ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΑ ΑΠΟΦΑΣΗΣ [DECISION HYPERPLANES]

#[27]

Στην γενική περίπτωση ενός M-ταξικού προβλήματος ταξινόμησης μεταξύ των κλάσεων $(\omega_1), (\omega_2), \dots, (\omega_M)$ όπου οι συναρτήσεις πιθανοφάνειας των κλάσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$p(\underline{x}|\omega_i) = N_n(\underline{\mu}_i, \underline{\underline{\Sigma}}_i), \quad \forall i \in [M]$$

$$\text{με} \quad \underline{\underline{\Sigma}}_i = \underline{\underline{\Sigma}}, \quad \forall i \in [M]$$

Θα έχουμε ότι: $\boxed{c_i = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(|\Sigma|) = c}$, $\forall i \in [M]$ και η συνάρτηση διάκρισης της i-οστής κλάσης θα δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{g_i(\underline{x}) = -\frac{1}{2}\left\{ x^T\Sigma^{-1}x - 2\mu_i^T\Sigma^{-1}x + \mu_i^T\Sigma^{-1}\mu_i \right\} + \ln(P(\omega_i)) + c_i} \quad [24]$$

Ωστόσο, οι ποσότητες $x^T\Sigma^{-1}x$ και c_i απαλείφονται κατά την διαμόρφωση της επιφάνειας διάκρισης μεταξύ των κλάσεων (ω_i) και (ω_j) και κατά συνέπεια μπορούν να εξαιρεθούν από τις σχέσεις που παρέχουν τις αντίστοιχες συναρτήσεις διάκρισης.

Επομένως, η σχέση (24) γράφεται ως:

$$\boxed{g_i(\underline{x}) = \mu_i^T\Sigma^{-1}x - \frac{1}{2}\mu_i^T\Sigma^{-1}\mu_i + \ln(P(\omega_i))} \quad [25]$$

Η συνάρτηση διάκρισης $g_i(\underline{x})$ είναι γραμμική καθώς μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\boxed{g_i(\underline{x}) = \underline{\omega}_i^T\underline{x} + \omega_{i0}} \quad (26) \quad \text{με} \quad \begin{cases} (i): & \boxed{\underline{\omega}_i = (\underline{\mu}_i^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1})^T = \underline{\underline{\Sigma}}^{-1}\underline{\mu}_i} \quad (27) \\ (ii): & \boxed{\omega_{i0} = \ln(P(\omega_i)) - \frac{1}{2}\mu_i^T\Sigma^{-1}\mu_i} \quad (28) \end{cases}$$

Να υπολογισθεί η μαθηματική έκφραση για την επιφάνεια απόφασης (decision surface) μεταξύ των κλάσεων (ω_i) και (ω_j) για την ειδική περίπτωση κατά την οποία οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις πιθανοφάνειας $\{p(\underline{x}|\omega_i)$ και $p(\underline{x}|\omega_j)\}$ δίνονται από αντίστοιχες Γκαουσιανές συναρτήσεις όπου ο κοινός πίνακας συνδιακύμανσης είναι διαγώνιος της μορφής $\underline{\underline{\Sigma}} = \sigma^2 \underline{\underline{I}}$. (Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\Sigma_{ij} = \sigma^2 \cdot \delta_{ij} \text{ με } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1 \leq i,j \leq n)$$

Οι εκ των προτέρων πιθανότητες των M κλάσεων είναι διαφορετικές!!!

Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες παραγωγές για την περίπτωση κανονικά κατανεμημένων δεδομένων ανά κλάση με κοινό πίνακα συνδιακύμανσης:

$$\forall \underline{x} \in \omega_i, \quad \underline{x} \sim N_n(\underline{\mu_i}, \underline{\underline{\Sigma}}) \quad (\forall i \in [M])$$

Θα έχουμε ότι:

$$g_i(\underline{x}) = w_i^T x + w_{i0}, \quad \forall i \in [M]$$

με

$$w_i = \Sigma^{-1}\mu_i \quad \text{και} \quad w_{i0} = \ln(P(\omega_i)) - \frac{1}{2}\mu_i^T \Sigma^{-1} \mu_i$$

Από την γενική μορφή του πίνακα συνδιακύμανσης έχουμε ότι: $\underline{\underline{\Sigma}}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \underline{\underline{I}}$, που οδηγεί στην ακόλουθη διατύπωση για τις συναρτήσεις διάκρισης των M κλάσεων:

$$\begin{cases} (i): \; w_i = \frac{1}{\sigma^2} I \mu_i = \frac{1}{\sigma^2}\mu_i \\ (ii): \; w_{i0} = \ln(P(\omega_i)) - \frac{1}{2\sigma^2}\mu_i^T \mu_i \end{cases}$$

$$\boxed{g_i(\underline{x}) = \frac{1}{\sigma^2}\mu_i^T x + \ln(P(\omega_i)) - \frac{1}{2\sigma^2}\mu_i^T \mu_i}$$

Από την τελευταία σχέση, η επιφάνεια απόφασης μεταξύ των κλάσεων (ω_i) και (ω_j) μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$\boxed{g_{ij}(\underline{x}) = g_i(\underline{x}) - g_j(\underline{x}) = 0}$$

Υπολογίζοντας την προηγούμενη διαφορά έχουμε ότι:

$$g_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{\sigma^2}\mu_i^T x - \frac{1}{\sigma^2}\mu_j^T x \; \ln(P(\omega_i)) - \ln(P(\omega_j)) - \frac{1}{2\sigma^2}\mu_i^T\mu_i + \frac{1}{2\sigma^2}\mu_j^T\mu_j \Leftrightarrow$$

$$g_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_i^T - \mu_j^T)x + \ln\left(\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\mu_i^T\mu_i + \frac{1}{2\sigma^2}\mu_j^T\mu_j \Leftrightarrow$$

$$\boxed{g_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_i - \mu_j)^T x + \ln\left[\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)}\right] - \frac{1}{2\sigma^2}\mu_i^T\mu_i + \frac{1}{2\sigma^2}\mu_j^T\mu_j}$$

Ξαναγράφοντας την παραπάνω σχέση ως:

$$g_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{\sigma^2}(\mu_i - \mu_j)^T x + \ln\left[\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)}\right] + \frac{1}{2\sigma^2}(\mu_j^T\mu_j - \mu_i^T\mu_i) = 0$$

και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με σ^2 θα έχουμε ότι:

$$\boxed{g_{ij}(\underline{x}) = (\mu_i - \mu_j)^T x + \sigma^2 \ln\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} + \frac{1}{2}(\mu_j^T\mu_j - \mu_i^T\mu_i) = 0}$$

(*) Έχοντας υπόψιν την ταυτότητα: $(a-\beta)^T(a+\beta) = (a^T - \beta^T)(a+\beta) = a^Ta + a^T\beta - \beta^Ta - \beta^T\beta = a^Ta - \beta^T\beta$

μπορούμε να γράψουμε ότι: $\mu_j^T\mu_j - \mu_i^T\mu_i = (\mu_j - \mu_i)^T(\mu_j + \mu_i)$
$= -(\mu_i - \mu_j)^T(\mu_i + \mu_j)$

Επομένως, η εξίσωση της επιφάνειας διάκρισης γίνεται:

$$\boxed{g_{ij}(\underline{x}) = (\mu_i - \mu_j)^T x + \sigma^2 \ln\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} - \frac{1}{2}(\mu_i - \mu_j)^T(\mu_i + \mu_j) = 0}$$

(*) Επόμενος στόχος είναι η εμφάνιση του κοινού παράγοντα $(\mu_i - \mu_j)^T$ και στους 3 όρους της πρόσθεσης.

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$g_{ij}(\underline{x}) = (\mu_i-\mu_j)^T x + \sigma^2 \ln\left[\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)}\right] \cdot \frac{\|\mu_i-\mu_j\|^2}{\|\mu_i-\mu_j\|^2} - \frac{1}{2}(\mu_i-\mu_j)^T(\mu_i+\mu_j) = 0 \iff$$

$$\boxed{g_{ij}(\underline{x}) = (\mu_i-\mu_j)^T x + \sigma^2 \ln\left[\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)}\right] \cdot \frac{(\mu_i-\mu_j)^T(\mu_i-\mu_j)}{\|\mu_i-\mu_j\|^2} - \frac{1}{2}(\mu_i-\mu_j)^T(\mu_i+\mu_j) = 0}$$

(*) Προφανώς ισχύει ότι: $\|x\|^2 = x^T x$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα την ποσότητα $(\mu_i-\mu_j)^T$ έχουμε ότι:

$$\boxed{g_{ij}(\underline{x}) = (\mu_i-\mu_j)^T * \left\{ x + \sigma^2 \ln\left[\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)}\right] \frac{(\mu_i-\mu_j)}{\|\mu_i-\mu_j\|^2} - \frac{1}{2}(\mu_i+\mu_j) \right\} = 0}$$

Θέτοντας ως $\boxed{\underline{w} = \mu_i - \mu_j}$ και $\boxed{\underline{x_0} = \frac{1}{2}(\mu_i+\mu_j) - \sigma^2 \ln \frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} \cdot \frac{(\mu_i-\mu_j)}{\|\mu_i-\mu_j\|^2}}$

η επιφάνεια απόφασης μπορεί να γραφεί ως:

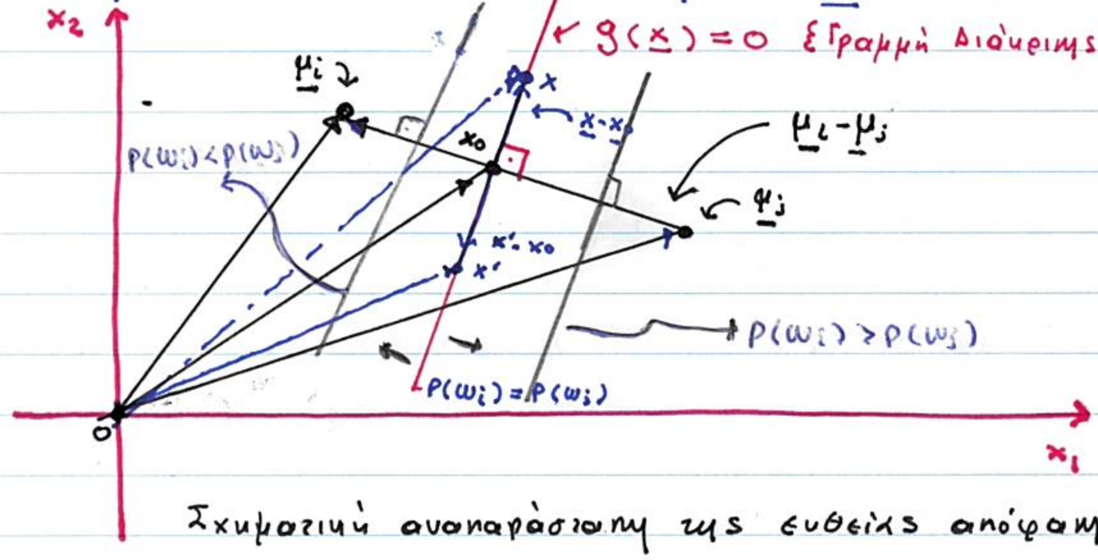
$$\boxed{g_{ij}(\underline{x}) = w^T(x - x_0) = 0 \quad \text{HYPERPLANE}}$$

(*) Από την προηγούμενη εξίσωση είναι προφανές πως η <u>επιφάνεια απόφασης</u> μεταξύ των κλάσεων (ω_i) και (ω_j) είναι ένα υπερεπίπεδο, το οποίο διέρχεται από το σημείο <u>x_0</u>.

(*) Επιπρόσθετα, είναι εύκολο να συμπεράνει κανείς πως στην περίπτωση κατά την οποία οι εκ των προτέρων πιθανότητες εμφάνισης είναι ίσες $P(\omega_i) = P(\omega_j)$, $\frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} = 1 \Rightarrow \ln \frac{P(\omega_i)}{P(\omega_j)} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{2}(\mu_i+\mu_j)}$$

Με άλλα λόγια, στην περίπτωση κατά την οποία οι δύο κλάσεις (ω_i) και (ω_j) έχουν την ίδια εκ των προτέρων πιθανότητα εμφάνισης, τότε το αντίστοιχο υπερεπίπεδο απόφασης διέρχεται από το μέσο του διανύσματος που συνδέει τα διανύσματα $\underline{\mu_i}$ και $\underline{\mu_j}$.



Σχηματική αναπαράσταση της ευθείας απόφασης για την περίπτωση όπου ο χώρος των χαρακτηριστικών έχει 2 διαστάσεις.

Στην περίπτωση κατά την οποία $P(\omega_i) > P(\omega_j)$ το σημείο $\underline{x_0}$ κινείται δεξιότερα προς το άκρο του διανύσματος $\underline{\mu_i}$ επάνω στο διάνυσμα $\underline{\mu_i}-\underline{\mu_j}$.

Αντίθετα, στην περίπτωση κατά την οποία $P(\omega_j) > P(\omega_i)$ το σημείο $\underline{x_0}$ κινείται αριστερότερα προς το άκρο του διανύσματος $\underline{\mu_j}$ επάνω στο διάνυσμα $\underline{\mu_i}-\underline{\mu_j}$.

Ωστόσο, σε κάθε περίπτωση το υπερεπίπεδο απόφασης είναι ορθογώνιο στο διάνυσμα $\mu_i-\mu_j$. Στην πραγματικότητα, για κάθε σημείο $\underline{x}$ που βρίσκεται επάνω στο υπερεπίπεδο απόφασης, το διάνυσμα $\underline{x}-\underline{x_0}$ βρίσκεται επίσης επάνω στο υπερεπίπεδο απόφασης.

$$\boxed{g(\underline{x}) = (\mu_i-\mu_j)^T(\underline{x}-\underline{x}_0) = 0}$$

Το σημείο $\underline{x_0}$ ανήκει προφανώς στο υπερεπίπεδο απόφασης καθώς:

$$\boxed{g(\underline{x_0}) = (\underline{\mu_i}-\underline{\mu_j})^T\cdot \underline{0} = 0}$$