Πιθανότητες και Στατιστική
3η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1: Ένα συγκεκριμένο ποτάμι υπερχειλίζει κάθε χρόνο. Αν η ένδειξη για το χαμηλότερο επίπεδο της στάθμης του νερού είναι ρυθμισμένη στην τιμή 1 και η αντίστοιχη ένδειξη για το υψηλότερο επίπεδο της στάθμης του νερού είναι ρυθμισμένη στην τιμή Y, τότε η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας θα δίνεται από την σχέση:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - \frac{1}{y^2}, 1 \leq y \leq \infty.$$

(α): Επαληθεύστε ότι η $F_Y(y)$ είναι μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας.
(β): Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ για την τυχαία μεταβλητή Y.

Άσκηση 2: Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να προσδιορίσετε την τιμή της σταθεράς c ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:
(α): $f(x) = c\ \sin x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$
(β): $f(x) = c\ e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$

Άσκηση 3: Έστω X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας και πυκνότητας πιθανότητας $F_X(x)$ και $f_X(x)$ αντίστοιχα. Να εκφράσετε τις συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας και πυκνότητας πιθανότητας $F_Y(y)$ και $f_Y(y)$ για την τυχαία μεταβλητή $Y = X^2$ με $y > 0$ συναρτήσει των $F_X(x)$ και $f_X(x)$ αντίστοιχα.

Άσκηση 4: Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \ \kappa\alpha\iota\ \lambda > 0$$

να υπολογίσετε τις ποσότητες $E[X]$ και $Var[X]$.

Άσκηση 5: Αν X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παραμέτρους $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 > 0$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $F_Z(z)$ της μεταβλητής $Z = X_1 + X_2$. Επιπλέον, να υπολογίσετε τις ποσότητες $E[Z]$ και $Var[Z]$.

Άσκηση 6: Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Cauchy με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την σχέση:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$$

Να δείξετε ότι η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $|X|$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 7: Να υπολογίσετε την ροπογεννήτρια συνάρτηση για την τυχαία μεταβλητή X όταν αυτή ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την σχέση:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, 0 < x < \infty, a > 0, \beta > 0$$

Άσκηση 8: Αν τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \; \mu\varepsilon \; x > 0 \; \kappa\alpha\iota \; \lambda > 0$$

να αποδείξετε την παρακάτω αναδρομική σχέση:

$$E[X^{n+1}] = \frac{1}{\lambda}E[X^n] + \frac{1}{\lambda^2}\frac{d}{d\lambda}E[X^n]$$

Άσκηση 9: Αν X είναι τυχαία μεταβλητή και c σταθερά, να δείξετε ότι:

$$Cov[X, c] = 0$$

Άσκηση 10: Αν X και Y τυχαίες μεταβλητές και $a, b, c \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:
(α): $Cov[aX, bY] = abCov[X, Y]$
(β): $Cov[aX + bY, cZ] = acCov[X, Z] + bcCov[Y, Z]$

Άσκηση 11: Έστω $M_X(t)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Xκαι $S(t) = \log(M_X(t))$.

Να δείξετε ότι $\frac{d}{dt}S(t)\Big|_{t=0} = E[X]$ και $\frac{d^2}{dt^2}S(t)\Big|_{t=0} = Var[X]$

Άσκηση 12: Αν X και Y τυχαίες μεταβλητές με $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ και $b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$Cov[\sum_{k=1}^{n} a_k X_k, \sum_{l=1}^{n} b_l X_l] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_k b_l Cov[X_k, X_l]$$

Άσκηση 13: Ο διάμεσος median (m) μιας συνεχούς κατανομής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ δίνεται από την σχέση:

$$\int_{-\infty}^{m} f_X(x)dx = \int_{m}^{+\infty} f_X(x)dx = \frac{1}{2}$$

Να βρείτε τον διάμεσο των παρακάτω κατανομών:
(α): $f(x) = 3x^2, 0 < x < 1$
(β): $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < +\infty$

Άσκηση 14: Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + x), -1 < x < 1.$$

(α): Να βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή $Y = X^2$.
(β): Να υπολογίσετε τις ποσότητες $E[Y]$ και $Var[Y]$.