Γκαουσιανή Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας [#14]

[Gaussian Probability Density Function]

Μία από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας που απαντώνται συχνότερα στην πράξη είναι η Γκαουσιανή ή Κανονική Κατανομή. Οι κύριοι παράγοντες που συμβάλλουν στο παραπάνω γεγονός αφορούν την υπολογιστική της ιχνηλασιμότητα καθώς και στο ότι διαθέτει την δυνατότητα επαρκούς μοντελοποίησης ενός μεγάλου αριθμού περιπτώσεων.

Σύμφωνα, μάλιστα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Central Limit Theorem) εάν μια τυχαία μεταβλητή αντιστοιχεί στο άθροισμα ενός αριθμού από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της προσεγγίζει την Γκαουσιανή Συνάρτηση καθώς ο αριθμός των προσθετέων τείνει στο άπειρο. (*) Στην πράξη, είναι πιο κοινότοπο να υποθέτουμε πως το άθροισμα τυχαίων μεταβλητών κατανέμεται σύμφωνα με την Γκαουσιανή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για ένα επαρκώς μεγάλο πλήθος όρων που μετέχουν στην άθροιση.

[Classical Central Limit Theorem]:

Let $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ be a random sample of size n - that is, a sequence of independent and identically distributed (iid) random variables drawn from a distribution of expected value given by μ and finite variance given by σ^2.

Suppose that we are interested in the sample average:

$$S_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$$

of these random variables.

By the law of large numbers, the sample averages converge in probability and almost surely to the expected value μ as $n \to \infty$. More precisely, CLT states that as (n) gets larger, the distribution of the difference between the sample average (S_n) and its limit (μ), when multiplied by a factor $\sqrt{n}$ (that is, $\sqrt{n}(S_n - \mu)$) approximates the normal distribution with mean $\mu = 0$ and variance σ^2. The usefulness of the theorem is that the distribution of $\sqrt{n}(S_n - \mu)$ approaches normality regardless of the shape of the distribution of the individual X_i.

$$\boxed{\text{CLT: } \sqrt{n}(S_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)}$$

Lindeberg-Lévy CLT: Suppose $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ is a sequence of i.i.d. random variables with $E[X_i] = \mu$ and $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Then, as n approaches infinity, the random variables $Y_n = \sqrt{n}(S_n - \mu)$ converge in distribution to a normal $N(0, \sigma^2)$.

[Convergence in Probability]: A sequence $\{X_n\}$ of random variables converges in probability towards the random variable X if:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to \infty} Pr(|X_n - X| > \varepsilon) = 0}$$

[Convergence in Distribution]: A sequence $\{X_n\}$ of real random variables is said to converge in distribution towards a random variable X if:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ at which } F \text{ is continuous.}}$$

Here, F_n and F are the cumulative distribution functions of random variables X_n and X, respectively.

[Almost Sure Convergence]: A sequence of random variables $\{X_n\}$ is said to converge almost surely to a random variable X, if:

$$\boxed{Pr\left(\lim_{n \to \infty} X_n = X\right) = 1}$$

ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μονοδιάστατης Κανονικής Κατανομής (one-dimensional or univariate) δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

Οι παράμετροι (μ) και (σ) αποτελούν εγγενή χαρακτηριστικά της Κανονικής Κατανομής με το (μ) να αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εν λόγω κατανομή και το (σ^2) να αντιστοιχεί στην διακύμανσή της.

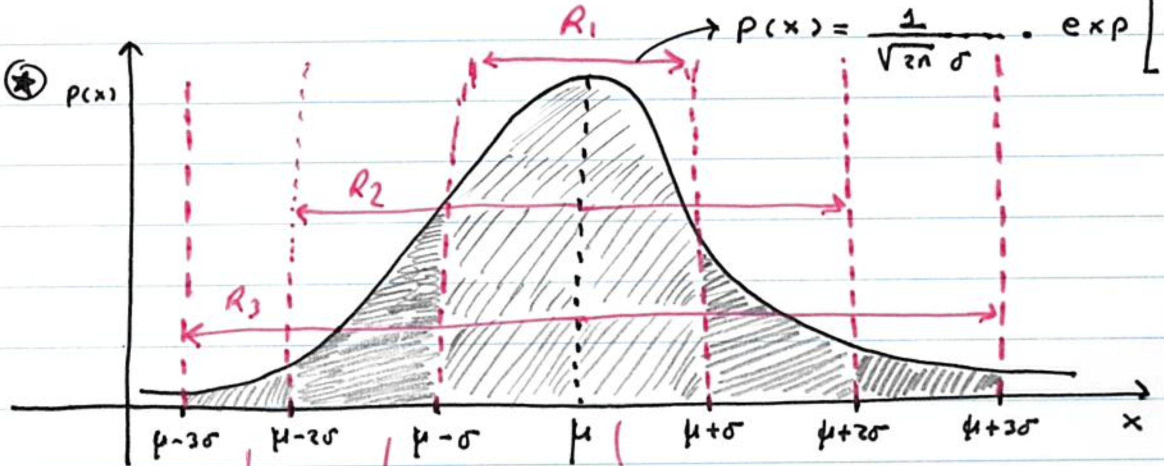
$$\boxed{\mu = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx \quad [\text{Expected Value}]}$$

$$\boxed{\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x)\,dx \quad [\text{Variance}]}$$

or
ή

$$\boxed{\sigma^2 = Var[x]}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$



68,27% of the observations. (R_1)

95,45% of the observations. (R_2)

99,73% of the observations.

ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Mind that $\underline{x}$ and $\underline{\mu}$ are column-vectors!!!

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ℓ-διάστατης κανονικής κατανομής δίνεται από τον τύπο: (όπου $\underline{x} \in \mathbb{R}^\ell$)

$$\boxed{p(\underline{x};\underline{\mu},\underline{\underline{\Sigma}}) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}|\Sigma|^{1/2}} * \exp\left[-\frac{1}{2}\underbrace{(\underline{x}-\underline{\mu})^T}_{[1\times\ell]}\underbrace{\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}}_{[\ell\times\ell]}\underbrace{(\underline{x}-\underline{\mu})}_{[\ell\times1]}\right]}$$

όπου $\underline{\mu}$ είναι το ℓ-διάστατο μέσο διάνυσμα: ($\underline{\mu} \in \mathbb{R}^\ell$) [Mean Vector]

$$\boxed{\underline{\mu} = E[\underline{x}] = \left[E[x_1], E[x_2], \dots, E[x_\ell]\right]^T} \quad \{\mu_i = E[x_i]\}$$

και $\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ είναι $[\ell\times\ell]$ πίνακας συνδιακύμανσης:

$$\boxed{\underbrace{\Sigma}_{[\ell\times\ell]} = E\Big[\underbrace{(\underline{x}-\underline{\mu})(\underline{x}-\underline{\mu})^T}_{[\ell\times1]*[1\times\ell]}\Big]}$$

όπου $$\boxed{\Sigma_{ij} = E\left[(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)\right] = Cov[x_i, x_j] \quad (1\le i,j \le \ell)}$$

ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Το διδιάστατο διάνυσμα $\underline{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ των τυχαίων μεταβλητών (x) και (y) ακολουθεί την διδιάστατη κανονική κατανομή ($\underline{z} \sim N_2(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$) όταν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την σχέση:

$$p(\underline{z}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\underline{\Sigma}|}} * \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{z}-\underline{\mu})^T \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{z}-\underline{\mu})\right]$$

όπου $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix}$ και $\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$ με $-1 \leq \rho \leq +1$, $\sigma_x, \sigma_y \geq 0$

↳ Συντελεστής [Correlation Coefficient]

$$|\underline{\Sigma}| = \sigma_x^2\sigma_y^2 - \rho^2\sigma_x^2\sigma_y^2 = \sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} *$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]\right\}$$

★ Για $\rho = 0$, όταν δηλαδή οι μεταβλητές x και y είναι ασυσχέτιστες έχουμε ότι:

$$p(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\,\sigma_x\sigma_y} * \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right] \Leftrightarrow$$

$$p(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \cdot \exp\left[-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\boxed{p(x,y) = p(x)p(y)}$$

Στην περίπτωση κατά την οποία $\rho = 0$, ο πίνακας συνδιακύμανσης $\underline{\underline{\Sigma}}$ δίνεται από την σχέση:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

και

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{bmatrix}.$$

Οι ισοϋψείς καμπύλες (καμπύλες ίσης πιθανότητας) για την περίπτωση όπου οι τυχαίες μεταβλητές x και y είναι ασυσχέτιστες δίνονται από την σχέση:

$$\underline{z}^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \underline{z} = d \quad (\text{γιατί προκύπτει από } p(x,y) = d) \Leftrightarrow$$

$$[x \;\; y] \begin{bmatrix} \sigma_x^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_y^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = d \Leftrightarrow$$

$$[x\sigma_x^{-2} \;\; y\sigma_y^{-2}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = d \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = d}$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x,y) στον χώρο των χαρακτηριστικών που αντιστοιχεί κάθε φορά στην καμπύλη ίσης πιθανότητας είναι μια έλλειψη οι άξονες της οποίας καθορίζονται από τις διακυμάνσεις των χαρακτηριστικών.