

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

$2n + 3n$ σειρά ασκήσεων

1		2		3		4		5		6	
7		8		9		10		11		12	
13		14		15		16		17		18	

Να λυθούν τουλάχιστον **12** από τις ασκήσεις που ακολουθούν.

Να εκτυπώσετε αυτή τη σελίδα και να τη χρησιμοποιήσετε ως εξώφυλλο στην εργασία που θα παραδώσετε, αφού σημειώσετε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας, καθώς και με ✓ στον παραπάνω πίνακα τις ασκήσεις που λύσατε. Στη συνέχεια, σκανάρετε το εξώφυλλο και τα χειρόγρατά σας, σε ένα αρχείο pdf, το οποίο θα παραδώσετε.

Η εργασία μπορεί να παραδοθεί ΜΟΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ, μόνο σε μορφή ενός αρχείου pdf, μεγέθους το πολύ 12MB, στο email jtas@unipi.gr.

Ο τίτλος του αρχείου θα πρέπει να είναι probstat23_pXXXXX.pdf, όπου pXXXXX ο αριθμός μητρώου σας.

Η εργασία είναι προαιρετική και βαθμολογείται με άριστα το 1.

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός μητρώου:

Προθεσμία παράδοσης: 24 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2025

Άσκηση 1 (Τυχαία μεταβλητή I). Έστω συνεχής τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} c + x/4, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

- i) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;
- ii) Ποια είναι η μέση τιμή $E(X)$;
- iii) Ποια είναι η διακύμανση της X ;

Άσκηση 2 (Αναμονή για τον προαστιακό). Ο προαστιακός συρμός εκτελεί το δρομολόγιο που συνδέει το αεροδρόμιο με την πόλη κάθε 15 λεπτά.

- i) Αν ο χρόνος αναμονής ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, ποια είναι η πιθανότητα κάποιος επιβάτης να περιμένει πάνω από 6 λεπτά για το τρένο;
- ii) Δεδομένου ότι ένας επιβάτης ήδη περιμένει 8 λεπτά για το τρένο, ποια είναι η πιθανότητα να περιμένει άλλα 2 λεπτά;

Άσκηση 3 (Χρόνος ζωής μπαταρίας). Ο χρόνος ζωής X μια μπαταρίας τηλεφώνου ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 4 χρόνια. Να υπολογισθεί

- a) Η διακύμανση του χρόνου ζωής της μπαταρίας.
- β) Η πιθανότητα να αντέξει πάνω από 5 χρόνια.
- γ) Η πιθανότητα μια μπαταρία να αντέξει τουλάχιστον 5 χρόνια με δεδομένο ότι λειτουργεί ήδη 4 χρόνια.
- δ) να βρεθεί το c για το οποίο $P(X > c) = .25$.

Άσκηση 4 (Επίπεδα βροχόπτωσης). Η (συνολική) ετήσια βροχόπτωση (σε εκατοστά) σε μια συγκεκριμένη περιοχή κατανέμεται ομοιόμορφα με μέση τιμή $\mu = 100$ και $\sigma = 20$. Να βρεθεί η πιθανότητα, ξεκινώντας από την φετινή χρονιά, να περάσουν πάνω από 10 χρόνια μέχρις ότου έχουμε πάνω από 127 εκατοστά βροχής σε μια χρονιά. Τι υποθέσεις κάνατε για τον υπολογισμό της απάντησης;

Άσκηση 5 (Βάρη φοιτητών). Το 90% των φοιτητών ενός Τμήματος έχουν βάρος μικρότερο ή ίσο των 90 κιλών και το 8% μικρότερο ή ίσο των 58 κιλών. Αν το βάρος των φοιτητών ακολουθεί την κανονική κατανομή, να βρεθεί

- a) το ποσοστό των φοιτητών με βάρος μεγαλύτερο ή ίσο των 80 κιλών.
- β) το ποσοστό των φοιτητών με βάρος ανάμεσα στα 70 και 80 κιλά.

Άσκηση 6 (Μέτρηση ρύπων). Σε μια διαδικασία μέτρησης ρύπων συλλέγονται 5 δείγματα αέρα. Κάθε ένα από αυτά έχει ανεξάρτητα από τα άλλα περιεκτικότητα σε ρύπους που κατανέμεται ομοιόμορφα από 0 έως 12 gr/m^3 . Το αποτέλεσμα είναι αρνητικό αν και τα 5 δείγματα έχουν περιεκτικότητα σε ρύπους μικρότερη των 3.5 gr/m^3 . Ποια η πιθανότητα να είναι θετικό το αποτέλεσμα;

Άσκηση 7 (Φορτίο καρπουζιών). Ένα φορτηγάκι μπορεί να αντέξει 3000 κιλά φορτίου πριν πάθει βλάβη. Το βάρος ενός καρπουζιού έχει μέση τιμή 15 κιλά με τυπική απόκλιση 1 κιλό. Να υπολογισθεί το μέγιστο πλήθος καρπουζιών που μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγάκι, ώστε η πιθανότητα βλάβης να είναι μικρότερη από 10^{-4} .

Άσκηση 8 (Κιμάς για μπιφτέκια). Ένας μάγειρας θέλει να φτιάξει 100 μπιφτέκια βάρους 200 γραμμαρίων. Πλάθοντας τα μπιφτέκια, αυτά καταλήγουν να έχουν βάρη που κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[180, 220]$. Να υπολογισθούν:

- i) Η πιθανότητα να φτιάξει 100 μπιφτέκια, αν έχει στη διάθεσή του μείγμα βάρους 20200 γραμμαρίων.

ii) Το βάρος του διαθέσιμου μείγματος, ώστε η πιθανότητα να φτιάξει τουλάχιστον 100 μπιφτέκια να είναι τουλάχιστον 99%.

Άσκηση 9 (Τηλεφωνικό κέντρο). Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, οι διάρκειες των κλήσεων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση διάρκεια 40 δευτερόλεπτα. Να υπολογισθούν:

i) Η πιθανότητα η συνολική διάρκεια 250 κλήσεων να ξεπερνά τις 2 ώρες και 50 λεπτά.

ii) Η πιθανότητα από 250 κλήσεις, λιγότερες από 75 να έχουν διάρκεια μεγαλύτερη από 1 λεπτό.

Άσκηση 10 (Μπλέ μάτια). Περίπου το 17 % των ανθρώπων έχει μπλε μάτια. Ποια είναι η πιθανότητα να δείτε τουλάχιστον 50 άτομα με γαλανά μάτια μέσα σε ένα πλήθος 350 ατόμων; Διατυπώστε όσες υποθέσεις χρησιμοποιήσατε.

Άσκηση 11 (Ανισότητες για αθροίσματα). Έστω X_1, X_2, \dots, X_{30} ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέση τιμή 1.

Να βρεθεί ένα φράγμα για την πιθανότητα $P(\sum_{i=1}^{30} X_i > 35)$ Με τη χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος.

Άσκηση 12 (Επαρκή αποθέματα). Ένα εξάρτημα είναι κρίσιμο για την λειτουργία ενός συστήματος και πρέπει άμεσα να αντικαθίσταται σε περίπτωση βλάβης του. Αν ο μέσος χρόνος ζωής αυτού του τύπου εξαρτήματος είναι 100 ώρες με τυπική απόκλιση 30 ώρες και το σύστημα λειτουργεί με ακριβώς ένα τέτοιο εξάρτημα, πόσα εξαρτήματα πρέπει να έχουμε σε απόθεμα ώστε με πιθανότητα 0.95 να επαρκέσουν για αδιάκοπη λειτουργία του συστήματος τις επόμενες 3000 ώρες;

Άσκηση 13 (Επικοινωνία με θόρυβο 1). Ένα σήμα με τιμή μ μεταδίδεται από την θέση A στη θέση B. Λόγω θορύβου, η τιμή που λαμβάνεται είναι $\mu + X$, όπου $X \sim N(0, 4)$. Προκειμένου να μειωθεί ο θόρυβος, η ίδια τιμή μ εκπέμπεται 9 φορές και λαμβάνονται αντίστοιχα οι τιμές

5, 8.5, 12, 15, 7, 9, 7.5, 6.5, 10.5.

Να κατασκευαστεί ένα 95% δ.ε. για την πραγματική τιμή του μ , της μορφής $[a - \epsilon, a + \epsilon]$.

Άσκηση 14 (Επικοινωνία με θόρυβο 2). Να λυθεί η προηγούμενη άσκηση στην περίπτωση που $X \sim N(0, \sigma^2)$ και το σ είναι άγνωστο.

Άσκηση 15 (Βαθμολογίες διαγωνίσματος). Η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας σε ένα διαγώνισμα είναι 1.13. Αν ένα τυχαίο δείγμα 81 φοιτητών έχει δειγματικό μέσο 7.46, να δοθεί ένα 90% δ.ε. για το μέσο βαθμό όλων των φοιτητών.

Άσκηση 16 (Ταξίδια για επαγγελματικούς λόγους). Μια αεροπορική εταιρεία θέλει να εκτιμήσει το ποσοστό των επιβατών της που ταξιδεύουν για επαγγελματικούς λόγους. Αν επιθυμεί επίπεδο εμπιστοσύνης 90% με σφάλμα $\pm 2\%$, ποιο είναι το απαιτούμενο μέγεθος δείγματος;

Άσκηση 17 (p-τιμή δείγματος). Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση $H_0 : \mu \leq 100$, έναντι της $H_1 : \mu > 100$. Υποθέστε ότι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 20 έδωσε δειγματικό μέσο 105. Υπολογίστε την p-τιμή του ελέγχου όταν ο πληθυσμός είναι κανονικός με τυπική απόκλιση ίση με

i) 5, ii) 10, iii) 15.

Άσκηση 18 (Κατανάλωση βενζίνης). Ένα αυτοκίνητο, σύμφωνα με τους κατασκευαστές του, έχει κατανάλωση βενζίνης τουλάχιστον 150 χιλιόμετρα ανά λίτρο. Ένα τυχαίο δείγμα 10 δοκιμών έδωσε μετρήσεις

130, 120, 100, 125, 135, 125, 140, 150, 130, 165.

Να ελέγξετε τον ισχυρισμό των κατασκευαστών.