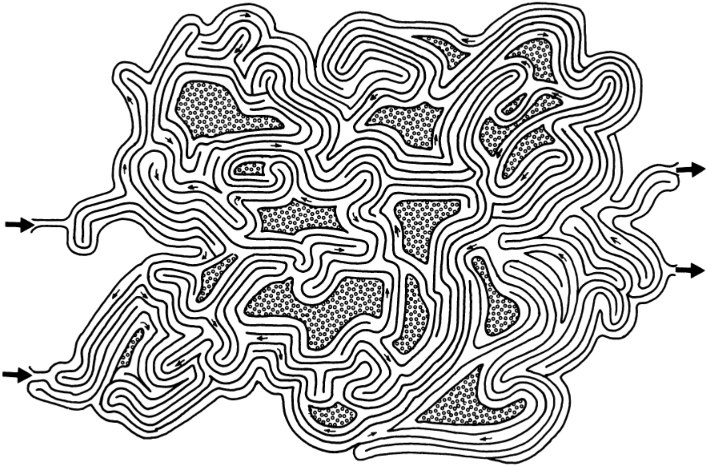
Εξερευνώντας λαβύρινθους



Διάσχιση γραφήματος

Διάσχιση ή διαπέραση ή διάβαση ή εξερεύνηση γραφήματος χαρακτηρίζεται η διαδικασία συστηματικής και εξαντλητικής επίσκεψης όλων των κορυφών ενός γραφήματος χρησιμοποιώντας τους δεσμούς ή τα τόξα του.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι διάσχισης των γραφημάτων.

- αναζήτηση σε βάθος (depth first search ή DFS).
- αναζήτηση κατά πλάτος (breadth first search ή BFS).

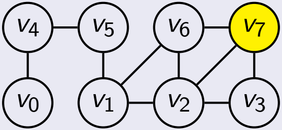
Διάσχιση γραφήματος

Διάσχιση ή διαπέραση ή διάβαση ή εξερεύνηση γραφήματος χαρακτηρίζεται η διαδικασία συστηματικής και εξαντλητικής επίσκεψης όλων των κορυφών ενός γραφήματος χρησιμοποιώντας τους δεσμούς ή τα τόξα του.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι διάσχισης των γραφημάτων.

- αναζήτηση σε βάθος (depth first search ή DFS).
- αναζήτηση κατά πλάτος (breadth first search ή BFS).

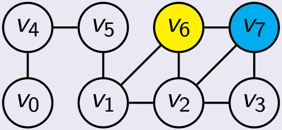
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ''απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ''αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



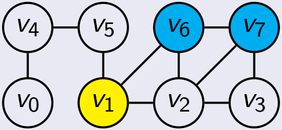
Διασχίσεις γραφημάτων

Αναζήτηση σε βάθος - DFS

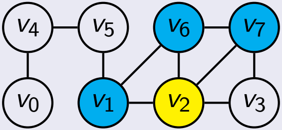
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ‘‘απομακρυνόμαστε’’ από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ‘‘αδιέξοδο’’ επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



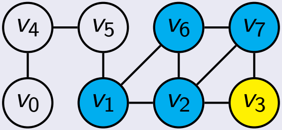
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ``απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ``αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



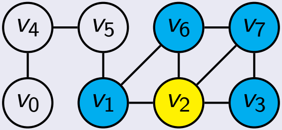
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ``απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ``αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



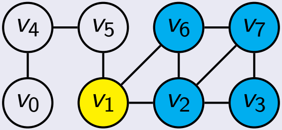
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ``απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ``αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



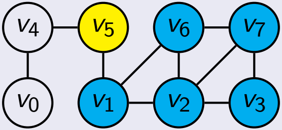
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ‘‘απομακρυνόμαστε’’ από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ‘‘αδιέξοδο’’ επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



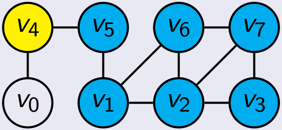
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ``απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ``αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



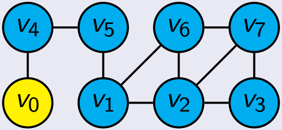
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ‘‘απομακρυνόμαστε’’ από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ‘‘αδιέξοδο’’ επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



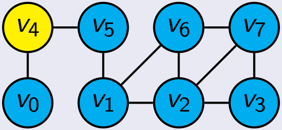
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ``απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ``αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



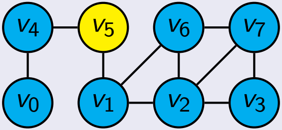
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ``απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ``αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



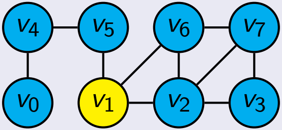
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ‘‘απομακρυνόμαστε’’ από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ‘‘αδιέξοδο’’ επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



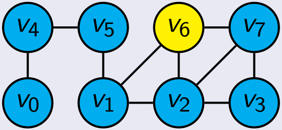
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ``απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ``αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



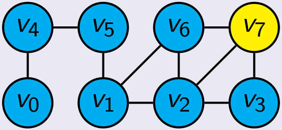
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ‘‘απομακρυνόμαστε’’ από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ‘‘αδιέξοδο’’ επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



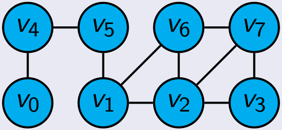
Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ‘‘απομακρυνόμαστε’’ από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ‘‘αδιέξοδο’’ επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να ``απομακρυνόμαστε'' από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε ``αδιέξοδο'' επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



Διαισθητικά η βασική ιδέα της αναζήτησης σε βάθος είναι ότι αρχίζουμε από μια κορυφή και προχωράμε από κορυφή σε κορυφή ώστε να "απομακρυνόμαστε" από την αρχική κορυφή. Μόλις φτάσουμε σε "αδιέξοδο" επιστρέφουμε πίσω μέχρι να βρούμε μια κορυφή που δεν είναι αδιέξοδο.



Η αναζήτηση σε βάθος είναι μια διαδικασία εξερεύνησης των κορυφών ενός γραφήματος **με αφετηρία κάποια κορυφή**, η οποία περιγράφεται ως εξής:

Κάθε κορυφή μαρκάρεται ως εξερευνημένη ή ανεξερεύνητη.

Χρησιμοποιούμε τους δεσμούς ή τα τόξα του γραφήματος για να κινηθούμε από κορυφή σε κορυφή.

Σε κάθε βήμα της εξερεύνησης βρισκόμαστε σε κάποια συγκεκριμένη κορυφή.

1. Αρχικά βρισκόμαστε στην κορυφή αφετηρίας και όλες οι κορυφές του γραφήματος είναι ανεξερεύνητες. Εξερευνούμε την κορυφή αφετηρίας.
2. Στη συνέχεια επισκεπτόμαστε μια από τις γειτονικές της κορυφές που είναι ανεξερεύνητη, και η οποία μαρκάρεται εξερευνημένη.
3. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο έως ότου φτάσουμε σε μια κορυφή όπου όλες οι γειτονικές της έχουν ήδη εξερευνηθεί. Στην περίπτωση αυτή επιστρέφουμε σε μια από τις προηγούμενες κορυφές η οποία έχει ανεξερεύνητη γειτονική κορυφή.
4. Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν επιστρέψουμε στην αφετηρία και δεν υπάρχουν άλλες γειτονικές της κορυφές μη ανεξερεύνητες.

Η αναζήτηση σε βάθος ενός γραφήματος $G = (V, E)$ υλοποιείται με τη βοήθεια μιας στοίβας S (μίτος) και ενός βοηθητικού πίνακα A (κιμωλία).

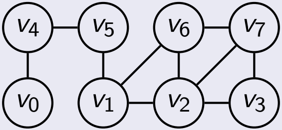
- Ο πίνακας A έχει μέγεθος ίσο με τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος και στην αρχή όλα τα στοιχεία του πίνακα έχουν τιμή 0.
- Ο πίνακας A χρησιμοποιείται για να σημειώνεται αν μια κορυφή έχει ήδη εξερευνηθεί.
- Στην στοίβα S αποθηκεύονται οι κορυφές που (ενδεχομένως) δεν έχουμε ακόμη επισκεφτεί.
- Η στοίβα S χρησιμοποιείται έτσι ώστε όταν φτάσουμε σε αδιέξοδο να γυρίζουμε γρήγορα πίσω για να συνεχίσουμε στην επόμενη υποψήφια κορυφή για εξερεύνηση.

Τα βήματα του αλγορίθμου αναζήτησης σε βάθος, ξεκινώντας από την κορυφή v_j, είναι τα ακόλουθα:

1. Αρχικά, όλες οι κορυφές του G είναι ανεξερεύνητες, επομένως σε όλες τις θέσεις του πίνακα A θέτουμε -1.
2. Τοποθετούμε την κορυφή v_j στην στοίβα S.
3. Όσο η στοίβα S είναι μη κενή εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα
    1. Εξάγουμε το κορυφαίο στοιχείο της στοίβας, έστω το v_k.
    2. Αν $A[k] \neq 0$, δεν εκτελούμε καμιά ενέργεια, αφού η κορυφή v_k έχει ήδη εξερευνηθεί.
    3. Αν $A[k] = 0$, δηλαδή η κορυφή v_k είναι ανεξερεύνητη, την επισκεπτόμαστε, και θέτουμε $A[k] = 1$.
       Επίσης, είτε από τον πίνακα γειτνίασης είτε από την λίστα γειτονικότητας βρίσκουμε όλες τις γειτονικές κορυφές τις v_k, που δεν είναι εξερευνημένες και τις τοποθετούμε στη στοίβα.

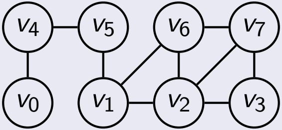
Παράδειγμα 2

Στο γράφημα δεσμών $G = (V, E)$, όπου
$V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



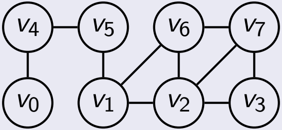
και αφετηρία την κορυφή v_5 η αναζήτηση σε βάθος γίνεται ως εξής:

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



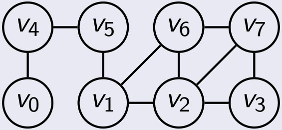
- $S = \emptyset$, κενή στοίβα
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



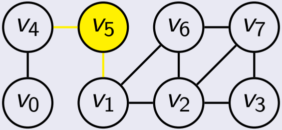
- $S = \{v_5\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_5
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



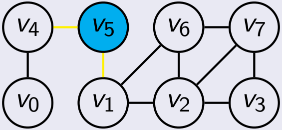
- $S = \{\}$, κενή στοίβα
- τρέχον στοιχείο: v_5
- $A = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



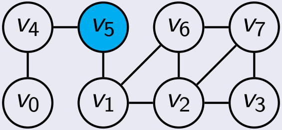
- $S = \{\}$, κενή στοίβα
- τρέχον στοιχείο: v_5
- $A = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



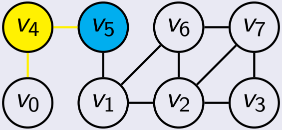
- $S = \{v_1, v_4\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_4
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



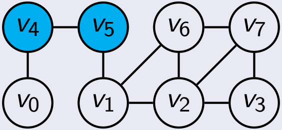
- $S = \{v_1\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_1
- τρέχον στοιχείο: v_4
- $A = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



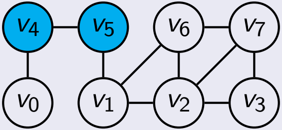
- $S = \{v_1\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_1
- τρέχον στοιχείο: v_4
- $A = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



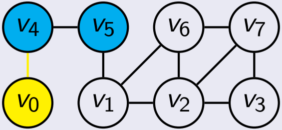
- $S = \{v_1, v_0\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_0
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



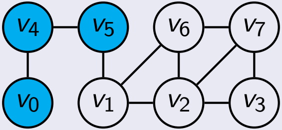
- $S = \{v_1\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_1
- τρέχον στοιχείο: v_0
- $A = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



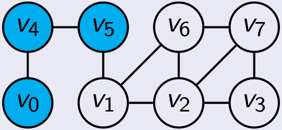
- $S = \{v_1\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_1
- τρέχον στοιχείο: v_0
- $A = \{1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



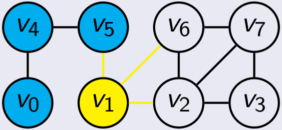
- $S = \{v_1\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_1
- τρέχον στοιχείο: κενό.
- $A = \{1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



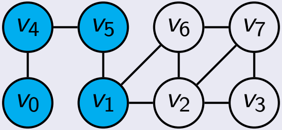
- $S = \{\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: κενό
- τρέχον στοιχείο: v_1.
- $A = \{1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



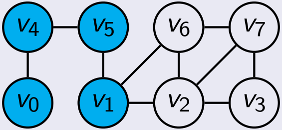
- $S = \{\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: κενό
- τρέχον στοιχείο: v_1.
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



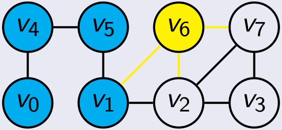
- $S = \{v_2, v_6\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_6
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



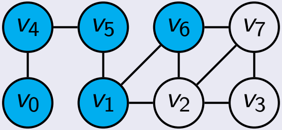
- $S = \{v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_6
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



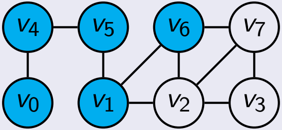
- $S = \{v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_6
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



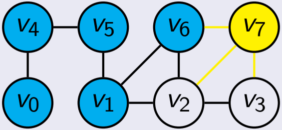
- $S = \{v_2, v_2, v_7\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_7
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



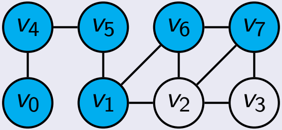
- $S = \{v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_7
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



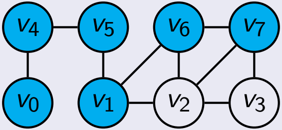
- $S = \{v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_7
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



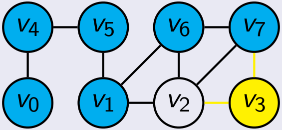
- $S = \{v_2, v_2, v_2, v_3\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_3
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



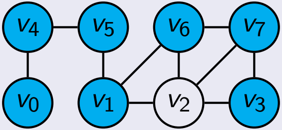
- $S = \{v_2, v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_3
- $A = \{1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



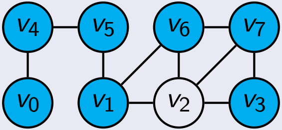
- $S = \{v_2, v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_3
- $A = \{1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



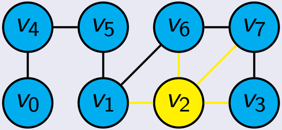
- $S = \{v_2, v_2, v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



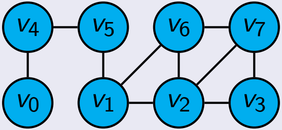
- $S = \{v_2, v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_2
- $A = \{1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



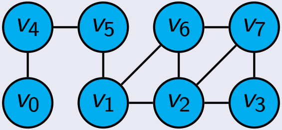
- $S = \{v_2, v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_2
- $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



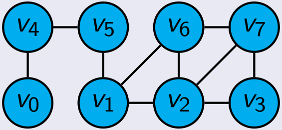
- $S = \{v_2, v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



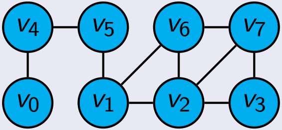
- $S = \{v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_2
- $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



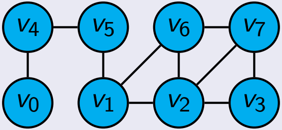
- $S = \{v_2, v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



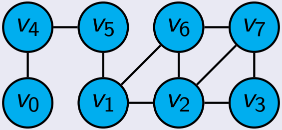
- $S = \{v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: v_2
- $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



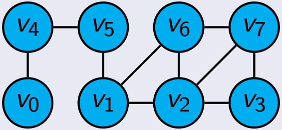
- $S = \{v_2\}$, κορυφαίο στοιχείο στοίβας: v_2
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)



- $S = \{\}$, κενή στοίβα
- τρέχον στοιχείο: v_2
- $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Παράδειγμα 2 (τέλος)



- $S = \{\}$, κενή στοίβα
- τρέχον στοιχείο: κενό
- $A = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

Είσοδος: Ένα γράφημα $G = (V, U)$.
Αποτέλεσμα: Επίσκεψη όλων των κορυφών του G.

για κάθε $v \in V$
    αν *η v δεν είναι σημειωμένη* **τότε** ΑΠΒ(v);
    ;
τέλος για κάθε

Η αναδρομική διαδικασία ΑΠΒ(v) που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος είναι η ακόλουθη:

ΑΠΒ (v) **έναρξη**
    σημείωσε την v;
    για κάθε *γείτονα w της v*
        αν *η w δεν είναι σημειωμένη* **τότε** ΑΠΒ(w);
        ;
    τέλος για κάθε
τέλος

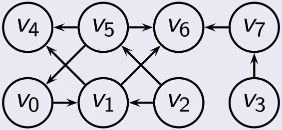
Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την αναζήτηση σε βάθος ενός γραφήματος με αφετηρία κάποια συγκεκριμένη κορυφή.
Ο αλγόριθμος αυτός είναι η βάση για το γενικευμένο πρόβλημα της εξερεύνησης όλων των κορυφών ενός γραφήματος με αναζήτηση σε βάθος.
Για την υλοποίηση αυτής της διάσχισης χρησιμοποιείται μια στοίβα S και ένας βοηθητικός πίνακας A, στο οποίο αποθηκεύεται η σειρά επίσκεψης κάθε κορυφής.

Αναζήτηση σε βάθος ενός γραφήματος

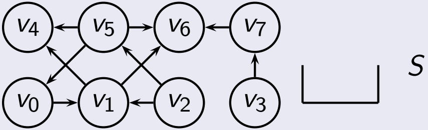
1. Αρχικά, όλες οι κορυφές του G είναι ανεξερεύνητες, θέτουμε $A[i] = -1$ σε κάθε θέση του A και $pre = 0$.
2. Όσο υπάρχουν ανεξερεύνητες κορυφές, δηλαδή στον πίνακα A υπάρχουν θέσεις με τιμή -1 διαλέγουμε μια τέτοια κορυφή και την τοποθετούμε στην στοίβα S.
    1. Όσο η στοίβα S είναι μη κενή εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα
        1. Εξάγουμε το κορυφαίο στοιχείο της στοίβας, έστω το v_k.
        2. Αν $A[k] \neq -1$, δεν εκτελούμε καμιά ενέργεια, αφού η κορυφή v_k έχει ήδη εξερευνηθεί.
        3. Αν $A[k] = -1$, δηλαδή η κορυφή v_k είναι ανεξερεύνητη, την επισκεπτόμαστε, και θέτουμε $pre = pre + 1$ και $A[k] = pre$. Επίσης, βρίσκουμε όλες τις κορυφές στις οποίες καταλήγουν τόξα που αρχίζουν από την v_k, και τις τοποθετούμε στη στοίβα.

Παράδειγμα

Η αναζήτηση σε βάθος για το επόμενο γράφημα τόξων εκτελείται ως εξής:



Παράδειγμα

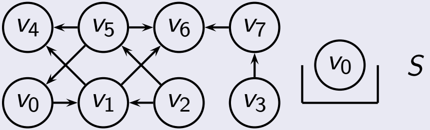


$$pre = 0$$

$$A = \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \text{[-1,} & \text{-1,} & \text{-1,} & \text{-1,} & \text{-1,} & \text{-1,} & \text{-1,} & \text{-1]} \end{array}$$

Παράδειγμα

Επειδή στον πίνακα A υπάρχουν στοιχεία με τιμή -1 επιλέγουμε το πρώτο από αυτά, έστω την κορυφή v_0 και την τοποθετούμε στη στοίβα.

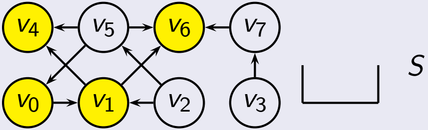


$$pre = 0$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
A =	[-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1,	-1]

Παράδειγμα

Εκτελούμε αναζήτηση σε βάθος με αφετηρία την κορυφή v_0 μέχρι να αδειάσει η στοίβα, οπότε καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

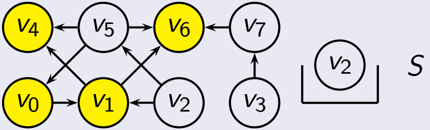


$$pre = 4$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & = & [1, & 2, & -1, & -1, & 4, & -1, & 3, & -1] \end{array}$$

Παράδειγμα

Επειδή στον πίνακα A υπάρχουν στοιχεία με τιμή -1 επιλέγουμε το πρώτο από αυτά, έστω την κορυφή v_2 και την τοποθετούμε στη στοίβα.

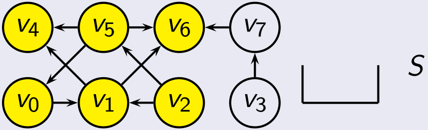


$$pre = 4$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
A =	[1,	2,	-1,	-1,	4,	-1,	3,	-1]

Παράδειγμα

Εκτελούμε αναζήτηση σε βάθος με αφετηρία την κορυφή v_2 μέχρι να αδειάσει η στοίβα, οπότε καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

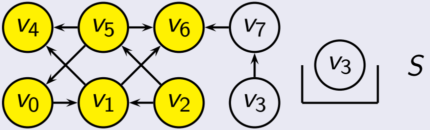


$$pre = 6$$

$$A = \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ [1, & 2, & 5, & -1, & 4, & 6, & 3, & -1] \end{array}$$

Παράδειγμα

Επειδή στον πίνακα A υπάρχουν στοιχεία με τιμή -1 επιλέγουμε το πρώτο από αυτά, έστω την κορυφή v_3 και την τοποθετούμε στη στοίβα.

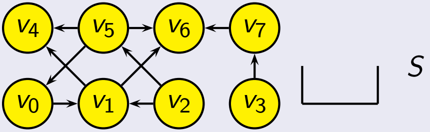


$$pre = 6$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
A =	[1,	2,	5,	-1,	4,	6,	3,	-1]

Παράδειγμα

Εκτελούμε αναζήτηση σε βάθος με αφετηρία την κορυφή v_3 μέχρι να αδειάσει η στοίβα, οπότε καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

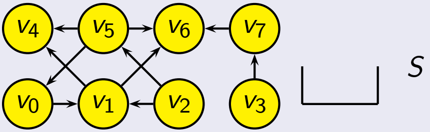


$$pre = 8$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ A & = & [1, & 2, & 5, & 7, & 4, & 6, & 3, & 8] \end{array}$$

Παράδειγμα

Επειδή στον πίνακα A δεν υπάρχουν στοιχεία με τιμή -1, έχουμε επισκεφτεί όλες τις κορυφές του γραφήματος και η εξερεύνηση έχει ολοκληρωθεί.



$$pre = 8$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \mathrm{A} & = & [1, & 2, & 5, & 7, & 4, & 6, & 3, & 8] \end{array}$$

Στις θέσεις του πίνακα A βρίσκεται αποθηκευμένη η σειρά με την οποία επισκεφτήκαμε τις κορυφές του γραφήματος.

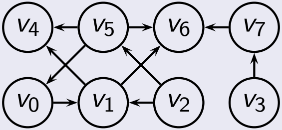
Δένδρο DFS

Σε κάθε εκτέλεση της αναζήτησης σε βάθος με αφετηρία μια κορυφή αντιστοιχεί ένα δένδρο, το οποίο ονομάζεται δένδρο DFS και κατασκευάζεται ως εξής:

1. Αρχικά θέτουμε ως ρίζα του δένδρου την κορυφή αφετηρίας.
2. Αν μετά την κορυφή v_i επισκεπτόμαστε την κορυφή v_j και από την v_i αρχίζει τόξο με τέλος την v_j τότε θέτουμε την v_j **τελευταίο** παιδί της v_i, αλλιώς βρίσκουμε τον πιο κοντινό πρόγονο της v_i για τον οποιο αρχίζει τόξο με τέλος της v_j και θέτουμε την v_j **τελευταίο** παιδί αυτού του προγόνου. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να εξαντλήσουμε όλες τις κορυφές που επισκεπτόμαστε.

Παράδειγμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα εκτελέσαμε αναζήτηση σε βάθος από τις κορυφές v_0, v_2 και v_3.



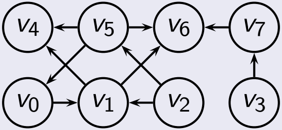
και σε κάθε εκτέλεση επισκεφτήκαμε τις κορυφές του γραφήματος με την εξής σειρά:

$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_4$

$v_2 \rightarrow v_5$

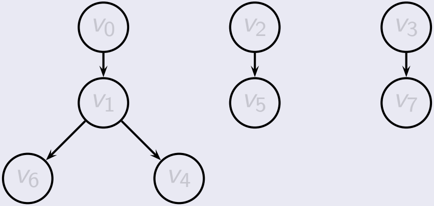
$v_3 \rightarrow v_7$

Παράδειγμα

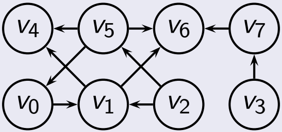


$v_0 \to v_1 \to v_6 \to v_4, \quad v_2 \to v_5, \quad v_3 \to v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

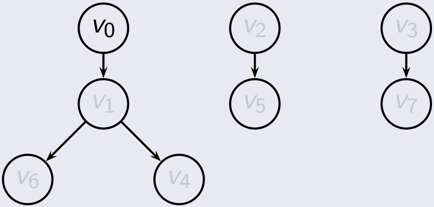


Παράδειγμα

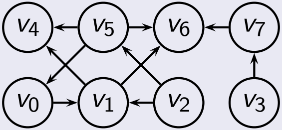


$v_0 \to v_1 \to v_6 \to v_4, \quad v_2 \to v_5, \quad v_3 \to v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

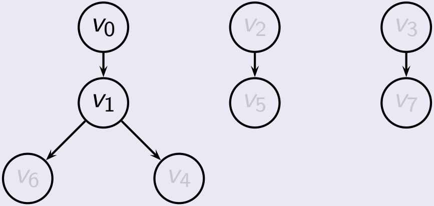


Παράδειγμα

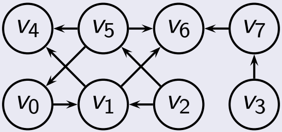


$v_0 \to v_1 \to v_6 \to v_4, \quad v_2 \to v_5, \quad v_3 \to v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

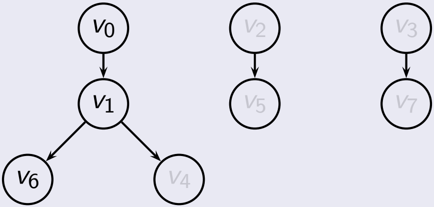


Παράδειγμα

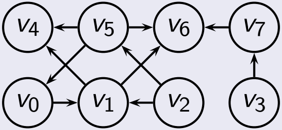


$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_4, \quad v_2 \rightarrow v_5, \quad v_3 \rightarrow v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

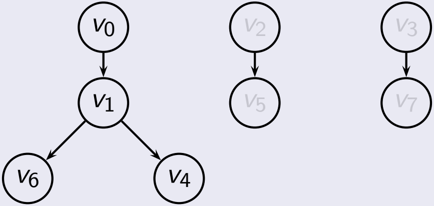


Παράδειγμα

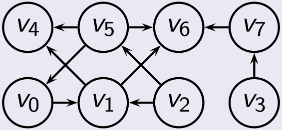


$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_4, \quad v_2 \rightarrow v_5, \quad v_3 \rightarrow v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

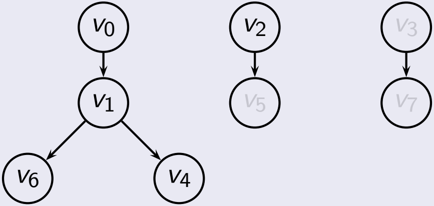


Παράδειγμα

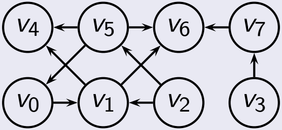


$v_0 \to v_1 \to v_6 \to v_4, \quad v_2 \to v_5, \quad v_3 \to v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

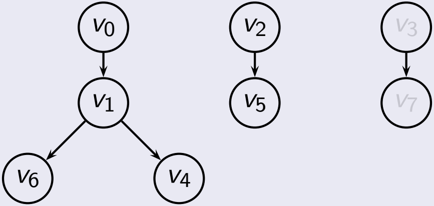


Παράδειγμα

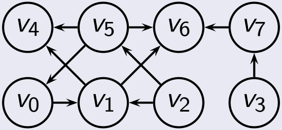


$v_0 \to v_1 \to v_6 \to v_4, \quad v_2 \to v_5, \quad v_3 \to v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

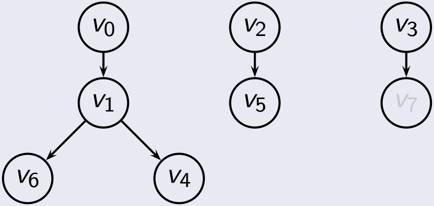


Παράδειγμα

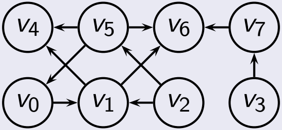


$v_0 \to v_1 \to v_6 \to v_4, \quad v_2 \to v_5, \quad v_3 \to v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

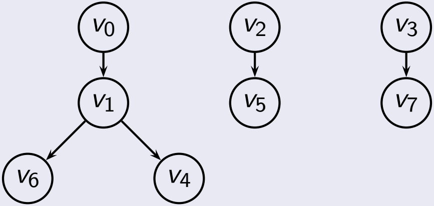


Παράδειγμα



$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_4, \quad v_2 \rightarrow v_5, \quad v_3 \rightarrow v_7$

Σε αυτές τις εκτελέσεις αντιστοιχούν τα επόμενα τρία δένδρα DFS

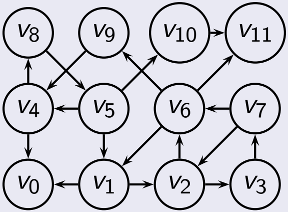


Επομένως, το αποτέλεσμα της εκτέλεσης της αναζήτησης σε βάθος σε ένα γράφημα είναι η διαμέριση των κορυφών του γραφήματος σε ένα ή περισσότερα δένδρα DFS, τα οποία αποτελούν ένα δάσος.
Αν διατάξουμε τα δένδρα DFS ανάλογα με τη σειρά επίσκεψης των ριζών τους τότε προκύπτει ένα διατεταγμένο δάσος.

Άσκηση

Να βρεθεί το δένδρο DFS που αντιστοιχεί στην αναζήτηση σε βάθος του επόμενου γραφήματος αν η σειρά επίσκεψης των κορυφών του ήταν η εξής:

$$v_5, v_{10}, v_{11}, v_4, v_8, v_0, v_1, v_2, v_6, v_9, v_3, v_7$$



Πρόβλημα: Γράφημα προτεραιότητας

Για την ολοκλήρωση ενός έργου πρέπει να εκτελεστούν n δραστηριότητες $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Κάποιες από αυτές χρειάζονται τα αποτελέσματα μερικών άλλων, των οποίων η εκτέλεση πρέπει να προηγηθεί.
Να βρεθεί με ποια σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ώστε να ολοκληρωθεί το έργο.

Παράδειγμα

Με ποιά σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι 9 δραστηριότητες $T_1, T_2, \ldots, T_9$, που απαιτούνται για την ολοκλήρωση ενός έργου, όταν οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:

	απαιτήσεις		απαιτήσεις		απαιτήσεις
T_1	T_3, T_4	T_4		T_7	T_3, T_4
T_2	T_1, T_5	T_5		T_8	T_5, T_7
T_3		T_6	T_1, T_2	T_9	T_6, T_8

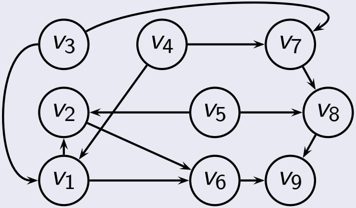
- Στο προηγούμενο πρόβλημα αντιστοιχεί ένα κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο η δραστηριότητα T_i αναπαρίσταται από την κορυφή v_i, και αν η δραστηριότητα T_i απαιτεί την ολοκλήρωση της δραστηριότητας T_j τότε στην κορυφή v_i καταλήγει ένα τόξο με αρχή την κορυφή v_j.

Παράδειγμα

Με ποιά σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι 9 δραστηριότητες $T_1, T_2, \ldots, T_9$, που απαιτούνται για την ολοκλήρωση ενός έργου, όταν οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:

	απαιτήσεις		απαιτήσεις		απαιτήσεις
T_1	T_3, T_4	T_4		T_7	T_3, T_4
T_2	T_1, T_5	T_5		T_8	T_5, T_7
T_3		T_6	T_1, T_2	T_9	T_6, T_8

Στο πρόβλημα αυτό αντιστοιχεί το επόμενο κατευθυνόμενο γράφημα



- Προκειμένου να υπάρχει λύση στο πρόβλημα της εκτέλεσης των δραστηριοτήτων **πρέπει να μην υπάρχει κύκλος** στο αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα.
- Το πρόβλημα της εκτέλεσης είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης μιας αρίθμησης των κορυφών του αντίστοιχου κατευθυνόμενου γραφήματος, με την ιδιότητα αν η δραστηριότητα T_i πρέπει να προηγηθεί της T_j τότε και η αρίθμηση της T_i να είναι μικρότερη από την αρίθμηση της T_j.
- Η αρίθμηση (διάταξη) των κορυφών ενός άκυκλου κατευθυνόμενου γραφήματος έτσι ώστε αν (v_i, v_j) είναι τόξο του γραφήματος τότε η κορυφή v_i προηγείται από την κορυφή v_j ονομάζεται τοπολογική διάταξη.

- Προκειμένου να υπάρχει λύση στο πρόβλημα της εκτέλεσης των δραστηριοτήτων **πρέπει να μην υπάρχει κύκλος** στο αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα.
- Το πρόβλημα της εκτέλεσης είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης μιας αρίθμησης των κορυφών του αντίστοιχου κατευθυνόμενου γραφήματος, με την ιδιότητα αν η δραστηριότητα T_i πρέπει να προηγηθεί της T_j τότε και η αρίθμηση της T_i να είναι μικρότερη από την αρίθμηση της T_j.
- Η αρίθμηση (διάταξη) των κορυφών ενός άκυκλου κατευθυνόμενου γραφήματος έτσι ώστε αν (v_i, v_j) είναι τόξο του γραφήματος τότε η κορυφή v_i προηγείται από την κορυφή v_j ονομάζεται τοπολογική διάταξη.

- Προκειμένου να υπάρχει λύση στο πρόβλημα της εκτέλεσης των δραστηριοτήτων **πρέπει να μην υπάρχει κύκλος** στο αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα.
- Το πρόβλημα της εκτέλεσης είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης μιας αρίθμησης των κορυφών του αντίστοιχου κατευθυνόμενου γραφήματος, με την ιδιότητα αν η δραστηριότητα T_i πρέπει να προηγηθεί της T_j τότε και η αρίθμηση της T_i να είναι μικρότερη από την αρίθμηση της T_j.
- Η αρίθμηση (διάταξη) των κορυφών ενός άκυκλου κατευθυνόμενου γραφήματος έτσι ώστε αν (v_i, v_j) είναι τόξο του γραφήματος τότε η κορυφή v_i προηγείται από την κορυφή v_j ονομάζεται τοπολογική διάταξη.

Μια μέθοδος για εύρεση της τοπολογικής διάταξης των κορυφών ενός γραφήματος είναι η εξής:

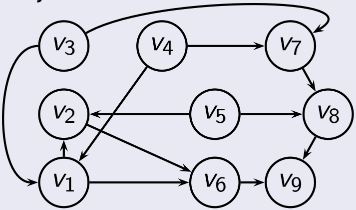
1. Εκτελούμε αναζήτηση σε βάθος στο γράφημα και κατασκευάζουμε τα δένδρα DFS και το αντίστοιχο διατεταγμένο δάσος.
2. Διασχίζουμε με τη σειρά τα δένδρα του διατεταγμένου δάσους, και σε κάθε δένδρο DFS αριθμούμε τις κορυφές του σε μεταδιάταξη.
3. Η τοπολογική διάταξη είναι η αντίστροφη αρίθμηση των κορυφών.

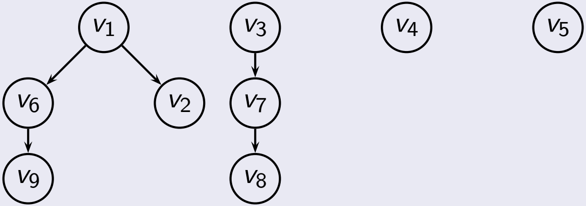
Διασχίσεις γραφημάτων και προβλήματα

Πρόβλημα Ι: Γράφημα προτεραιότητας

Παράδειγμα

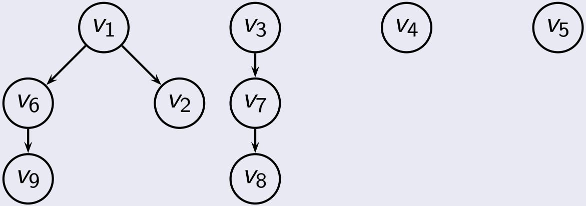
Για το γράφημα του παραδείγματος κατασκευάζουμε το εξής διατεταγμένο δάσος:





Παράδειγμα

Διασχίζουμε με τη σειρά κάθε δένδρο του διατεταγμένου δάσους σε μεταδιατάξη,



οπότε οι κορυφές του γραφήματος τοποθετούνται στην εξής σειρά:

$$v_9,\ v_6,\ v_2,\ v_1,\ v_8,\ v_7,\ v_3,\ v_4,\ v_5$$

Παράδειγμα

$$v_9,\ v_6,\ v_2,\ v_1,\ v_8,\ v_7,\ v_3,\ v_4,\ v_5$$

Η τοπολογική διάταξη είναι η τοποθέτηση αυτών των κορυφών με την αντίστροφη σειρά:

$$v_5,\ v_4,\ v_3,\ v_7,\ v_8,\ v_1,\ v_2,\ v_6,\ v_9$$

Παράδειγμα

Με ποιά σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι 9 δραστηριότητες $T_1, T_2, \ldots, T_9$, που απαιτούνται για την ολοκλήρωση ενός έργου, όταν οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:

	απαιτήσεις		απαιτήσεις		απαιτήσεις
T_1	T_3, T_4	T_4		T_7	T_3, T_4
T_2	T_1, T_5	T_5		T_8	T_5, T_7
T_3		T_6	T_1, T_2	T_9	T_6, T_8

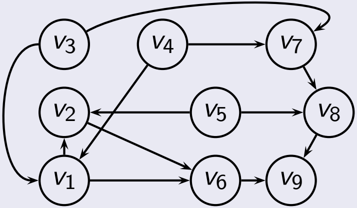
Απάντηση

Επομένως, οι 9 δραστηριότητες μπορούν να εκτελεστούν με την ακόλουθη σειρά, έτσι ώστε όλες οι απαιτήσεις τους να ικανοποιούνται.

$$T_5, T_4, T_3, T_7, T_8, T_1, T_2, T_6, T_9$$

Παράδειγμα

Με βάση αυτή την τοπολογική διάταξη v_5, v_4, v_3, v_7, v_8, v_1, v_2, v_6, v_9 το γράφημα του προβλήματος αναπαρίσταται ως εξής:

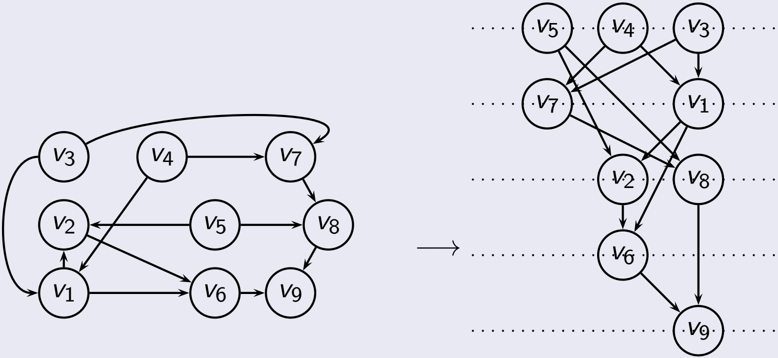


Διασχίσεις γραφημάτων και προβλήματα

Πρόβλημα Ι: Γράφημα προτεραιότητας

Παράδειγμα

Με βάση αυτή την τοπολογική διάταξη v_5, v_4, v_3, v_7, v_8, v_1, v_2, v_6, v_9 το γράφημα του προβλήματος αναπαρίσταται ως εξής:



Πρακτικός τρόπος εύρεσης της τοπολογικής διάταξης

- Αρχικά η λίστα με τις κορυφές είναι κενή.
- Όσο υπάρχουν κορυφές του γραφήματος που δεν έχουμε τοποθετήσει στη λίστα, εκτελούμε τα ακόλουθα βήματα:
    - Διαλέγουμε μια από αυτές τις κορυφές ως αφετηρία και κινούμαστε από κορυφή σε κορυφή όπως κατά την αναζήτηση σε βάθος.
    - Κάθε φορά που φτάνουμε σε μια κορυφή που όλες οι γειτονικές της κορυφές (αν υπάρχουν) είναι στη λίστα, **την τοποθετούμε και αυτή στην αρχή της λίστας**.
- Στο τέλος η λίστα θα περιέχει τις κορυφές με την τοπολογική τους διάταξη.

Είσοδος: Ένα γράφημα $G = (V, U)$.
Αποτέλεσμα: Αρίθμηση όλων των κορυφών του G σύμφωνα με την τοπολογική του διάταξη.

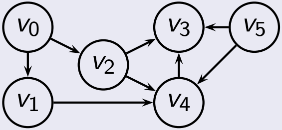
counter $\leftarrow |V|$;
για κάθε $v \in V$
    αν *η* v *δεν είναι σημειωμένη* **τότε** `ΤΔ(v)`;
    ;
τέλος

Η αναδρομική διαδικασία ΤΔ(v) που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμος είναι η ακόλουθη:

ΤΔ (v) **έναρξη**
    σημείωσε την v;
    για κάθε *γείτονα* w *της* v
        αν *η* w *είναι σημειωμένη* **τότε** `ΤΔ(w)`;
        ;

Άσκηση

Να βρεθεί η τοπολογική διάταξη του γραφήματος



και να τοποθετηθούν οι κορυφές του σε στάθμες.