Ασκήσεις στις Διακριτές Κατανομές (Μέρος Β)

Πιθανότητες και Στατιστική

Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

2024-2025

Τυπολόγιο

$X \sim \mathrm{Bernoulli}(p) : S_X = \{0,1\}, P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p, \quad \mu = p, \sigma^2 = p(1-p)$ (1 : επιτυχία, 0 : αποτυχία)

$X \sim \mathrm{Binom}(n,p) : S_X = \{0,1,\ldots,n\}, P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \mu = np, \sigma^2 = np(1-p)$ (k επιτυχίες σε n επαναλήψεις)

$X \sim \mathrm{Geom}(p) : S_X = \{1,2,\ldots\}, P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \mu = \dfrac{1}{p}, \sigma^2 = \dfrac{1-p}{p^2}$ (k επαναλήψεις μέχρι 1η επιτυχία)

$P(X > k) = (1-p)^k$, $P(X > n+m | X > m) = P(X > n)$

$X \sim \mathrm{NBinom}(r,p) : S_X = \{r, r+1, \ldots\}, P(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \mu = \dfrac{r}{p}, \sigma^2 = r\dfrac{1-p}{p^2}$

(k επαναλήψεις μέχρι r επιτυχία)

$X \sim \mathrm{HGeom}(\mathrm{M},\mathrm{n},\mathrm{N}) : P(X=k) = \binom{n}{k}\binom{M-n}{N-k} / \binom{M}{N}, \mu = \dfrac{Nn}{M}, \sigma^2 = \dfrac{Nn(M-n)(M-N)}{M^2(M-1)},$

(k επιτυχίες σε N επαναλήψεις χωρίς επανατοποθέτηση από πληθυσμό μεγέθους M που περιέχει n επιθυμητά και $M-n$ ανεπιθύμητα αντικείμενα)

$\mathrm{HGeom}(\mathrm{M},\mathrm{n},\mathrm{N}) \to \mathrm{Binom}(N,p)$, αν $n/M \to p$ καθώς $M \to \infty$.

$X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda) : S_X = \mathbb{N}, P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}, \mu = \sigma^2 = \lambda,$

$\mathrm{Binom}(\mathrm{n},\mathrm{p}) \to \mathrm{Poisson}(\lambda)$, αν $np \to \lambda$ καθώς $n \to \infty$.

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Αν $X_i \sim \mathrm{Binom}(N_i, p)$, $i \in [n]$ τότε $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Binom}(N_1 + N_2 + \cdots + N_n, p)$

Αν $X_i \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_i)$, $i \in [n]$ τότε $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$

Άσκηση (Γκολ της Εθνικής)

Έστω ότι ο αριθμός των γκολ που πετυχαίνει η Εθνική ομάδα ποδοσφαίρου στα εκτός έδρας παιχνίδια ακολουθεί την κατανομή Poisson. Επίσης, είναι γνωστό ότι στα εκτός έδρας παιχνίδια η Εθνική έχει την ίδια πιθανότητα να πετύχει ένα ή δύο γκολ. Να βρεθεί η πιθανότητα στο επόμενο εκτός έδρας παιχνίδι η Εθνική να πετύχει τέσσερα γκολ.

X = # τερματα που πετυχαινει η Εθνικη...

Η X ακολουθει την κατανομη Poisson με παραμετρο λ

Γνωρίζουμε οτι η PMF της X δίδεται απο τον τύπο

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Γνωρίζουμε ότι $P(X=1) = P(X=2) \Leftrightarrow$

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

Άρα $P(X=4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!} = 0.09 = 9\%$

Λύση.

Έστω X ο αριθμός των γκολ που πετυχαίνει η εθνική. Γνωρίζουμε ότι η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ και έχει PMF $f_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Επίσης,

$$P(X = 1) = P(X = 2) \Leftrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Επομένως,

$$P(X = 4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3e^2} = 0.09. \qquad \square$$

Άσκηση (Επιθέσεις στο cloud)

Οι ημερήσιες συχνότητες επιθέσεων σε ένα cloud τον πρώτο χρόνο λειτουργίας του δίδονται στον επόμενο πίνακα

Αριθμός επιθέσεων	0	1	2	3	4
Συχνότητα (ημέρες)	223	110	27	4	1

Αν υποθέσουμε ότι ο αριθμός X των επιθέσεων που γίνονται στο cloud μέσα σε μια ημέρα ακολουθεί την κατανομή Poisson, να βρεθεί η παράμετρος λ η οποία προσεγγίζει τις παραπάνω παρατηρήσεις. Στην συνέχεια, να βρεθεί με βάση τον τύπο της κατανομής Poisson ο αναμενόμενος αριθμός ημερών στις οποίες θα έχουμε 0, 1, 2, 3, 4 επιθέσεις αντίστοιχα μέσα στον επόμενο χρόνο.
(Υπόδειξη: Να υπολογισθεί ο μέσος αριθμός επιθέσεων σε μια μέρα με βάση τα στοιχεία του πίνακα.)

Λύση

Ο μέσος αριθμός επιθέσεων μέσα σε μια μέρα είναι

$$\mu = \frac{0 \cdot 223 + 1 \cdot 110 + 2 \cdot 27 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{365} = \frac{36}{73} = 0.493.$$

Επομένως, $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. Άρα με $\lambda = \mu = 36/73 = 0.493 \approx 0.5$.

$P(X=0) = e^{-0.5}\frac{(0.5)^0}{0!} = 0.606, \qquad P(X=1) = e^{-0.5}\frac{(0.5)^1}{1!} = 0.303.$

$P(X=2) = e^{-0.5}\frac{(0.5)^2}{2!} = 0.075, \qquad P(X=3) = e^{-0.5}\frac{(0.5)^3}{3!} = 0.012.$

$P(X=4) = e^{-0.5}\frac{(0.5)^3}{4!} = 0.0015.$

Επομένως, μέσα σε ένα χρόνο (365 ημέρες), ο μέσος αριθμός ημερών με 0, 1, 2, 3 και 4 επιθέσεις θα είναι αντίστοιχα

$365 \cdot P(X=0) = 221.38 \approx 221$, $365 \cdot P(X=1) = 110.69 = 111$,
$365 \cdot P(X=2) = 27.67 \approx 28$, $365 \cdot P(X=3) = 4.61 \approx 5$ και
$365 \cdot P(X=4) = 0.57 \approx 1$.

Άσκηση (Ωφελιμότητα φαρμάκου)

Το πλήθος των φορών που ένας άνθρωπος αρρωσταίνει το χρόνο με κρύωμα ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 3$.
Ένα νέο φάρμακο μειώνει αυτή τη συχνότητα σε $\lambda = 2$ για το 75% του πληθυσμού, ενώ δεν έχει αποτέλεσμα στο υπόλοιπο 25%.
Αν ένας άνθρωπος που πήρε το φάρμακο αρρώστησε 0 φορές κατά τη διάρκεια του έτους, ποια η πιθανότητα να τον ωφέλησε το φάρμακο;

$X =$ # φορών που αρρώστησε κάποιος από κρυολόγημα

$A =$ το ενδεχόμενο να τον ωφέλησε το φάρμακο που πήρε

$P(A) = 0.75$ $\quad P(\bar{A}) = 0.25$

$P(X=k|A) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}$ $\quad P(X=k|\bar{A}) = e^{-3}\frac{3^k}{k!}$

Εδώ ψάχνουμε την πιθανοτητα $P(A|X=0)$

Απο τον τυπο του Bayes εχουμε οτι

$$P(A|X=0) = \frac{P(X=0|A)P(A)}{P(X=0)}$$

Απο τον τυπο της ολικής πιθανότητας εχουμε οτι

$$P(X=0) = P(A)\cdot P(X=0|A) + P(\bar{A})\cdot P(X=0|\bar{A})$$

$$= \frac{3}{4}\cdot e^{-2}\frac{2^0}{0!} + \frac{1}{4}\cdot e^{-3}\cdot\frac{3^0}{0!} = \frac{3}{4}\cdot e^{-2} + \frac{1}{4}\cdot e^{-3}$$

Οπότε

$$P(A|X=0) = \frac{\frac{3}{4}\cdot e^{-2}}{\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}e^{-3}} = 0.89 = 89\%$$

Αρα, αν καποιος δεν αρρωστησε καθολου κατα 89% αυτο οφειλεται οτι τον ωφελησε το φαρμακο που πήρε.

Λύση

Έστω X το πλήθος φορών που αρρώστησε το άτομο σε ένα χρόνο και έστω A το ενδεχόμενο να τον ωφέλησε το φάρμακο. Δίνονται

$$P(X=0|A)=e^{-2}, \quad P(X=0|\overline{A})=e^{-3}, \quad p(A)=3/4.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Bayes, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(A|X=0) &= \frac{P(X=0|A)P(A)}{P(X=0|A)P(A)+P(X=0|\overline{A})P(\overline{A})} \\ &= \frac{3e^{-2}/4}{3e^{-2}/4+e^{-3}/4} \\ &= \frac{3}{3+1/e} \approx 0.89. \end{aligned}$$

Άσκηση (Αθροιστική ιδιότητα κατανομής Poisson)

Να αποδειχθεί ότι αν $X_1 \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1)$ και $X_2 \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_2)$ ανεξάρτητες, τότε $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Λύση

Το ενδεχόμενο $\{X_1 + X_2 = n\}$ διαμερίζεται στα $\{X_1 = k, X_2 = n - k\}$, με $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, οπότε (και λόγω ανεξαρτησίας των X_1, X_2)

$$\begin{aligned} P(X_1+X_2=n) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k, X_2=n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n \end{aligned}$$

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση (Αιτήσεις εξυπηρέτησης)

Ένας server δέχεται κατά μέσο όρο 5 αιτήσεις από clients ανά δευτερόλεπτο.

i) Ποια είναι η πιθανότητα να δεχθεί ~~5~~ 6 αιτήσεις στο επόμενο δευτερόλεπτο;

ii) Ποια είναι η πιθανότητα να δεχθεί 1000 αιτήσεις στο επόμενο λεπτό;

Λύση

i) Αν X το πλήθος των αιτήσεων σε ένα δευτερόλεπτο, τότε $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, όπου $\lambda = 5$. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(X=k) = e^{-5}\frac{5^k}{k!}$$

$$P(X = \cancel{5}\,6) = e^{-5}\frac{5^{\cancel{5}\,6}}{\cancel{5}\,6!} \simeq \cancel{0.17546737}\ 0.146$$

Λύση (συνέχεια)

ii) Αν X_i το πλήθος των αιτήσεων στο i-οστό δευτερόλεπτο του λεπτού, όπου $i \in [t]$ και $t = 60$, τότε $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$, με $\lambda = 5$.
Οι TM X_i είναι ανεξάρτητες, οπότε το πλήθος αιτήσεων στο λεπτό είναι

Απο την αθροισικη ιδιοτητα της κατανομης Poisson

αφου σε 1 sec γινονται 5 reqs σε 60 sec θα γινονται 60·5 reqs κατα μεσο ορο

$$X = \sum_{i=1}^{t} X_i \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

Η X ακολουθει κατανομη Poisson με παραμετρο $\lambda = 60 \cdot 5 = 300$

Κατόπιν τούτου, είναι

$$P(X = \underline{1000}) = e^{-300}\frac{300^{1000}}{1000!} \simeq 0$$

Ο αριθμός αυτός προσεγγίζεται πιο εύκολα με τη βοήθεια της κανονικής κατανομής που θα δούμε στα επόμενα.

Άσκηση (Αλλεργία στις ενέσεις)

Η πιθανότητα ένας άνθρωπος να έχει αλλεργία σε ένα εμβόλιο είναι $p = 1/1000$. Κάνουμε ένεση σε $N = 2000$ άτομα. Να βρεθεί η πιθανότητα να παρουσιάσουν αλλεργία πάνω από 2 άτομα.

Λύση

Έστω X ο αριθμός των ατόμων που θα πάθουν αλλεργία. Ισχύει ότι, $X \sim \mathrm{Binom}(N, p)$. Για την ζητούμενη πιθανότητα $P(X > 2)$, ισχύει ότι

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1) - P(X = 0)$$

$$\binom{2000}{2}\frac{1}{1000^2}\cdot\left(\frac{999}{1000}\right)^{1998} + \binom{2000}{1}\frac{1}{1000}\left(\frac{999}{1000}\right)^{1999}$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} = 0.3233.$$

$$+\binom{2000}{0}\left(\frac{1}{1000}\right)^0\left(\frac{999}{1000}\right)^{2000}$$

Λύση (συνέχεια)

Μπορούμε να προσεγγίσουμε την ΤΜ X από μια ΤΜ $Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, όπου $\lambda = 2000 \cdot \frac{1}{1000} = 2$, δηλαδή

$$\begin{aligned} P(X > 2) &\simeq P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) \\ &= 1 - P(Y = 2) - P(Y = 1) - P(Y = 0) \\ &= 1 - e^{-2}\frac{2^2}{2!} - e^{-2}\frac{2^1}{1!} - e^{-2}\frac{2^0}{0!} \\ &= 1 - 5e^{-2} = 0.3233. \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η προσέγγιση της ΤΜ X από την Y είναι πολύ καλή. Παρ' όλα αυτά, οι πιθανότητες που υπολογίσαμε δεν ταυτίζονται απόλυτα. Συγκεκριμένα, οι αντίστοιχες πιθανότητες με περισσότερη ακρίβεια είναι 0.3233235612 και 0.3233235838.

Διάλειμμα μέχρι 11:05

Άσκηση (Πολλά λαχεία)

Έστω ότι για κάποιο λαχείο εκδίδονται $2 \cdot 10^6$ δελτία, από τα οποία 100 έχουν σημαντικό κέρδος.
Πόσα δελτία πρέπει να αγοράσουμε ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 95% να εξασφαλίσουμε κάποιο σημαντικό κέρδος;

Λύση

Η πιθανότητα ένα δέλτιο να κερδίσει είναι $p = \dfrac{10^2}{2 \cdot 10^6} = \boxed{\dfrac{1}{2 \cdot 10^4}}$.
Έστω ότι αγοράζουμε N δελτία και έστω X ο αριθμός των δελτίων που κερδίζουν ανάμεσα στα N δελτία που αγοράσαμε.
Η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους N και p.
Υποθέτωντας αρχικά ότι το N είναι μεγάλο, μπορούμε να την προσεγγίσουμε χρησιμοποιώντας κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = Np = \dfrac{N}{2 \cdot 10^4}$.

Λύση (συνέχεια)

Θέλουμε

$$\boxed{P(X \geq 1) \geq 0.95} \Leftrightarrow \boxed{P(X < 1) \leq 0.05} \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda} \geq 20$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{N}{2 \cdot 10^4} \geq \ln 20$$

$$\Leftrightarrow N \geq 2 \cdot 10^4 \ln 20 = 59914.6.$$

Άρα, πρέπει να αγοράσουμε τουλάχιστον $N = 59615$ δελτία.

Άσκηση (Τυπογραφικά λάθη 1)

Υποθέστε ότι το πλήθος των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα ενός μαθηματικού βιβλίου έχει κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$.
α) Υπολογίστε την πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα λάθος σε μια συγκεκριμένη σελίδα
β) Υπολογίστε την πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 3 λάθη σε 2 σελίδες.

$X = \#$ λαθών σε μια σελίδα

$X \sim \text{Poisson}(2)$ δηλαδή $P(X=k) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}$

α) $P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(0) = 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 1 - e^{-2} = 0.84$

Υπενθυμίζεται ότι αν $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ τότε $E(X) = \lambda$ δηλαδή λ είναι ο μέσος αριθμός λαθών.

Απο την αθροιστικη (μεσος) ιδιοτητα της καταναμης Poisson:

β) Γνωριζουμε οτι ο αριθμος λαθων ανα σελιδα ειναι 2

Άρα, ο μεσος αριθμος λαθων ανα 2 σελιδες ειναι $2 \cdot 2 = 4$

Εστω $Y = \#$ λαθων σε 2 σελιδες

Για το βιβλιο αυτο η Y ακολουθει την καταναμη Poisson με παραμετρο $\lambda = 4$

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2)$$

$$= 1 - P(Y=2) - P(Y=1) - P(Y=0)$$

$$= 1 - e^{-4}\left(\frac{4^2}{2!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^0}{0!}\right) = 1 - 13e^{-4}$$

$$= 0.76$$ //

Άσκηση (Τυπογραφικά λάθη 2)

Σε έναν συγκεκριμένο εκδοτικό οίκο έχει παρατηρηθεί ότι στα κείμενα που περιέχουν τύπους γίνονται κατά μέσο όρο δύο λάθη ανά σελίδα. Το παράρτημα ενός βιβλίου υπό έκδοση περιέχει 10 σελίδες με τύπους.
α) Να βρεθεί η πιθανότητα τουλάχιστον 2 σελίδες του παραρτήματος να έχουν ακριβώς 2 λάθη η καθεμία.
β) Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει ένα ακριβώς λάθος στο παράρτημα;

$X = \#$λαθων σε μια σελιδα

Η τ.μ. X ακολουθει κατανομη Poisson(2) δηλαδη

$$\boxed{P(X=k) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}}$$

Άρα

$P(X=0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2}$

$P(X=1) = e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 2e^{-2}$

$P(X=2) = e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 2e^{-2}$

α) Έστω Y = # σελίδων με ακριβώς 2 λάθη η καθεμία

Η Y ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N=10$ και $p = P(X=2) = 2e^{-2}$

$P(Y\geq 2) = 1-P(Y<2) = 1-P(Y=1)-P(Y=0)$

$= 1-\binom{10}{1}(2e^{-2})^1(1-2e^{-2})^9$

$-\binom{10}{0}(2e^{-2})^0(1-2e^{-2})^{10}$

$= 1-0.1577-0.0426 = 0.7997 \simeq 80\%$

β)

Αφου ο μεσος αριθμος λαθων σε καθε σελιδα ειναι 2, ο μεσος αριθμος λαθων στις 10 σελιδες ισουται με $2 \cdot 10 = 20$

Απο την αθροιστικη ιδιοτητα της Poisson:

Εστω $Z = \#$ λαθων στις 10 σελιδες

$Z \sim \text{Poisson}(20)$

$$P(Z=1) = e^{-20} \frac{20^1}{1!} \simeq 0$$

Άσκηση (Ακριτικό νησί)

Σε ένα λιμάνι ενός νησιού, καθημερινά μπορούν να εξυπηρετηθούν εκτός από τα ντόπια πλοία και 3 επιπλέον ιστιοφόρα. Αν σε μια μέρα φτάσουν περισσότερα από 3 αυτά φεύγουν και αράζουν σε άλλο νησί. Ο αριθμός των ιστιοφόρων που φτάνουν στο λιμάνι ως επισκέπτες ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda = 2$. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός ιστιοφόρων που θα εξυπηρετηθεί στο λιμάνι ημερησίως;

X = # πλοίων που φτάνουν στο λιμάνι

Y = # πλοίων που εξυπηρετούνται στο λιμάνι

- $X \sim \text{Poisson}(2) \Rightarrow P(X=k) = e^{-2}\dfrac{2^k}{k!}$
- Αν $X = 0, 1, 2 \Rightarrow Y = X$, αν $X \geq 3$ τότε $Y = 3$

οπότε $S_Y = \{0, 1, 2, 3\}$

Αρα

$$P(Y=0) = P(X=0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2}$$

$$P(Y=1) = P(X=1) = e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 2e^{-2}$$

$$P(Y=2) = P(X=2) = e^{-2}\frac{2^2}{2!} = 2e^{-2}$$

$$P(Y=3) = P(X\geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - P(X=2) - P(X=1) - P(X=0) = 1 - 5e^{-2}$$

Επομενως,

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0\,P(Y=0) + 1\,P(Y=1) + 2\,P(Y=2) + 3\cdot P(Y=3) \\ &= 0\cdot e^{-2} + 1\cdot 2e^{-2} + 2\cdot 2e^{-2} + 3(1-5e^{-2}) \\ &= 3 - 9\cdot e^{-2} = \boxed{1.78 \text{ πλοια.}} \end{aligned}$$

Υπενθυμιση

$$E(X) = \sum_{x\in S_X} x\cdot P(X=x)$$

Άσκηση (Πλύσιμο πιάτων)

Ο Γιώργος και ο Δημήτρης είναι συγκάτοικοι και κάθε φορά που έχουν να πλύνουν πιάτα ρίχνουν ένα νόμισμα. Όποιος φέρει πρώτος κορώνα κερδίζει και ο άλλος πλένει τα πιάτα. Ο Γιώργος παρατήρησε ότι όταν ρίχνει πρώτος κερδίζει συχνότερα, ενώ όταν ξεκινάει δεύτερος καταλήγει συχνότερα στο νεροχύτη. Υπολογίστε τις πιθανότητες και στις δυο περιπτώσεις. Είναι ο ισχυρισμός του Γιώργου σωστός;

Λύση

Έστω X ο αριθμός ρίψεων μέχρι να έρθει κορώνα για πρώτη φορά. Η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p = 1/2$, οπότε

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p,$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Λύση (συνέχεια)

Όταν ο Γιώργος ξεκινάει πρώτος, τότε κερδίζει όταν $X = 1, 3, 5, 7, \ldots$, με πιθανότητα

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{2k} p = p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)^2)^k = \frac{p}{1-(1-p)^2}$$
$$= \frac{p}{p(2-p)} = \frac{1}{2-p},$$

ενώ, όταν ξεκινάει δεύτερος, τότε κερδίζει όταν $X = 2, 4, 6, 8, \ldots$, με πιθανότητα

$$\sum_{k=1} P(X = 2k) = \sum_{k=1} (1-p)^{2k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)^2)^k$$
$$= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

Έστω X = # φορών που χρειάζεται να ρίξουμε ένα νόμισμα ώστε να έρθει για πρώτη φορά ΚΟΡΩΝΑ

Η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p=\frac{1}{2}$ και PMF

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Έστω A το ενδεχόμενο να κερδίσει ο πρώτος που ρίχνει

$$P(A) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) + \cdots + P(2k+1) + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} + \cdots\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^k + \cdots\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Άρα, ο πρώτος κερδίζει με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και ο δεύτερος με πιθανότητα $1/3$. Δηλαδή, 2 στις 3 φορές ο δεύτερος πλένει τα πιάτα.

Λύση (συνέχεια)

Επομένως, η πιθανότητα να κερδίσει είναι μεγαλύτερη στην πρώτη περίπτωση, όταν ξεκινά πρώτος.

Ειδικά για $p = \dfrac{1}{2}$, οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \qquad \text{και} \qquad \frac{1-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

δηλαδή αυτός που αρχίζει να ρίχνει το νόμισμα πρώτος κερδίζει 2 στις 3 φορές.

Άσκηση (Έμποριο ηλεκτρικών εξαρτημάτων)

Ένας έμπορος ηλεκτρικών εξαρτημάτων αγοράζει εξαρτήματα σε συσκευασίες των 10. Η πολιτική του είναι να επιθεωρεί τυχαία 3 εξαρτήματα από κάθε συσκευασία και να δέχεται να την αγοράσει αν και μόνο αν και τα 3 δεν είναι ελαττωματικά.
Αν το 30 τοις εκατό των συσκευασιών έχει ακριβώς 4 ελαττωματικά εξαρτήματα και 70 τοις εκατό έχει μόνο 1, τι πόσοστο συσκευασιών αναμένεται να απορρίψει ο έμπορος;

Εστω A το ενδεχόμενο να αποδεχτει μια συσκευασια ο εμπορος
B_1 το ενδεχόμενο να επιλέξει μια συσκευασια με 4 ελαττωματικα
B_2 — " — 1 ελαττωματικο

Απο τον τυπο της ολικης πιθανότητας:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2)$$

X_1 = # μη ελαττωματικών συσκευών που επιλέγονται από συσκευασίες με 4 ελαττωματικά

X_2 = # —"— επιλέγονται από συσκευασίες με 1 ελαττωματικό

$P(A|B_1) = P(X_1=3)$
$P(A|B_2) = P(X_2=3)$
(όλες αυτές που επιθεωρούνται πρέπει να είναι "καλές" — μη ελαττωματικές)

Οι X_1, X_2 ακολουθούν η καθεμία την υπεργεωμετρική κατανομή $HGeom(M, n, N)$ όπου

$M = 10$
$N = 3$

και για την X_1 το $n = 6$ (# μη ελαττωματικών "καλές")
για την X_2 το $n = 9$ (# μη ελαττωματικών —"—)

Άρα $P(A) = P(X_1=3)P(B_1) + P(X_2=3)\cdot P(B_2)$

$$= \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{3}{10} + \frac{\binom{9}{3}\binom{1}{0}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{7}{10} = \frac{54}{100}$$

Άρα, η πιθανότητα απόρριψης μιας συσκευασίας είναι 46%.

Άσκηση (Δημοσκοπήσεις)

Σε μια πόλη η κυβέρνηση υποστηρίζεται από το 50% των ψηφοφόρων. Σε μια δημοσκόπηση του έγινε μόνο το 40% των ψηφοφόρων της κυβέρνησης συμφωνεί με ένα νέο σχέδιο νόμου.

α) Ποια είναι η πιθανότητα ένα άτομο να υποστηρίζει και την κυβέρνηση και το νέο σχέδιο νόμου;

β) Αν διαλέξουμε ένα τύχαιο δείγμα από 5 άτομα, ποια είναι η πιθανότητα η πλειοψηφία του δείγματος να υποστηρίζει και την κυβέρνηση και το νομοσχέδιο;

A το ενδεχομενο καποιος να υποστηριζει την κυβερνηση.

B το ενδεχομενο καποιος να στηριζει το σχεδιο νομου.

$P(A) = 0.5 \qquad P(B|A) = 0.4$

α) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$

Αρα, το ποσοστο p των ψηφοφορων της πολης που υποστηριζουν και την κυβερνηση και το σχεδιο νομου ειναι 20%.

Επιλεγουμε ενα τυχαιο δειγμα $N=5$ ατόμων

Εστω X = # των ατομων του δειγματος που ειναι υπερ της κυβερνησης και του νομοσχεδιου.

Η X ακολουθει διωνυμική κατανομη με παραμέτρους $N=5$ και $p=0.2$

Αρα, κατα μεσο ορο $E(X)=Npq=5\cdot 0.2\cdot 0.8=0.8$

Η πιθανοτητα $X\geq 3$ (πλειοψηφία) ισουται με

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$=\binom{5}{3}0.2^3\cdot 0.8^2+\binom{5}{4}\cdot 0.2^4\cdot 0.8^1+\binom{5}{5}0.2^5\cdot 0.8^0$$

$$=0.051+0.006+0.00032=0.0573\simeq \boxed{6\%}$$