Σήμερα: Ασκήσεις στις Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (Μέρος Α)

Άσκηση 1 (ΠΑΟ - ΑΕΚ)

Ο ΠΑΟ και η ΑΕΚ συναντιούνται στο τελευταίο παιχνίδι των play offs για την κατάκτηση της 2ης θέσης που οδηγεί στο Champion Leagues. Από τις προηγούμενες αναμετρήσεις των δύο ομάδων ο αριθμός των τερμάτων (γκολ) του ΠΑΟ(X) και αυτών της ΑΕΚ(Y) ανά παιχνίδι υπολογίζεται να έχει τις παρακάτω κατανομές:

X	0	1	2
$P(X = y)$	0.5	0.3	0.2

Y	0	1	2
$P(Y = x)$	0.4	0.3	0.3

α) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός γκολ που θα σημειωθούν σε αυτό το παιχνίδι;

β) Ποιά είναι η πιθανότητα το παιχνίδι να είναι over (να μπουν συνολικά περισσότερα από δύο γκολ);

γ) Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο ΠΑΟ;

α) Εστω Z = ο αριθμος των γκολ που θα σημειωθουν στο παιχνιδι

Τότε $Z = X + Y$ οπότε

$$E(Z) = E(X+Y) \underset{\text{απο την γραμμικοτητα της μεσης τιμης}}{=\!=\!=} E(X) + E(Y)$$

Απο τον ορισμο της μεσης τιμης εχουμε οτι

$$E(X) = \sum_{x \in S_x} x \cdot P(X=x) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2)$$

$$= 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2$$

$$= 0.7$$

$S_x = S_y = \{0, 1, 2\}$

Άρα, κατα μεσο ορο ο ΠΑΟ σημειωνει 0.7 γκολ εναντιον της ΑΕΚ

Ομοίως

$$E(Y) = \sum_{y \in S_Y} y \cdot P(Y=y) = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2)$$

$$= 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.3$$

$$= 0.9$$

Άρα, κατά μέσο όρο, η ΑΕΚ σημειώνει 0.9 γκολ εναντίον του ΠΑΟ

Τελικά, $E(Z) = E(X) + E(Y) = 0.7 + 0.9 = 1.6$ γκολ

Άρα, κατά μέσο όρο, θα σημειωθούν 1.6 γκολ στο παιχνίδι.

β) Ψάχνουμε την πιθανότητα

$$P(Z>2) = P(Z \geq 3) = P(Z=3) + P(Z=4)$$

Οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες

$$P(Z=3) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1)$$
$$= P(X=1)\cdot P(Y=2) + P(X=2)\cdot P(Y=1)$$
$$= 0.3\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.3 = 0.15$$

$$P(Z=4) = P(X=2, Y=2) = P(X=2)\cdot P(Y=2)$$
$$= 0.3\cdot 0.2 = 0.06$$

Αρα, $P(Z>2) = P(Z=3) + P(Z=4) = 0.15 + 0.06 = 0.21$

γ) Η ζητουμενη πιθανοτητα ειναι

$$P(X>Y) = P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=2, Y=1)$$
$$= P(X=1)\cdot P(Y=0) + P(X=2)\cdot P(Y=0) + P(X=2)\, P(Y=1)$$
$$= 0.3\cdot 0.4 + 0.2\cdot 0.4 + 0.2\cdot 0.3 = 0.26$$

Άσκηση 2 (Billy Gates)

Ο νεαρός Billy Gates τα πρωϊνά πουλούσε εφημερίδες στο μετρό. Είχε υπολογίσει ότι κάθε μέρα υπήρχε ζήτηση για 150 έως 250 αντίτυπα της εφημερίδας MorningStar, όπου κάθε μια τις τιμές 150 έως και 250 είχε ίση πιθανοτητα εμφάνισης. Ο Billy αγόραζε 200 αντίτυπα προς 1\$ το ένα και τα πουλούσε στους βιαστικούς περαστικούς για 1.50\$. Στην περίπτωση που του έμενε μια εφημερίδα την επέστρεφε και έπαιρνε πίσω 0.50\$. Ποιό είναι το αναμενόμενο κέρδος του κάθε μέρα;

Λύση Εδω υπάρχουν 2 τυχαιες μεταβλητες που μας ενδιαφερουν

X = ο αριθμος των εφημεριδων που θα του $\boxed{\text{ζητήσουν}}$ σε μια μερα

Y = το κέρδος του Billy

Για την X : $S_X = \{150, 151, \ldots, 250\}$

Ολες οι 101 διαφορετικες τιμες ειναι ισοπιθανες
(X ακολουθει την διακριτη ομοιομορφη κατανομη)
αρα η καθεμια εχει πιθανότητα $\frac{1}{101}$

δηλαδη

$$P(X=k) = \frac{1}{101} \quad \text{για καθε } k \in \{150, \ldots, 250\}$$

Το κερδος Y του Billy συνδεεται με την X ως εξης:

$$Y = \begin{cases} -200 + 1.5 \cdot 200, & X \in \{200, \ldots, 250\} \\ \boxed{-200 + 1.5 \cdot X + (200 - X) \cdot 0.5} & X \in \{150, \ldots, 199\} \end{cases}$$

Άρα

$$E(Y) = \sum_{x=150}^{199} \left(-200 + 1.5x + (200-x)\cdot 0.5\right)\cdot \frac{1}{101}$$

$$+ \sum_{x=200}^{250} \boxed{\left(-200 + 1.5\cdot 200\right)} \frac{1}{101}$$

$$= \frac{3725}{101} + \frac{5100}{101} = 87.37\$$$

Προσοχή! Η τ.μ. Z = # εφημερίδων που πούλησε ο B.G. δεν ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή διότι κάποιες τιμές της έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα από κάποιες άλλες.

Διάλειμμα μέχρι 11:10

Διωνυμική κατανομή (Binomial distribution)

Ρίχνουμε μη αμερόληπτο νόμισμα N φορές

(Πιθανότητα Κορώνας: p, Πιθανότητα Γράμματα: $q=1-p$)

$X = \#$ εμφανίσεων K στις N φορές $\sim Binom(N,p)$

Άσκηση 3 (Διωνυμική κατανομή)

Αν ο μέσος και η διακύμανση μιας διωνυμικής κατανομής είναι 4 και 4/3 αντίστοιχα, να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(X \geq 2)$.

Λύση Γνωρίζουμε ότι αν $X \sim Binom(N,p)$ τότε

$$\boxed{E(X) = Np} \quad \text{και} \quad \boxed{Var(X) = Np \cdot q}$$

οπότε

$$Np = 4 \quad \text{και} \quad Npq = 4/3 \iff q = \frac{1}{3} \iff \boxed{p = \frac{2}{3}}$$

Άρα $\boxed{N=6}$. Οπότε $X \sim Binom\left(6, \frac{2}{3}\right)$

Γνωρίζουμε ότι η PMF της X δίδεται από τον τύπο

$$P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \binom{6}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}$$

$$X \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

Εναλλακτικά

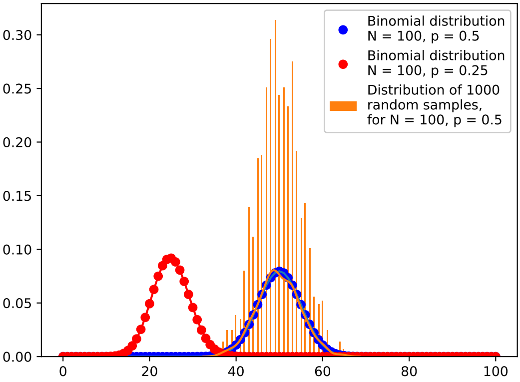
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$$

$$= 1 - P(X=1) - P(X=0)$$

$$= 1 - \binom{6}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \binom{6}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$= 0.9822$$

Διωνυμική κατανομή



Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει γραφικά 2 διωνυμικές κατανομές (μπλε - κόκκινο) με διαφορετικές παραμέτρους και την κατανομή ενός τυχαίου δείγματος (πορτοκαλί) που παράχθηκε με βάση την (μπλε) διωνυμική κατανομή. Το σχήμα παράγεται από τον ακόλουθο κώδικα:

Διωνυμική κατανομή

```
import numpy as np
from scipy import stats
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

trials = 100 #N
P, P2 = 0.5, 0.25 #success probability
S = 1000 #sample size = #experiments
rs = np.random.binomial(n=trials, p=P, size=S) #draw a random sample of size S using
    numpy.random
#rs = stats.binom.rvs(n=trials, p=P, size=S) #draw a random sample of size S using scipy
    .stats
vals = np.arange(trials+1) #list of values 0,1,2,..., trials
f1 = stats.binom.pmf(vals, trials, P)
f2 = stats.binom.pmf(vals, trials, P2)

label1 = "Binomial distribution\n" + "N = " + str(trials) + ", p = " + str(P)
plt.plot(vals,f1, 'bo',label = label1)
plt.plot(vals,f1)
label2 = "Binomial distribution\n" + "N = " + str(trials) + ", p = " + str(P2)
plt.plot(vals,f2, 'ro', label = label2)
plt.plot(vals,f2, color='red')
label3 = "Distribution of " + str(S) + "\nrandom samples,\n" + "for N = " + str(trials)
    + ", p = " + str(P)
sns.distplot(rs, hist=True, kde=True, bins = trials+1, label = label3)
plt.legend()
plt.show()
```

X = # ανθρώπων που θα εμφανισθούν για check in

Θα δείξουμε ότι η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή

Παράδειγμα 4 (Overbooking)

Για ένα αεροπλάνο 50 θέσεων έχουν γίνει 55 κρατήσεις (overbooking). Η πιθανότητα ο καθένας από αυτούς να εμφανισθεί στο αεροδρόμιο είναι 90% (ανεξάρτητα από τους υπολοίπους).

i) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός επιβατών που θα εμφανισθούν για check-in;

ii) Ποια είναι η πιθανότητα κάποιοι επιβάτες να μείνουν εκτός πτήσης;

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ιδιότητα:
(Είναι εναλλακτικός ορισμός της Διωνυμικής Κατανομής)

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_N$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με ίση πιθανότητα p η καθεμία, τότε

η τ.μ. $$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $Binom(N, p)$

Για την συγκεκριμένη άσκηση θεωρούμε τις τ.μ.

$$\rightarrow \quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } i\text{-οστός πελάτης έρθει για check in} \\ 0 & \text{αν δεν έρθει} \end{cases} \quad i \in \{1, 2, \ldots, 55\}$$

Οι $X_1, X_2, \ldots, X_{55}$ ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με παράμετρο $p = 0.9$ (και είναι ανεξάρτητες)

Επίσης $X = \#$ ανθρώπων που θα εμφανισθούν για check in

$$= X_1 + X_2 + \cdots + X_{55}$$

Άρα, η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή Binom $(55, 0.9)$

i) Ο αναμενόμενος αριθμός επιβατών από τους 55 που θα εμφανισθούν για check-in είναι

$$E(X) = Np = 55 \cdot 0.9 = 49.5 \text{ επιβάτες}$$

ii) Το ενδεχόμενο κάποιοι πελάτες να μείνουν εκτός της πτήσης συμβαίνει όταν $X > 50$

$$P(X>50) = P(X=51)+P(X=52)+P(X=53)+P(X=54)+P(X=55)$$

$$= \sum_{k=51}^{55} \binom{55}{k} 0.9^{k} \cdot 0.1^{55-k} = 0.3451$$

Άρα, στο 34% των περιπτώσεων κάποιος θα μένει εκτός πτήσης

→ Ρίχνουμε 3 αμερόληπτα ζάρια

Άσκηση 5 (Chuck-a-luck)

Μια πιο δίκαιη παραλλαγή του παιχνιδιού του τροχού της τύχης είναι η ακόλουθη: Κάθε παίχτης ~~στοιχηματίζει~~ [redacted] 100€ ποντάρει σε ένα αριθμό από το 1 έως το 6. Αν κανένα από τα ζάρια δεν φέρει αυτόν τον αριθμό τότε πρέπει να πληρώσει [redacted] 100 €, αλλιώς (χωρίς να δώσει κάποιο ποσό για την συμμετοχή του) κερδίζει το ποσό k~~a~~ 100 όπου k είναι ο αριθμός των φορών που εμφανίστηκε στα 3 ζάρια ο αριθμός που στοιχημάτισε.
Να εξετασθεί αν το παιχνίδι είναι δίκαιο για τον παίχτη.

1	2	3
4	5	6

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος παίχτης επιλέγει έναν αριθμό από 1 έως 6.

Έστω X = # φορών που εμφανίστηκε ο αριθμός που διάλεξε στα 3 ζάρια

Ορίζουμε τις τ.μ. X_1, X_2, X_3 όπου

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{αν εμφανίσθηκε στο } i\text{-οστό ζάρι ο αριθμός που επιλέξαμε} \\ 0 & \end{cases}$$

$i \in \{1, 2, 3\}$

Οι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με πιθανότητα $p = \frac{1}{6}$.

Ισχύει ότι

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

Άρα, η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $\text{Binom}\left(3, \frac{1}{6}\right)$

Άρα

$$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

Εστω Y το κερδος του παιχτη

$$Y = \begin{cases} -100 & \text{αν } X=0 \\ 100 & \text{αν } X=1 \\ 200 & \text{αν } X=2 \\ 300 & \text{αν } X=3 \end{cases}$$

Οποτε η αναμενομενη τιμη του Y ειναι

$$E(Y) = -100 \cdot P(X=0) + 100 \cdot P(X=1) + 800 \cdot P(X=2) + 300 \cdot P(X=3) = \underline{-7.87€}$$

Δηλαδη κατα μεσο ορο αν ο παιχτης παιζει το παιχνιδι πολλες φορες θα χανει καθε φορα 8€

Δηλαδη αν παιζουν 100 παιχτες ταυτοχρονα κατα μεσο ορο στο τελος η μανα του παιχνιδιου θα ειχε στο τελος στο ταμειο $8 \cdot 100 = 800€$