + Y + |X - Y|$.

i) *Ποια είναι η συνδιακύμανση των X, Y;*

ii) *Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της Z;*

iii) *Ποια είναι η μέση τιμή της Z;*

Άσκηση 2. *Στον αγώνα μεταξύ δύο ποδοσφαιρικών ομάδων A, B, η ομάδα A επιτυγχάνει X τέρματα, ενώ η B επιτυγχάνει Y τέρματα. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:*

y \ x	1	2	3	4	5
1	1/16	1/8	1/8	1/8	1/16
2	1/16	1/8	1/8	1/8	1/16

i) *Κατά μέσο όρο, πόσα τέρματα θα σημειωθούν;*

ii) *Δεδομένου ότι ο αγώνας δεν ήταν ισόπαλος, ποια είναι η πιθανότητα να κέρδισε η A;*

iii) *Αν σημειωθούν περισσότερα από 5 τέρματα κερδίζουμε 4 ευρώ, αλλιώς χάνουμε 1 ευρώ. Μας συμφέρει να παίξουμε αυτό το παιχνίδι;*

iv) *Αν γίνονται αγώνες μέχρι να χάσει η B, πόσοι αγώνες θα γίνουν κατά μέσο όρο;*

Άσκηση 3. *Σε ένα καλάθι με 5 πεπόνια, τα 2 είναι καλά, ενώ τα άλλα είναι χαλασμένα. Κόβουμε τα πεπόνια, μέχρι να βρούμε και τα 2 καλά, και μετά σταματάμε. Έστω X το πλήθος των πεπονιών που κόβουμε μέχρι να βρούμε το πρώτο καλό και έστω Y το πλήθος των πεπονιών που κόβουμε, αφού κόψουμε το πρώτο καλό. Επομένως, οι τ.μ. X, Y λαμβάνουν τις τιμές 1, 2, 3, 4.*

i) *Να προσδιορισθεί η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των X, Y.*

ii) *Να υπολογισθούν οι $E(X)$, $E(Y)$, $\mathrm{COV}(X, Y)$.*

Άσκηση 4. *Αν υπάρχουν N διαφορετικά κουπόνια και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, τότε αυτό είναι οποιοδήποτε από τα N με την ίδια πιθανότητα $1/N$. Ποια είναι η μέση τιμή του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει, ώστε να συλλέξει τουλάχιστον ένα κουπόνι από κάθε είδος;*

Άσκηση 5. *Έστω συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f(x) = \begin{cases} c + x/4, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

i) *Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c;*

ii) *Ποια είναι η μέση τιμή $E(X)$;*

iii) *Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ.μ. $Y = \lfloor X \rfloor$ (ακέραιο μέρος της X);*

Άσκηση 6. *Έστω τ.μ. $X \sim N(0, \sigma^2)$ και έστω $a > 0$. Να υπολογισθούν η συνάρτηση κατανομής, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η μέση τιμή και η διακύμανση της $Y = aX^2$.*

Άσκηση 7. *Οι συνεχείς τ.μ. X, Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 6x^c y, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Να υπολογισθούν:

i) *Η τιμή της σταθεράς c.*

ii) *Οι περιθώριες πυκνότητες των X, Y.*

iii) *Οι πιθανότητες $P(X < 1/3)$, $P(Y > 2X)$.*

Άσκηση 8. *Σε μια διαδικασία μέτρησης ρύπων συλλέγονται 5 δείγματα αέρα. Κάθε ένα από αυτά έχει ανεξάρτητα από τα άλλα περιεκτικότητα σε ρύπους που κατανέμεται ομοιόμορφα από 0 έως 12 $\mathrm{gr/m^3}$. Το αποτέλεσμα είναι αρνητικό αν και τα 5 δείγματα έχουν περιεκτικότητα σε ρύπους μικρότερη των $3.5\mathrm{gr/m^3}$. Ποια η πιθανότητα να είναι θετικό το αποτέλεσμα;*

Άσκηση 9. *Έστω τ.μ. X που ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1/4$. Δεδομένης της X, η Y έχει ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-X, X]$.*

i) *Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(Y > 3/2)$.*

ii) *Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X = 2 | Y > 3/2)$.*

(Υπόδειξη: Υπενθυμίζεται ότι $|x| < 1 \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.)

Άσκηση 10. *Έστω τ.μ.* X *που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή* 1 *και έστω τ.μ.* Y *που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο* $[0, 1]$. *Ορίζουμε την τ.μ.* Z *ως εξής: Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα και αν έρθει κορώνα τότε* $Z = X$, *αλλιώς* $Z = Y$. *Να υπολογισθούν:*

i) *Η πιθανότητα* $P(Z < 1/2)$.

ii) *Η κατανομή και η πυκνότητα της* Z.

Άσκηση 11. *Το πλήθος των ενεργών συνδέσεων σε ένα δίκτυο είναι* X *με μέση τιμή* $\mu = 2000$ *και τυπική απόκλιση* $\sigma = 500$. *Αν το* X *αποκλίνει από τον μέσο κατά περισσότερο από* $\pm S$, *τότε το δίκτυο πέφτει. Βρείτε μια τιμή για το* S *ώστε η πιθανότητα να πέσει το δίκτυο να είναι το πολύ* 1%.

Άσκηση 12. *Δίνεται η ακόλουθη πυκνότητα πιθανότητας* $f(x) = ce^{-4|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$. *Να υπολογισθούν:*

i) *Η τιμή της παραμέτρου* c.

ii) *Η μέση τιμή* $E(X)$.

iii) *Η διακύμανση* $\mathrm{Var}(X)$.

iv) *Η πιθανότητα* $P(|X| > 1/2)$.

v) *Το φράγμα Chebyshev για την πιθανότητα* $P(|X| > 1/2)$.

Άσκηση 13. *Ένα κέρμα φέρνει κορώνα με άγνωστη πιθανότητα* $p \in (0, 1)$. *Να υπολογισθούν:*

i) *Πώς θα εκτιμούσατε το* p*;*

ii) *Πόσες ρίψεις απαιτούνται ώστε η εκτίμησή σας να έχει σφάλμα μεγαλύτερο του* 1% *με πιθανότητα μικρότερη του* 1%*; Χρησιμοποιήστε την ανισότητα Chebyshev.*

Άσκηση 14. *Θέλουμε να ελέγξουμε την ακρίβεια μιας δημοσκόπησης, κατά την οποία 100 τυχαία επιλεγμένοι πολίτες ερωτώνται αν συμφωνούν ή όχι με κάποιο μέτρο της κυβέρνησης. Έστω ότι το αληθινό ποσοστό αυτών που συμφωνούν είναι* $p = 30\%$ *(στον συνολικό πληθυσμό). Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το ποσοστό αυτό να βρεθεί στο δείγμα μεγαλύτερο του* 50%.

Άσκηση 15. *Ένα φορτηγάκι μπορεί να αντέξει 3000 κιλά φορτίου πριν πάθει βλάβη. Το βάρος ενός καρπουζιού έχει μέση τιμή 15 κιλά με τυπική απόκλιση 1 κιλό. Να υπολογισθεί το μέγιστο πλήθος καρπουζιών που μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγάκι, ώστε η πιθανότητα βλάβης να είναι μικρότερη από* 10^{-4}.

Άσκηση 16. *Ένας μάγειρας θέλει να φτιάξει 100 μπιφτέκια βάρους 200 γραμμαριών. Πλάθοντας τα μπιφτέκια, αυτά καταλήγουν να έχουν βάρη που κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα* $[180, 220]$. *Να υπολογισθούν:*

i) *Η πιθανότητα να φτιάξει 100 μπιφτέκια, αν έχει στη διάθεσή του μείγμα βάρους* 20200 *γραμμαρίων.*

ii) *Το βάρος του διαθέσιμου μείγματος, ώστε η πιθανότητα να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια να είναι τουλάχιστον* 99%.

Άσκηση 17. *Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, οι διάρκειες των κλήσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση διάρκεια 40 δευτερόλεπτα. Να υπολογισθούν:*

i) *Η πιθανότητα η συνολική διάρκεια 250 κλήσεων να ξεπερνά τις 2 ώρες και 50 λεπτά.*

ii) *Η πιθανότητα από 250 κλήσεις, λιγότερες από 75 να έχουν διάρκεια μεγαλύτερη από 1 λεπτό.*