

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝ/ΜΙΟΥ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
2020

1η Ομάδα Ασκήσεων (Παράδοση μέχρι την Τρίτη 7/4/2020)

Άσκηση 1. Ναδειχθούν οι σχέσεις για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$:

$$9|2^{4n+1} - 2^{2n} - 1, \quad 27|10^n + 18n - 1, \quad 169|3^{3n+3} - 26n - 27.$$

Άσκηση 2. Ναδειχθεί ότι $5|3 \cdot 7^n + 2 \cdot 2^n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 3. Ναπροσδιορισθούν όλοι οι ακέραιοι a , τέτοιοι ώστε $2|a + 3$ και $a - 2|20$.

Άσκηση 4. Ναπροσδιορισθούν όλοι οι ακέραιοι a , τέτοιοι ώστε $a - 3|a^3 - 3$.

Άσκηση 5. Ναδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο z υπάρχει φυσικός n ώστε $5|n^3 + z$.

Άσκηση 6. Ναδειχθεί ότι αν a, b, c περιττοί, τότε $\mu\kappa\delta(a, b, c) = \mu\kappa\delta\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$.

Άσκηση 7. Κάθε φυσικός της μορφής $n^4 + 4$, $n > 1$ είναι σύνθετος.

Άσκηση 8. Κάθε φυσικός $n > 11$ είναι άθροισμα δύο σύνθετων φυσικών.

Άσκηση 9. Ο φυσικός $n^3 + 1$, $n \in \mathbb{N}$, είναι πρώτος αν $n = 1$.

Άσκηση 10. Η μοναδική τριάδα $(p, p + 2, p + 4)$ πρώτων είναι η $(3, 5, 7)$.

Άσκηση 11. Για ποιους πρώτους p ο $17p + 1$ είναι τέλειο τετράγωνο;

Άσκηση 12. Αν ο ελάχιστος πρώτος που διαιρεί τον $n \in \mathbb{N}^*$ είναι ο $p > n^{1/3}$, τότε ο άλλος παράγοντας του n είναι πρώτος.

Άσκηση 13. Αν $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$, ναδειχθεί ότι ο $\frac{(m_1 + \dots + m_n)!}{m_1! \dots m_n!}$ είναι ακέραιος.

Άσκηση 14. Ναδειχθεί ότι ο $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, έχει τουλάχιστον n πρώτους διαιρέτες.

Άσκηση 15. Αν $a, m \in \mathbb{N}^*$, $a > 1$, τότε $\mu\kappa\delta\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \mu\kappa\delta(a - 1, m)$.

Άσκηση 16. Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \geq 0$, ισχύει $30|n^5 - n$.

Άσκηση 17. Ναευρεθεί η μεγαλύτερη δύναμη του 3 που διαιρεί τον 100!.

Άσκηση 18. Ναεφαρμοστεί ο εκτεταμένος αλγόριθμος του Ευκλείδη για την εύρεση του $d = \mu\kappa\delta(391, 323)$ και την εύρεση των λύσεων της εξίσωσης $391x + 323y = d$.

Άσκηση 19. Κάποιος έχει στο πορτοφόλι του 15 χαρτονομίσματα των 20, 50 και 100 ευρώ, συνολικής αξίας 690 ευρώ. Πόσα χαρτονομίσματα έχει από κάθε είδος;

Άσκηση 20. Αν 41 άνθρωποι, άνδρες, γυναίκες και παιδιά, δείπνησαν σε μια ταβέρνα, ο λογαριασμός ήταν 400 ευρώ και κάθε άνδρας πλήρωσε 40, κάθε γυναίκα 30 και κάθε τριάδα παιδιών 10 ευρώ, πόσοι άνδρες, πόσες γυναίκες και πόσα παιδιά πήραν μέρος στο δείπνο;