ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

① Να βρεθεί η σταθερά c ώστε η συνάρτηση

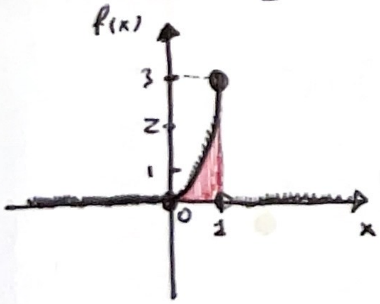
$$f(x) = \begin{cases} c x^2, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

να είναι Σ.Π.Π κάποιας ΤΜ Χ. Να βρεθεί επίσης ο τύπος της CDF, η πιθανότητα $P(X \leq 2/3)$ και η διακύμανση της Χ.

ΛΥΣΗ: (i): Θα πρέπει να επιβεβαιωθεί ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow$

$$\int_0^1 c x^2 dx = 1 \Rightarrow c\int_0^1 x^2 dx \Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 \Rightarrow$$

$$c \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{c=3}.$$ Άρα, θα έχουμε ότι:



$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}}$$

(ii): Για τον υπολογισμό του τύπου CDF (Cumulative Distribution Function):

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ x^3, & x \in [0,1]; \\ 1, & x \in [1,+\infty). \end{cases}$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 3t^2 dt = \left[t^3\right]_0^x = x^3 \quad \text{when } x \leq 1$$

For $x > 1$: $\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 1$

(iii): Επομένως, $P(X \leq 2/3) = F(2/3) = (2/3)^3 = \frac{8}{27}$.

(iv): Για τον υπολογισμό της διακύμανσης της ΤΜ X θα χρειαστεί να υπολογίσουμε αρχικά την αναμενόμενη τιμή της:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2\,dx = \int_0^1 3x^3\,dx \Rightarrow$$

$$E[X] = \left[\frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4}. \text{ (Ροπή } 1^{ης} \text{ Τάξης)}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 3x^2\,dx = \int_0^1 3x^4\,dx \Rightarrow$$

$$E[X^2] = \left[\frac{3x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{5}. \text{ (Ροπή } 2^{ης} \text{ Τάξης)}$$

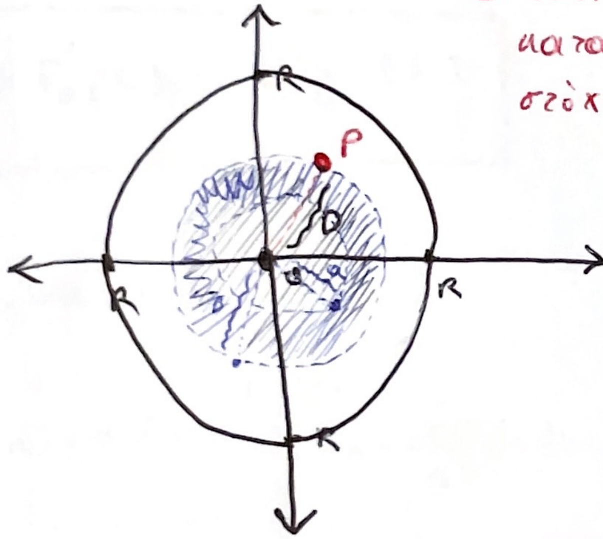
Μπορούμε τελικά να υπολογίσουμε την διακύμανση της ΤΜ X ως:

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] \Rightarrow$$

$$Var[X] = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

② Ρίχνουμε με κλειστά μάτια ένα βελάκι σε ένα στόχο με σχήμα κυκλικού δίσκου ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων. Έστω D η Τ.Μ. που ισούται με την απόσταση του σημείου στο οποίο στοχεύσαμε από την αρχή των αξόνων.

⊛ Θεωρούμε πως το βελάκι καταλήγει πάντοτε εντός στόχου.



(i): Να βρεθεί το σύνολο τιμών της D, η CDF και η PDF της D.

(ii): Να βρεθούν οι $E[D]$ και η $Var[D]$

(iii): Να βρεθεί η πιθανότητα $P(R_a \leq D \leq R_b)$ με $[R_a, R_b] \subset [0, R]$ και η πιθανότητα $P(D \leq R_0)$ με $R_0 \in [0, R]$.

ΛΥΣΗ: Εφόσον η μεταβλητή D περιγράφει την απόσταση από την αρχή των αξόνων, προφανώς θα ισχύει ότι:

$$\boxed{0 \leq D \leq R \quad [1]}$$

και κατά συνέπεια $\boxed{S_D = [0, R]}$ [2].

⊛ Θεωρώντας πως όλα τα σημεία είναι ισοπίθανα η πιθανότητα να καταλήξει το βελάκι σε ένα σημείο όπου η απόσταση $D \leq x$ θα είναι ίση με τον λόγο του εμβαδού του κυκλικού δίσκου ακτίνας x προς το συνολικό εμβαδόν του κυκλικού δίσκου ακτίνας R.

(*) $$\boxed{F_D(x) = P(D \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2} \quad [3]}$$

↓ Cumulative Distribution Function

(*) Από την στιγμή που η $F_D(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,R]$, άρα και παραγωγίσιμη, θα έχουμε ότι:

$$\boxed{f_D(x) = F_D'(x) = \frac{2x}{R^2} \quad [4]}$$

(*) Κατόπιν τούτου, θα έχουμε ότι:

$$E[D] = \int_0^R f_D(x) \cdot x \, dx = \int_0^R x \cdot \frac{2x}{R^2} \cdot dx = \frac{2}{R^2} \int_0^R x^2 dx \Rightarrow$$

$$E[D] = \frac{2}{R^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{R^3}{3} \Rightarrow \boxed{E[D] = \frac{2}{3} R \quad [5]}$$

(*) Για τον υπολογισμό της διακύμανσης της ΤΜ D χρειαζόμαστε τον υπολογισμό της ροπής $2^{ης}$ τάξης:

$$E[D^2] = \int_0^R x^2 \cdot f_D(x) dx = \int_0^R x^2 \cdot \frac{2x}{R^2} \cdot dx = \frac{2}{R^2} \int_0^R x^3 dx \Rightarrow$$

$$E[D^2] = \frac{2}{R^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^R = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{R^2}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{E[D^2] = \frac{1}{2} R^2 \quad [6]}$$

⊛ Επομένως, θα έχουμε ότι: $Var[D] = E[D^2] - E^2[D] \Rightarrow$ [#5]

$$Var[D] = \frac{1}{2}R^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 R^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{4R^2}{9} = \frac{9R^2 - 8R^2}{18} \Rightarrow$$

$$\boxed{Var[D] = \frac{R^2}{18} \quad [7]}$$

⊛ Τέλος, έχουμε ότι: $P(R_a \leq D \leq R_B) = F_D(R_B) - F_D(R_a) \Rightarrow$

$$\boxed{P(R_a \leq D \leq R_B) = \frac{R_B^2}{R^2} - \frac{R_a^2}{R^2} = \frac{R_B^2 - R_A^2}{R^2} \quad [8]}$$

⊛ Επιπλέον, έχουμε ότι: $\boxed{P(D \leq R_0) = F_D(R_0) = \frac{R_0^2}{R^2} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \quad [9]}$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

(Squared Transformation)

Πρόβλημα: Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ για την τυχαία μεταβλητή $Y = X^2$.

ΛΥΣΗ: Γνωρίζουμε ότι: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \rightarrow$ (1)

(*) We have that: $X^2 - Y \leq 0 \Rightarrow X^2 - (\sqrt{Y})^2 \leq 0 \Rightarrow$

$$Q(X) = (X - \sqrt{Y})(X + \sqrt{Y}) \leq 0 \quad (2)$$

For example $Q(0) = -\sqrt{y}\sqrt{y} = -(\sqrt{y})^2 < 0$ (3)

X		$-\sqrt{y}$		0		$+\sqrt{y}$	
$Q(X)$	$+$	0		$-$		0	$+$

$$F_Y(y) = P(X^2 - y \leq 0) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq +\sqrt{y}) \rightarrow$$

$$F_Y(y) = P(X \leq +\sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) \Rightarrow$$

$$\boxed{F_Y(y) = F_X(+\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \quad (4)}$$

(*) The pdf of Y can now be obtained from the corresponding cdf by differentiation:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left\{ F_X(+\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \right\} \quad (5)}$$

⊛ Eq. (5) can be further extended by conducting the following derivations:

Let $\boxed{u_+ = u_+(y) = +\sqrt{y} \quad (6)}$ and $\boxed{u_- = u_-(y) = -\sqrt{y} \quad (7)}$

⊛ According to Eq. (5), we may write that:

$$f_Y(y) = \underbrace{\frac{d}{dy}\{F_X(+\sqrt{y})\}}_{(a)} - \underbrace{\frac{d}{dy}\{F_X(-\sqrt{y})\}}_{(B)}$$

(a): $\frac{d}{dy}\{F_X(+\sqrt{y})\} = \frac{d}{dy}\{F_X(u_+(y))\} = \frac{dF_X}{du_+} \cdot \frac{du_+}{dy} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dy}\{F_X(+\sqrt{y})\} = f_X(u_+) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{f_X(+\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \quad (8)$$

(B): $\frac{d}{dy}\{F_X(-\sqrt{y})\} = \frac{d}{dy}\{F_X(u_-(y))\} = \frac{dF_X}{du_-} \cdot \frac{du_-}{dy} \Rightarrow$

$$\frac{d}{dy}\{F_X(-\sqrt{y})\} = f_X(u_-) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{y}} = -\frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \quad (9)$$

⊛ According to Eqs. (8), (9) we can write that:

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{f_X(+\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \quad (10)}$$

⊛ Note that the pdf of Y is expressed as the sum of two pieces, pieces that represent the intervals where $g(x)=x^2$ is monotone.

⊛ Note that this is the case in general!!!