Σήμερα: Ασκήσεις στις βασικές έννοιες
(Ορισμός, Ιδιότητες, Ανεξαρτησία)

<u>Άσκηση 1</u> (Ιδιότητες πιθανότητας)

Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος (δ.χ.) και A, B δύο ενδεχόμενα του Ω για τα οποία $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ και $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$

Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A\cap B$, $A\cap\bar{B}$, $\bar{A}\cap B$, $\bar{A}\cap\bar{B}$

<u>Λύση</u>

$$P(\bar{A}) = 1-P(A) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{B}) = 1-P(B) = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(A\cap B) = ;$$

Ισχύει ότι $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \iff$

$$P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{4} = \frac{6+4-9}{12} = \frac{1}{12}$$

(Αφού $P(A\cap B)>0$, έπεται ότι τα A, B μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα)

$$P(A\cap\bar{B}) = P(A)-P(A\cap B) = \frac{1}{2}-\frac{1}{12} = \frac{6-1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$P(\bar{A}\cap B) = P(B)-P(A\cap B) = \frac{1}{3}-\frac{1}{12} = \frac{4-1}{12} = \frac{3}{12}$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

<u>Παρατήρηση</u> Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να συμβεί <u>ακριβώς ένα</u> από τα A, B. Το ενδεχόμενο αυτό

ορίζεται ως η ξενη ενωση : $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

Οποτε επειδη η συνάρτηση πιθανότητας είναι αθροιστική σε ξενες ενώσεις προκυπτει οτι

$$P\left((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\right) = P(A\cap\bar{B}) + P(B\cap\bar{A}) = \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12}$$

Άσκηση 2 (Φραγματα για πιθανότητες)

α) Εστω $A, B \subseteq \Omega$ με $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$

Τι μπορουμε να πουμε για τις πιθανότητες $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$

Δεν μπορούμε να βρούμε την ακριβη τιμή των $P(A\cup B)$ και $P(A\cap B)$ αλλα μπορουμε να βρουμε φραγματα

$$A, B \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A), P(B) \leq P(A\cup B) \Leftrightarrow$$

κάτω φραγμα για την ενωση

$$\max\{P(A), P(B)\} \leq P(A\cup B) \Leftrightarrow$$

$$\max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} \leq P(A\cup B) \Leftrightarrow \boxed{P(A\cup B) \geq \frac{1}{2}} = \frac{3}{6}$$

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A\cap B)$$

$$= \frac{3+2}{6} - P(A\cap B) = \frac{5}{6} - P(A\cap B) \leq \frac{5}{6}$$

Άρα $\boxed{P(A\cup B) \leq \frac{5}{6}}$

$$\boxed{\frac{3}{6} \leq P(A\cup B) \leq \frac{5}{6}}$$

Για την πιθανοτητα της τομής $A\cap B$ δεν μπορουμε να εξαγουμε πολυ πληροφορια διοτι $P(A)+P(B) < 1$

$A \cap B \subseteq A, B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A), P(B) \Leftrightarrow$

$P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\} \Leftrightarrow$

$P(A \cap B) \leq \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \Leftrightarrow$

Αρα, $\boxed{P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}}$

Ομοιως, εχουμε

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \qquad \leq \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cup B) = \frac{5}{6} - P(A \cup B) \qquad \frac{1}{3} < \frac{5}{6}$$

Οποτε δεν εχουμε κατω φραγμα για την $P(A \cap B)$ εκτος απο το τετριμμενο (το 0) δηλαδη

$$\boxed{0 \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}}$$

β) Εστω $P(A) = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ και $P(B) = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ οπου $A, B \subseteq \Omega$ να βρεθουν φραγματα για την $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$

$A, B \subseteq A \cup B \Rightarrow \max\{P(A), P(B)\} \leq P(A \cup B) \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) \geq \frac{9}{12}}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} - P(A \cap B) = \frac{17}{12} - P(A \cap B) \leq \frac{17}{12}$

Επειδη $\frac{17}{12} > 1$ δεν δινει πληροφορια για το ανω φραγμα. Οποτε

$$\boxed{\frac{9}{12} \leq P(A \cup B) \leq 1}$$

Απο την αλλη τωρα εχουμε πληροφοριες για την τομη $A \cap B$

$A \cap B \subseteq A, B \Rightarrow P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\} = \frac{8}{12}$.

Επίσης, έχουμε ότι

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} - P(A \cup B)$$
$$= \frac{17}{12} - \underline{P(A \cup B)}$$

Γνωρίζουμε $\boxed{P(A \cup B) \leq 1} \Leftrightarrow \underline{-P(A \cup B)} \geq \underline{-1}$, οπότε

$$P(A \cap B) \geq \frac{17}{12} - 1 = \frac{5}{12}$$

Έτσι

$$\boxed{\frac{5}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{8}{12}}$$

Διάλειμμα μέχρι 10:03

Άσκηση 3 (Το πρόβλημα του ημιτελούς παιχνιδιού)

Δυο παίχτες A και B παίζουν τάβλι, στο οποίο είναι επίσου καλοί και οι δυο, δηλαδή έχουν πιθανότητα 1/2 ο καθένας να κερδίσει σε μια παρτίδα.

Έχουν ποντάρει συνολικά 100 ευρώ τα οποία θα τα πάρει όποιος νικήσει τον άλλον ~~περισσότερες~~ K φορές. Αν το παιχνίδι σταματήσει για κάποιο λόγο και ο πρώτος παίχτης χρειάζεται 2 ακόμα νίκες να φτάσει στο K, ενώ ο δεύτερος χρειάζεται 3 νίκες για να φτάσει στο K. Πώς πρέπει να μοιραστεί αυτό το ποσό στους παίχτες;

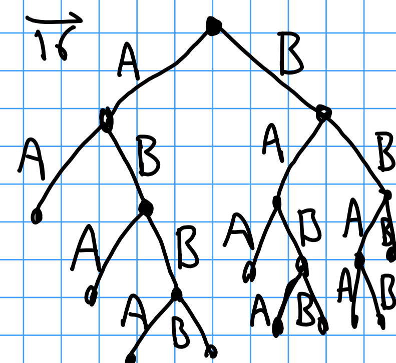
Το δίκαιο είναι το ποσό να μοιραστεί ανάλογα με την

πιθανότητα που έχει ο καθένας να κερδίσει.
Θα βρούμε τον δειγματικό χώρο Ω αυτού πειράματος τύχης και τις πιθανότητες να συμβεί κάθε ενδεχόμενο

Έστω A το ενδεχόμενο να κερδίσει ο παίχτης A σε μία παρτίδα
B το ενδεχόμενο να κερδίσει ο παίχτης B σε μία παρτίδα

Όλα τα πιθανά σενάρια για να τελειώσει το παιχνίδι είναι τα εξής:

	Ενδεχόμενο	Νικητής	Πιθανότητα
1	A A	A	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
2	A B A	A	$\frac{1}{8}$
3	A B B A	A	$\frac{1}{16}$
4	A B B B	B	$\frac{1}{16}$
5	B A A	A	$\frac{1}{8}$
6	B A B A	A	$\frac{1}{16}$
7	B A B B	B	$\frac{1}{16}$
8	B B A A	A	$\frac{1}{16}$
9	B B A B	B	$\frac{1}{16}$
10	B B B	B	$\frac{1}{8}=\frac{2}{16}$



Πιθανότητα να είναι νικητής ο A: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$
Πιθανότητα να είναι νικητής ο B: $1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$

Άρα, ο παίχτης A θα λάβει $\frac{11}{16}\cdot 100 = 68.75$ €
και ο παίχτης B θα λάβει $\frac{5}{16}\cdot 100 = 31.25$ €

$\{1,2,3,4\}$ ενδειξεις

Άσκηση 4 (Έλεγχος ανεξαρτησίας)

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο τετράεδρο ζάρι 2 φορές για το οποίο καθε ένα απο τα 16 ενδεχομενα ειναι ισοπίθανο με πιθανότητα $1/16$

α) Εστω A = Το ενδεχομενο η 1η ριψη να ειναι 1

B = Το ενδεχομενο το αθροισμα των δυο ριψεων να ειναι 5

C = Το ενδεχομενο η 2η ριψη να ειναι 3

Ποια ζευγη ενδεχομενων ειναι ανεξαρτητα;

Λύση Δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$ ονομάζονται ανεξαρτητα αν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Εδω ο δειγματικος χωρος Ω ειναι το συνολο

$$\Omega = \{(i,j) : i \in [4],\ j \in [4]\} \qquad \boxed{|\Omega| = 16}$$

Το ενδεχομενο A ειναι το συνολο

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}}$$

Το ενδεχομενο B ειναι το συνολο

$$B = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\} \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}}$$

Το ενδεχομενο C ειναι το συνολο

$$C = \{(1,3), (2,3), (3,3), (4,3)\} \Rightarrow \boxed{P(C) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}}$$

$$A \cap B = \{(1,4)\} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$$

Αρα, A, B ανεξαρτητα

$$A \cap C = \{(1,3)\} \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$$

Άρα, A, C ανεξάρτητα

$$B\cap C = \{(2,3)\} \Rightarrow \quad P(B\cap C) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = P(B)\cdot P(C)$$

Άρα, B, C ανεξάρτητα

β) A = Το μέγιστο των δύο ενδείξεων να ισούται με 2
B = Το ελάχιστο των δύο ενδείξεων να ισούται με 2

$$A = \{(2,2),\ (2,1),\ (1,2)\} \qquad P(A) = \frac{3}{16}$$

$$B = \{(2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,2),\ (4,2)\} \qquad P(B) = \frac{5}{16}$$

$$A\cap B = \{(2,2)\} \qquad P(A\cap B) = \frac{1}{16} \neq \frac{3}{16}\cdot\frac{5}{16} = P(A)\cdot P(B)$$

Άρα, τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ανεξάρτητα

Άσκηση 5 (Ο νόμος του Murphy)

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ μια λίστα από ανεξάρτητα όχι και τόσο ευχάριστα ενδεχόμενα που μπορούν να μας συμβούν σε μια μέρα με μικρές πιθανότητες το καθένα $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ποια είναι η πιθανότητα κάτι να πάει στραβά σε μια μέρα;

Το ενδεχόμενο κάτι να πάει στραβά σε μια μέρα είναι το σύνολο $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

Οπότε έχουμε

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n)$$

Επειδη τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ ειναι ανεξαρτητα και τα $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ ειναι ανεξαρτητα, αρα

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n)$$
$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n))$$

Υπενθυμιση: Για καθε $x \in \mathbb{R}$ $\quad 1 + x \leq e^x$

αρα για $x = -P(A_i)$: $\quad 1 - P(A_i) \leq e^{-P(A_i)}$

οποτε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq 1 - e^{-P(A_1)} e^{-P(A_2)} \cdots e^{-P(A_n)}$$
$$\geq 1 - e^{-(P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n))}$$

Αρα $\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq 1 - e^{-(p_1 + p_2 + \dots + p_n)}}$

Αν υπαρχουν 100 πραγματα που μπορουν να πανε στραβα και το καθενα εχει πιθανοτητα $p_i \approx \frac{1}{1000}$

τοτε η πιθανοτητα να συμβει τουλαχιστον ενα απο αυτα σε μια μερα ειναι τουλαχιστον $\quad 1 - e^{-\frac{100}{1000}} = 1 - e^{-\frac{1}{10}}$

$$\simeq 0.0951 = 9.5\%$$

Αρα, περιπου καθε μια στις 10-11 μερες κατι θα δεν συμβαινει.