ΠΜΣ ''ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ''

(ΠΛΗ2, 6$^{ος}$ κύκλος, 1$^{ο}$ εξάμηνο, 2023)

# ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κ. ΜΑΝΕΣ - Ι. ΤΑΣΟΥΛΑΣ

Σημειώσεις διαλέξεων 2

# Κεφάλαιο 1

# Βασικές έννοιες

## 1.1 Σύνολα

Το **σύνολο** είναι μια συλλογή αντικειμένων σαφώς καθορισμένων τα οποία θεωρούμε ως μια ολότητα. Τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο ονομάζονται **στοιχεία του συνόλου**. Όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το αντικείμενο $x$ ανήκει (αντίστοιχα δεν ανήκει) στο σύνολο $A$, τότε σημειώνουμε $x \in A$ (αντίστοιχα $x \notin A$). Το **κενό σύνολο** είναι το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και σημειώνεται με $\emptyset$ ή $\varnothing$.

Τα σύνολα συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, ενώ τα στοιχεία τους με μικρά. Τα σύνολα παρουσιάζονται δια αναγραφής των στοιχείων τους, όπου αυτό είναι δυνατό, αλλιώς δια περιγραφής των στοιχείων του.

**Παραδείγματα**. Τα σύνολα

$$A = \{1, 1/2, -1/3, a\}, B = \{-1, 4, \{-1, 2\}, 6, 1\}$$

δίδονται δια αναγραφής των στοιχείων τους, ενώ τα σύνολα

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 3\} \text{ (ή } \Gamma = \{x \in \mathbb{R} | x^2 > 3\}),$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ πολλαπλάσιο του } 5\}$$

δια περιγραφής των στοιχείων τους.

**Παρατηρήσεις**

1. Σε ένα σύνολο, κάθε στοιχείο μπορεί να εμφανίζεται το πολύ μια φορά.
2. Σε ένα σύνολο, δεν παίζει ρόλο η σειρά που αναγράφονται τα στοιχεία του. Έτσι, $\{2, -3, 4, 7\} = \{-3, 7, 4, 2\}$.
3. Το σύνολο $\{\varnothing\}$ δεν είναι κενό, αλλά περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο (είναι μονοσύνολο), το κενό σύνολο. Γενικά, ισχύει $\{x\} \neq x$.

Μερικά βασικά σύνολα είναι τα παρακάτω:
$\mathbb{N}$ το σύνολο των **φυσικών αριθμών**,
$\mathbb{Z}$ το σύνολο των **ακεραίων αριθμών**,
$\mathbb{Q}$ το σύνολο των **ρητών αριθμών**,
$\mathbb{R}$ το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**,
$\mathbb{C}$ το σύνολο των **μιγαδικών αριθμών**.

Αν $A$ είναι ένα από τα παραπάνω σύνολα με $A^*$, σημειώνουμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του $A$.

Κάθε σύνολο της μορφής $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, ονομάζεται **τμήμα φυσικών αριθμών** και σημειώνεται με $[n]$. Για παράδειγμα, $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

### 1.1.1 Σχέσεις συνόλων

**Εγκλεισμός**: Ένα σύνολο $A$ είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου $B$ (συμβολισμός $A \subseteq B$) αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται ότι $x \in B$. Στην περίπτωση αυτή το $B$ ονομάζεται **υπερσύνολο** του $A$. Όταν $A \subseteq B$ και υπάρχει ένα τουλάχιστο στοιχείο του $B$ που δεν ανήκει στο $A$ τότε το $A$ ονομάζεται **γνήσιο υποσύνολο** του $B$ (συμβολισμός $A \subset B$).

Για παράδειγμα, τα γνήσια υποσύνολα του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$ είναι τα σύνολα $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\varnothing$.

Το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου $A$. Κάθε σύνολο $A$ είναι υποσύνολο του εαυτού του.

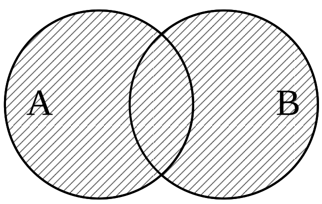
**Ισότητα**: Δύο σύνολα ονομάζονται ίσα (συμβολισμός $A = B$) όταν κάθε στοιχείο του ενός συνόλου ανήκει στο άλλο και αντιστρόφως. Προφανώς ισχύει

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A).$$

### 1.1.2 Πράξεις συνόλων

(i) Αν $A, B$ είναι δύο σύνολα τότε η **ένωση** των $A, B$ (συμβολισμός $A \cup B$) είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο $A$ ή/και στο $B$, δηλαδή

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή/και } x \in B\}.$$

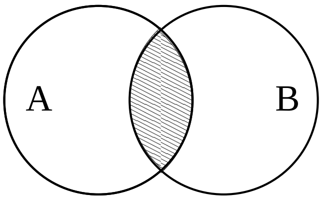



| $A$ | $B$ | $A \cup B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

(Σημειώνουμε 1 αν το $x$ ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.)

(ii) Αν $A, B$ είναι δύο σύνολα τότε η **τομή** (συμβολισμός $A \cap B$) των $A, B$ είναι το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των $A, B$, δηλαδή

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$$




| $A$ | $B$ | $A \cap B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Αν για τα $A$, $B$ ισχύει ότι $A \cap B = \varnothing$, τότε τα $A$, $B$ ονομάζονται **ξένα**.

Η ένωση και η τομή των συνόλων ορίζεται για περισσότερα από δύο σύνολα,

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in [n] \text{ με } x \in A_i\},$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in [n]\}$$

Επίσης σημειώνουμε

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in \mathbb{N}^* \text{ με } x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Γενικότερα, αν $(A_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια συνόλων ορίζεται η ένωση και η τομή τους ως εξής:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in I \text{ με } x \in A_i\},$$

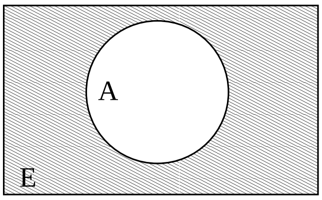
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

## Παραδείγματα

1. Αν $I = \{3, 7, 11\}$, τότε $\bigcup_{i \in I} A_i = A_3 \cup A_7 \cup A_{11}$
2. Αν $I = \mathbb{N}^*$, τότε $\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$.
3. Αν $I = \{2n : n \in \mathbb{N}^*$, τότε $\bigcup_{i \in I} A_i = A_2 \cup A_4 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$.

(iii) Έστω ένα σύνολο $E$ (το οποίο πολλές φορές θα θεωρείται βασικό σύνολο) και $A \subseteq E$. Το **συμπλήρωμα** του συνόλου $A$ (συμβολισμός $\overline{A}$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του $E$ που δεν ανήκουν στο $A$.

$$\overline{A} = \{x \in E : x \notin A\}$$

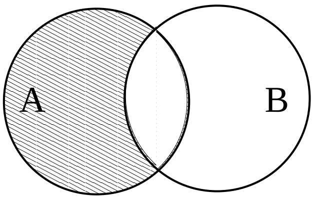



| $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

Άλλοι συμβολισμοί για το συμπλήρωμα είναι: $A^c$, $A'$.

(iv) Αν $A, B$ είναι δύο σύνολα τότε η **διαφορά** (συμβολισμός $A \setminus B$) είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του $A$ που δεν ανήκουν στο $B$, δηλαδή

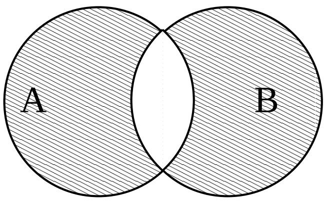
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$




| $A$ | $B$ | $A \setminus B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

(v) Αν $A, B$ είναι δύο σύνολα τότε η **συμμετρική διαφορά** των $A$ και $B$ (συμβολισμός $A \triangle B$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του $A$ που δεν ανήκουν στο $B$ και όλων των στοιχείων του $B$ που δεν ανήκουν στο $A$, δηλαδή

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$




| $A$ | $B$ | $A \triangle B$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

**Παραδείγματα.** Έστω $E = [10] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ και } B = \{2, 3, 5, 7, 9\}.$$

Τότε $A, B \subseteq E$ και

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, A \cap B = \{2, 3, 5\},$$

$$\overline{A} = \{7, 8, 9, 10\}, \overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 10\},$$

$$A \setminus B = \{1, 4, 6\}, B \setminus A = \{7, 9\}, A \triangle B = \{1, 4, 6, 7, 9\}.$$

## Ιδιότητες Πράξεων

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
3. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morgan).

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων να γίνουν ως ασκήσεις. Στις επόμενες ασκήσεις δίδονται δυο αντιπροσωπευτικές μέθοδοι απόδειξης.

**Άσκηση 1.** *Να αποδειχθεί ότι* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

**Λύση.**

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ και } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ και } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

**Άσκηση 2.** *Να αποδειχθεί ότι* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

**Λύση.** Τα $A, B, C$ είναι υποσύνολα του $E$.

Πού μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο $x \in E$;

Σημειώνουμε 1 αν το $x$ ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \cup C$ | $A \cap (B \cup C)$ | $A \cap B$ | $A \cap C$ | $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Οι στήλες $A \cap (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ είναι ίδιες. Άρα, τα σύνολα αυτά έχουν τα ίδια στοιχεία του $E$, δηλαδή είναι ίσα.

Αν σε ένα τύπο εμφανίζονται:

2 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^2 = 4$ γραμμές (περιπτώσεις),

3 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^3 = 8$ γραμμές (περιπτώσεις),

$n$ διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^n$ γραμμές (περιπτώσεις).

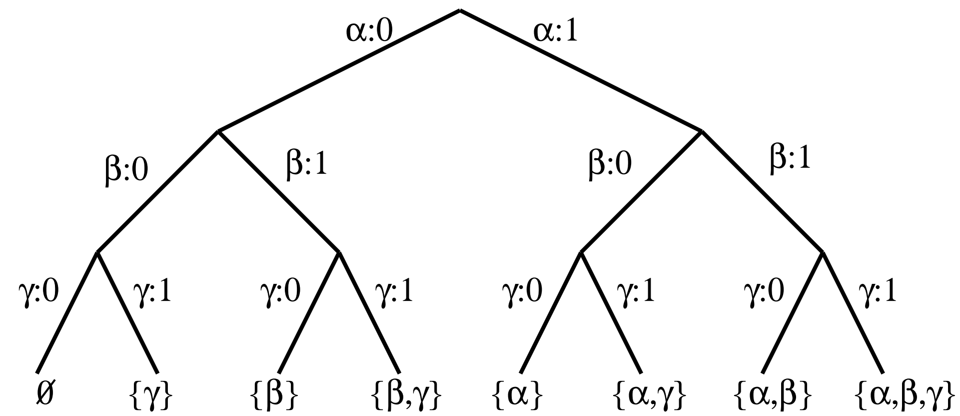
Η μέθοδος των πινάκων είναι πρακτική όταν σε ένα τύπο εμφανίζονται το πολύ 4 διαφορετικά σύνολα.

### 1.1.3 Δυναμοσύνολο

Το σύνολο όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου $E$ ονομάζεται **δυναμοσύνολο** του $E$ και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(E)$.

**Παράδειγμα** Αν $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, τότε

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, E\}.$$




Αν $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(F) = \{&\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \delta\},\\ &\{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \gamma, \delta\}, \{\beta, \gamma, \delta\}, F\}\\ = \mathcal{P}(E) \cup \{&\emptyset \cup \{\delta\}, \{\alpha\} \cup \{\delta\}, \{\beta\} \cup \{\delta\}, \{\gamma\} \cup \{\delta\}, \{\alpha, \beta\} \cup \{\delta\},\\ &\{\alpha, \gamma\} \cup \{\delta\}, \{\beta, \gamma\} \cup \{\delta\}, E \cup \{\delta\}\}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το $E$ έχει 3 στοιχεία και το $\mathcal{P}(E)$ έχει $2^3 = 8$ στοιχεία. Επίσης, το $F$ έχει 4 στοιχεία και το $\mathcal{P}(F)$ έχει $2^4 = 16$ στοιχεία.

Γενικά ισχύει ότι αν το σύνολο $E$ έχει $n$ στοιχεία τότε το $\mathcal{P}(E)$ θα έχει $2^n$ στοιχεία.

### 1.1.4 Καρτεσιανό γινόμενο

Έστω $A, B$ δυο μή κενά σύνολα, τότε **καρτεσιανό γινόμενο**, με πρώτο παράγοντα το $A$ και δεύτερο παράγοντα το $B$, ονομάζεται το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών $(\alpha, \beta)$ με $\alpha \in A$, $\beta \in B$ (συμβολισμός $A \times B$), δηλαδή

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}.$$

Όταν το ένα (τουλάχιστον) από τα σύνολα $A, B$ είναι το κενό σύνολο τότε ως καρτεσιανό γινόμενο τους ορίζεται το κενό σύνολο.

**Παραδείγματα**

**1**. Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $B = \{1, 2\}$ τότε είναι

$$A \times B = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2), (\gamma, 1), (\gamma, 2), (\delta, 1), (\delta, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (1, \beta), (2, \beta), (1, \gamma), (2, \gamma), (1, \delta), (2, \delta)\}.$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

**2**. Αν $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ τότε το $A \times B$ αποτελείται από τα ζεύγη:

| $A \times B$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $(x_1, y_1)$ | $(x_1, y_2)$ | $(x_1, y_3)$ | $(x_1, y_4)$ | $(x_1, y_5)$ |
| $x_2$ | $(x_2, y_1)$ | $(x_2, y_2)$ | $(x_2, y_3)$ | $(x_2, y_4)$ | $(x_2, y_5)$ |
| $x_3$ | $(x_3, y_1)$ | $(x_3, y_2)$ | $(x_3, y_3)$ | $(x_3, y_4)$ | $(x_3, y_5)$ |
| $x_4$ | $(x_4, y_1)$ | $(x_4, y_2)$ | $(x_4, y_3)$ | $(x_4, y_4)$ | $(x_4, y_5)$ |

**3**. Αν $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$ και $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι το σύνολο των ενδείξεων των 52 χαρτιών της τράπουλας.

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου γενικεύεται για περισσότερους από δύο παράγοντες ως εξής:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ για κάθε } i \in [n]\}.$$

Εξάλλου, αν $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ φορές}}$ σημειώνεται με $A^n$.

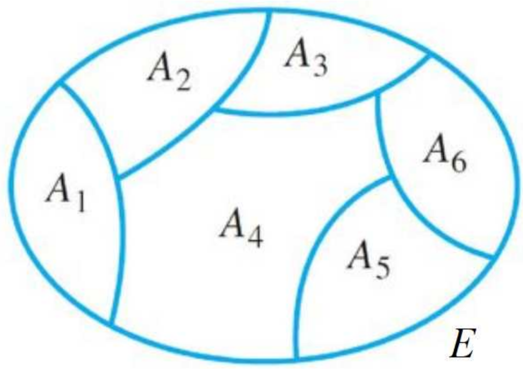
Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται συχνά τόσο στη Μαθηματική Ανάλυση όσο και στη Γραμμική Άλγεβρα για τους χώρους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ των δύο, τριών, ..., $n$ διαστάσεων.

### 1.1.5 Διαμερίσεις

Μια οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$, **μη κενών** υποσυνόλων ενός συνόλου $E$ ονομάζεται **διαμέριση** του $E$ αν ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:

(i) τα σύνολα $A_i$ είναι ανά δύο ξένα,

(ii) η ένωσή τους είναι το $E$.




**Παραδείγματα**

(i) Τα σύνολα $A_1 = \{1,3,5,7\}, A_2 = \{2,4\}, A_3 = \{6,9,10\}, A_4 = \{8\}$ αποτελούν μια διαμέριση του $[10] = \{1,2,\ldots,10\}$.

(i) Έστω $E$ το σύνολο όλων των περιττών φυσικών αριθμών και $A_i$, $i \in I = \{1,3,5,7,9\}$, είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που λήγουν σε $i$, τότε η οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ αποτελεί μια διαμέριση του $E$.

(ii) Έστω $E = \mathbb{R}$ και $A_i = [i, i+1)$, όπου $i \in \mathbb{Z}$, τότε η οικογένεια $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί μια διαμέριση του $\mathbb{R}$.

(iii) Έστω $E$ το σύνολο των ατόμων που που φοιτούν στο Πα.Πει., $F$ το σύνολο των γυναικών που φοιτούν του Πα.Πει και $M$ το σύνολο των ανδρών που φοιτούν στο Πα.Πει. Τα σύνολα $F$, $M$ αποτελούν μια διαμέριση του $E$.

Μια άλλη διαμέριση του $E$ ορίζεται από τα σύνολα $A$ (αντ. $\overline{A}$) των ατόμων που φοιτούν στο Πα.Πει και γεννήθηκαν (αντ. δεν γεννήθηκαν) στην πόλη της Αθήνας.

## 1.2 Σχέσεις

Έστω $A, B$ δύο μη κενά σύνολα, τότε κάθε μη κενό υποσύνολο[1] $R$ του $A \times B$ ορίζει μια **διμελή σχέση** (ή απλά **σχέση**) μεταξύ των στοιχείων των $A$ και $B$. Συγκεκριμένα, αν για τα στοιχεία $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ισχύει $(\alpha, \beta) \in R$ τότε τα στοιχεία $\alpha, \beta$ σχετίζονται μέσω της σχέσης $R$ και σημειώνουμε ότι $\alpha R \beta$, δηλαδή

$$\alpha R \beta \Longleftrightarrow (\alpha, \beta) \in R.$$

**Παραδείγματα**.
(i) Μια σχέση $R$ στο σύνολο $E = A \times B$ όπου $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ και $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ είναι το σύνολο σημειωμένων ζευγών του επόμενου πίνακα:

| $R$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | | | $\star$ | | |
| $x_2$ | | $\star$ | | $\star$ | |
| $x_3$ | | | $\star$ | | |
| $x_4$ | $\star$ | $\star$ | $\star$ | | |

(ii) Αν $A$ είναι το σύνολο των καταναλωτικών αγαθών και $B$ το σύνολο των καταστημάτων, τότε ο προτασιακός τύπος ''το αγαθό $\alpha \in A$ πωλείται στο κατάστημα $\beta \in B$'' ορίζει μια σχέση μεταξύ των στοιχείων των $A$ και $B$.
(iii) Αν $E$ είναι το σύνολο των σπουδαστών ενός έτους, τότε ο προτασιακός τύπος ''ο σπουδαστής $\alpha$ έχει την ίδια επίδοση με το σπουδαστή $\beta$'' ορίζει μια σχέση των στοιχείων του $E$.
(iv) Αν $E$ είναι το σύνολο των ευθειών του επιπέδου, τότε η καθετότητα ορίζει μια σχέση (την οποία συμβολίζουμε με $\perp$) μεταξύ των στοιχείων του $E$, με $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$ όταν η ευθεία $\epsilon_1$ είναι κάθετη στην ευθεία $\epsilon_2$.
(v) Αν $E$ είναι το σύνολο όλων των φοιτητών του Τμήματος, τότε ορίζεται μια σχέση $R$ των στοιχείων του $E$ ως εξής:

$$aRb \Leftrightarrow \text{ οι } a, b \text{ είναι φίλοι.}$$

(vi) Αν $E$ είναι το σύνολο των ανθρώπων, τότε ορίζεται μια σχέση $R$ των στοιχείων του $E$ ως εξής: $aRb$ αν οι $a$, $b$ είναι συγγενείς.

[1] Προσοχή! Το σύμβολο $R$ μια σχέσης δεν πρέπει να συγχέεται με το σύμβολο $\mathbb{R}$ του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

### 1.2.1 Κατηγορίες σχέσεων

Μια σχέση $R$ στο σύνολο $E$ (δηλαδή υποσύνολο $E \times E$) ονομάζεται **ανακλαστική** ανν για κάθε $a \in E$ ισχύει ότι $aRa$.

**Παραδείγματα** $E =$ Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b \in E$.

$aRb \Leftrightarrow$ Οι $a$, $b$ έχουν γεννηθεί την ίδια χρονιά. (Ειναι ανακλαστική.)

$aSb \Leftrightarrow$ Ο $a$ είναι πατέρας του $b$. (Δεν είναι ανακλαστική.)

Μια σχέση $R$ στο σύνολο $E$ ονομάζεται **συμμετρική** ανν για κάθε $a, b \in E$ ισχύει ότι $aRb \Leftrightarrow bRa$.

**Παραδείγματα** $E =$ Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b \in E$.

$aRb \Leftrightarrow$ Οι $a$, $b$ είναι φίλοι. (Ειναι συμμετρική.)

$aSb \Leftrightarrow$ Ο $a$ είναι πατέρας του $b$. (Δεν είναι συμμετρική.)

Έστω $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (2,3), (4,2), \ldots\}$. Αν η $R$ είναι συμμετρική, τότε θα περιέχει σίγουρα και τα ζεύγη $(1,2)$, $(2,4)$. (Μπορεί να περιέχει και άλλα ζεύγη.)

Μια σχέση $R$ στο σύνολο $E$ ονομάζεται **μεταβατική** αν και μονο για κάθε $a, b, c \in E$ με $aRb$ και $bRc$ έπεται ότι $aRc$.

**Παραδείγματα** $E =$ Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b, c \in E$.

$aRb \Leftrightarrow$ Οι $a$, $b$ είναι αδερφια (με τους ίδιους γονείς). (Ειναι μεταβατική.)

$aSb \Leftrightarrow$ Οι $a$, $b$ είναι γνωστοί/φίλοι. (Δεν είναι μεταβατική.)

### 1.2.2 Ισοδυναμία

Μια σχέση $R$ στο $E$ ονομάζεται **ισοδυναμία** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $a \in E$ (**ανακλαστική**)
(ii) $\alpha R \beta \Leftrightarrow \beta R \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**συμμετρική**)
(ii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \Longrightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση ισοδυναμίας σημειώνεται με $\sim$ αντί $R$.

**Παραδείγματα**

**1**. Αν $E$ είναι το σύνολο των φοιτητών που φοιτούν στο Πα.Πει., τότε η σχέση $R$ με

$$aRb \Leftrightarrow a, b \text{ φοιτούν στο ίδιο Τμήμα του Πα.Πει.}$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

**2**. Αν $E = \mathbb{N}^*$ τότε το σύνολο $R = \{(x, y) : |x - y| \text{ πολλαπλάσιο του } 2\}$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας, με $n_1 \sim n_2$ όταν $\frac{n_1 - n_2}{2}$ είναι ακέραιος αριθμός.

Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $E$ και $\alpha \in E$ τότε το σύνολο

$$C_\alpha = \{\beta \in E : \beta \sim \alpha\}$$

ονομάζεται **κλάση ισοδυναμίας** του στοιχείου $\alpha$.

Για παράδειγμα, η κλάση ισοδυναμίας $C_a$ ενός φοιτητή $a$ του Πα.Πει. σύμφωνα με την σχέση $R$ του 1ου παραδείγματος, είναι το σύνολο όλων των φοιτητών που φοιτούν στο ίδιο Τμήμα με αυτόν.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας μπορεί να συμπίπτουν για ορισμένα $\alpha \in E$. Συγκεκριμένα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:
1. $\alpha \in C_\alpha$, για κάθε $\alpha \in E$.
2. $\alpha \sim \beta \Longrightarrow C_\alpha = C_\beta$.
3. $\alpha \not\sim \beta \Longrightarrow C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$.

Από τις τρεις ιδιότητες αυτές προκύπτει ότι:
**Κάθε σχέση ισοδυναμίας στο $E$ ορίζει μια διαμέριση του $E$.**

Ισχύει και το **αντίστροφο**, δηλαδή αν $(A_i)$ είναι μια διαμέριση του $E$, τότε ορίζουμε τη σχέση $R$ στο $E$ ως εξής:

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } i \in I \text{ με } x, y \in A_i.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η σχέση αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες (i),(ii) και (iii) οπότε είναι μια σχέση ισοδυναμίας με κλάσεις ισοδυναμίας τα σύνολα $A_i$.

Το σύνολο $\{C_\alpha : \alpha \in E\}$ ονομάζεται **σύνολο πηλίκο** του $E$ για τη σχέση $\sim$ και συμβολίζεται με $E/\sim$.

Για παράδειγμα, το σύνολο πηλίκο της σχέσης $R$ του πρώτου παραδείγματος είναι το σύνολο των 10 Τμημάτων του Πα.Πει.

Το σύνολο πηλίκο της σχέσης του 2ου παραδείγματος είναι το σύνολο $\{A_1, A_2\}$ όπου $A_1, A_2$ είναι αντίστοιχα τα σύνολα των περιττών και άρτιων αριθμών.

### 1.2.3 Διάταξη

Μια σχέση $R$ στο σύνολο $E$ ονομάζεται **αντισυμμετρική** ανν για κάθε $a, b \in E$ το πολύ ένα από $(a, b)$ και $(b, a)$ ανήκει στην σχέση $R$.

**Παράδειγμα** Αν η $R$ είναι αντισυμμετρική τότε

$(1, 2) \in R \Rightarrow (2, 1) \notin R$.

Ισοδύναμα μια σχέση $R$ είναι αντισυμμετρική αν έχει την ιδιότητα ότι αν $aRb$ και $bRa$ τότε $a = b$.

Μια σχέση $R$ στο $E$ ονομάζεται **(μερική) διάταξη** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες :
(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $\alpha \in E$ (**ανακλαστική**)
(ii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**αντισυμμετρική**)
(iii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \Longrightarrow \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση διάταξης σημειώνεται με $\leq$.

Η διάταξη ονομάζεται **ολική** αν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\alpha \leq \beta \text{ ή } \beta \leq \alpha, \ \ \forall \alpha, \beta \in E.$$

**Παραδείγματα**

**1**. Έστω $E$ ένα σύνολο σημειών του επιπέδου π.χ.

$$E = \{(1, 3), (2, 5), (2, 1), (3, 1), (4, 8), (7, 7)\}.$$

Στο σύνολο $E$ ορίζουμε την σχέση $R$ ως εξής:

$$(x, y)R(z, w) \Leftrightarrow x \leq z \text{ και } y \leq w.$$

Η σχέση $R$ είναι μια σχέση μερικής διάταξης.

**2**. Η σχέση $\leq$ στο $\mathbb{R}$ είναι ολική διάταξη, ενώ η σχέση $<$ στο $\mathbb{R}$ δεν είναι διάταξη.

**3**. Η σχέση εγκλεισμού $\subseteq$ στο $\mathcal{P}(E)$ είναι μερική διάταξη.

Πράγματι, ισχύουν οι ιδιότητες
(i) $A \subseteq A$ για κάθε $A \subseteq E$.
(ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$ για κάθε $A, B \subseteq E$.
(iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subseteq C$ για κάθε $A, B, C \subseteq E$.

Η σχέση αυτή δεν είναι ολική, αφού για παράδειγμα τα σύνολα $\{x\}$ και $\{y\}$ δεν συγκρίνονται όταν $x \neq y$.

**4**. Η σχέση διαιρετότητας $|$ στο $\mathbb{N}^*$ είναι μερική διάταξη.

**Άσκηση 3** (Μερική διάταξη διαιρετότητας). *Στο σύνολο* $\mathbb{N}^*$, *ορίζουμε την σχέση διαιρετότητας* $|$ *ως εξής*

$$\begin{aligned} x \mid y &\Leftrightarrow x \text{ διαιρεί τον } y \\ &\Leftrightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } y = kx. \end{aligned}$$

*i) Να δειχθεί ότι η σχέση διαιρετότητας* $|$ *είναι σχέση μερικής διάταξης στο* $\mathbb{N}^*$.

*ii) Είναι η σχέση διαιρετότητας* $|$ *σχέση ολικής διάταξης στο* $\mathbb{N}^*$*;*

**Λύση του** $(i)$**.**
(Ανακλαστική ιδιότητα.) Για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $x = 1 \cdot x$, άρα $x \mid x$.
(Αντισυμμετρική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid x$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $x = k_2 y$, οπότε $y = k_1 k_2 y$ και

$$y = k_1 k_2 y \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow x = y.$$

(Μεταβατική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid z$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $z = k_2 y$, οπότε $z = k_2 k_1 x$. Επειδή $k_2 k_1 \in \mathbb{N}^*$ έπεται ότι $x \mid z$.

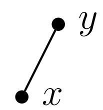
Κατόπιν τούτων, η σχέση $|$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}^*$.

**Λύση του** $(ii)$**.** Δεν είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{N}^*$, διότι υπάρχουν αριθμοί στο $\mathbb{N}^*$ που δεν συγκρίνονται. Για παράδειγμα, $3 \nmid 5$ και $5 \nmid 3$. □

Ένα σύνολο $E$ εφοδιασμένο με μια μερική (αντίστοιχα ολική) διάταξη ονομάζεται **μερικά** (αντίστοιχα **ολικά**) διατεταγμένο σύνολο και σημειώνεται με $(E, \leq)$.

Τα **διαγράμματα Hasse** αναπαριστούν γεωμετρικά μια μερική διάταξη $\leq$ που ορίζεται σε ένα σύνολο $A$:

- Τα στοιχεία του $A$ αναπαρίστανται από σημεία.
- Αν $x < y$ και δεν υπάρχει $z \in A$ ώστε $x < z < y$, τότε τα σημεία $x$ και $y$ ενώνονται με μια γραμμή, έτσι ώστε το σημείο $x$ να βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο $y$.

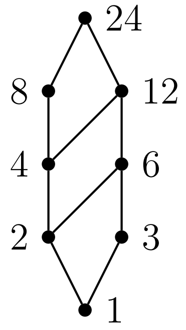


**Παραδείγματα**

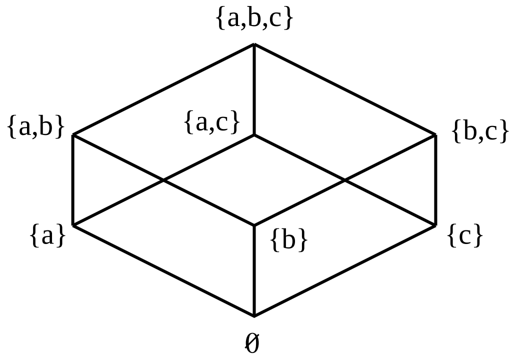
**1**. Έστω $A$ το σύνολο των θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\},$$

εφοδιασμένο με την σχέση διαιρετότητας $|$. Ένα διάγραμμα Hasse για το $A$ είναι το επόμενο:




**2**. Το διάγραμμα Hasse του δυναμοσυνόλου του $A = \{a, b, c\}$ ως προς τη μερική διάταξη του εγκλεισμού $\subseteq$:



### 1.2.4 Μετατροπή μερικής διάταξης σε ολική

Δίδεται ένα σύνολο $V$, στο οποίο έχουμε ορίσει μια μερική διάταξη $\lhd$. Μια **ολική** διάταξη $\leq$ στο $V$ ονομάζεται **γραμμική επέκταση** ή **τοπολογική διάταξη** της διάταξης $\lhd$ στο $V$ ανν για κάθε $a, b \in V$ ισχύει

$$a \lhd b \Rightarrow a \leq b.$$

Δηλαδή η διάταξη $\leq$ είναι ''συμβατή'' με την $\lhd$ και την επεκτείνει σε όλα τα ζεύγη στοιχείων σε μια ολική διάταξη.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι δίνεται το σύνολο $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ με την μερική διάταξη $\lhd$, για την οποία $x \lhd x$ για κάθε $x \in V$ και επιπλέον

$$d \lhd b,\ d \lhd c,\ d \lhd a,\ d \lhd e,\ d \lhd f,\ b \lhd e,\ c \lhd e,\ a \lhd f$$

Μια τοπολογική διάταξη $\leq$ για την σχέση $\lhd$ είναι η ολική διάταξη

$$d \leq b \leq c \leq a \leq e \leq f$$

Μια άλλη τοπολογική διάταξη $\leq$ είναι η ολική διάταξη

$$d \leq b \leq c \leq e \leq a \leq f.$$

Αποδεικνύεται ότι:

**Κάθε μερική διάταξη μπορεί να επεκταθεί σε μια τοπολογική διάταξη.**

Μερικές φορές μπορεί να υπάρχουν πολλές τοπολογικές διατάξεις.

Για την εύρεση της τοπολογικής διάταξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο επόμενος αλγόριθμος:

### Αλγόριθμος εύρεσης τοπολογικής διάταξης

- Είσοδος: Ένα σύνολο $U$ διατεταγμένων ζευγών $(x, y)$ που αναπαριστούν την μερική διάταξη $\lhd$ στο σύνολο $V$

- Έξοδος: Μια (διατεταγμένη) λίστα $L$ των στοιχείων του $V$, η οποία αναπαριστά την τοπολογική διάταξη $\leq$.

- Όσο υπάρχουν στοιχεία του $V$ που δεν έχουν προστεθεί στην $L$
  - Επιλέγουμε ένα στοιχείο $x \in V$ που δεν έχει μικρότερο στοιχείο μεταξύ των στοιχείων που δεν έχουν προστεθεί στην λίστα $L$ (Δηλαδή το $x$ δεν εμφανίζεται στην δεύτερη θέση κανενός ζεύγους του $U$.)
  - Προσθέτουμε το $x$ στο τέλος της λίστας $L$.
  - Σβήνουμε όλα τα ζεύγη $(x, y)$ του $U$ που περιέχουν το $x$.

Το πρόβλημα της επέκτασης μιας μερικής διάταξης σε ολική είναι πολύ συνηθισμένο στις εφαρμογές, όπως φαίνεται και στην επόμενη άσκηση.

**Άσκηση 4** (Βάζοντας τα πράγματα σε σειρά). *Για την ολοκλήρωση ενός έργου, πρέπει να εκτελεστούν* 9 *δραστηριότητες* $1, 2, \ldots, 9$. *Κάποιες από αυτές χρειάζονται τα αποτελέσματα μερικών άλλων, των οποίων η εκτέλεση πρέπει να προηγηθεί. Οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:*

| | *απαιτήσεις* | | *απαιτήσεις* | | *απαιτήσεις* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3, 4 | 4 | | 7 | 3, 4 |
| 2 | 1, 5 | 5 | | 8 | 5, 7 |
| 3 | | 6 | 1, 2 | 9 | 6, 8 |

*Να βρεθεί με ποια σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι* $1, 2, \ldots, 9$ *ώστε να ολοκληρωθεί το έργο.*

Λύση. Οι απαιτήσεις του προβλήματος ορίζουν μια μερική διάταξη στο σύνολο 1, 2, ..., 9. Συγκεκριμένα, $j < i$ αν η δραστηριότητα $i$ απαιτεί την ολοκλήρωση της δραστηριότητας $j$. Επομένως, η ολοκλήρωση του έργου απαιτεί την ικανοποίηση των παρακάτω ζευγών περιορισμών:

$$U = \{(1,2), (1,6), (2,6), (3,1), (3,7), (3,8),$$
$$(4,1), (4,7), (5,2), (5,8), (6,9), (8,9)\}$$

Η εύρεση της σειράς εκτέλεσης αντιστοιχεί στην εύρεση μια τοπολογικής διάταξης για την μερική διάταξη των απαιτήσεων.

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της τοπολογικής διάταξης. Θα φτιάξουμε μια λίστα $L$ που τελικά θα περιέχει τους αριθμούς $1, 2, 3, \ldots, 9$ με την σειρά της τοπολογικής διάταξης. Κάθε φορά, επιλέγουμε μια δραστηριότητα $i$ που δεν απαιτεί τις υπόλοιπες που απομένουν, την προσθέτουμε στο τέλος της $L$ και σβήνουμε από το $U$ τα ζεύγη που την περιέχουν. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να εξαντληθούν οι δραστηριότητες.

0. Αρχικά, έχουμε $V = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$, $L = []$ και

$$U = \{(1,2), (1,6), (2,6), (3,1), (3,7), (3,8),$$
$$(4,1), (4,7), (5,2), (5,8), (6,9), (8,9)\}$$

1. Επιλέγουμε την 5 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5]$ και

$$U = \{(1,2), (1,6), (2,6), (3,1), (3,7), (3,8), (4,1), (4,7), (6,9), (8,9)\}$$

2. Επιλέγουμε την 3 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 4, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3]$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (4, 1), (4, 7), (6, 9), (8, 9)\}$$

3. Επιλέγουμε την 4 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4]$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$

4. Επιλέγουμε την 1 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1]$ και

$$U = \{(2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$

5. Επιλέγουμε την 7 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7]$ και

$$U = \{(2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$

6. Επιλέγουμε την 8 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8]$ και

$$U = \{(2, 6), (6, 9)\}$$

7. Επιλέγουμε την 2 οπότε έχουμε $V = [6, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2]$ και

$$U = \{(6, 9)\}$$

8. Επιλέγουμε την 6 οπότε έχουμε: $V = [9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6]$ και

$$U = \{\}$$

9. Επιλέγουμε την 9 οπότε έχουμε $V = []$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6, 9]$ και

$$U = \{\}$$

Επομένως, μια τοπολογική διάταξη των δραστηριοτήτων 1, 2, ..., 9, και άρα μια πιθανή σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων, είναι η σειρά

$$L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2, 6, 9].$$

Παρακάτω δίδεται μια υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου στην γλώσσα Python

```python
V = [1,2,3,4,5,6,7,8,9] #elements
U = [(1,2),(1,6),(2,6),(3,1),(3,7),(4,1),(4,7),(5,2),(5,8),(6,9)
    ,(3,8),(8,9)] #partial order
Vc = V.copy()
n = len(V)
pre = [[] for i in range(n+1)] #u in pre[v] <==> (u,v) in U
succ = [[] for i in range(n+1)] #u in succ[v] <==> (v,u) in U
for t in U: #for each tuple t in U
    pre[t[1]].append(t[0]) #populate pre
    succ[t[0]].append(t[1]) #populate succ

L = [] #result is stored in L
while(len(Vc) > 0):
    l = len(Vc)
    for v in Vc: #for each element v
        if len(pre[v]) == 0: #if v has no predecessor
            L.append(v) #append it in L
            for u in succ[v]: #for each successor u of v
                pre[u].remove(v) #delete v from list of predecessors
    of u
            #succ[v].clear()
            Vc.remove(v) #delete v
            break #reset for v loop
    if l == len(Vc): break #no progress => no possible solution

if (len(Vc)==0): print("result:", L)
else: print("no result found")
```

Output:

```
result: [3, 4, 1, 5, 2, 6, 7, 8, 9]
```

### 1.2.5 Φραγμένα σύνολα

Αν $(E, \leq)$ είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και $A$ είναι ένα μη κενό υποσύνολό του τότε ένα στοιχείο $\alpha \in E$ (αντίστοιχα $\beta \in E$) ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) φράγμα του $A$ όταν $x \leq \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leq x$) για κάθε $x \in A$. Όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα ενός συνόλου $A$, τότε το σύνολο αυτό ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) **φραγμένο** σύνολο.

Αν $A$ είναι ένα άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμένο υποσύνολο του $(E, \leq)$ τότε ένα στοιχείο $s \in E$ (αντίστοιχα $i \in E$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) $s$ είναι άνω φράγμα (αντίστοιχα $i$ είναι κάτω φράγμα).
(ii) $s \leq \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leq i$) για κάθε άνω φράγμα $\alpha$ (αντίστοιχα κάτω φράγμα $\beta$) του $A$ ονομάζεται **supremum ή άνω πέρας** (αντίστοιχα **infimum ή κάτω πέρας**) του $A$ και σημειώνεται με $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$).

Πρέπει να τονισθεί ότι τα $\sup A$ και $\inf A$ δεν υπάρχουν πάντα για ένα σύνολο. Όταν όμως υπάρχουν είναι μοναδικά. Γενικά το $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$) δεν ανήκει υποχρεωτικά στο σύνολο $A$. Όμως, στην περίπτωση που ανήκει ονομάζεται **μέγιστο** (αντίστοιχα **ελάχιστο**) στοιχείο του $A$ και σημειώνεται με $\max A$ (αντίστοιχα $\min A$).

**Παραδείγματα**

**1**. Για το ολικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{R}, \leq)$ είναι:
α) Αν $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ τότε $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$.
Το 1 είναι μέγιστο στοιχείο του $A$, διότι $1 \in A$, ενώ το $A$ δεν έχει ελάχιστο, αφού $0 \notin A$.
β) Αν $A = (\alpha, \beta)$ τότε $\sup A = \beta$ και $\inf A = \alpha$.
Το $A$ δεν έχει μέγιστο, ούτε ελάχιστο στοιχείο, αφού τα $\alpha$, $\beta$ δεν ανήκουν στο $A$.
**2**. Για το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*, |)$, όπου $|$ είναι η σχέση διαιρετότητας και $A = \{4, 16, 28, 40\}$ ισχύει ότι

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ είναι άνω φράγμα του } A$$

$$\Leftrightarrow 4|n \text{ και } 16|n \text{ και } 28|n \text{ και } 40|n$$

$$\Leftrightarrow n \text{ κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του } A$$

Οπότε, το ελάχιστο άνω φράγμα του $A$ θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του $A$, δηλαδή

$$\sup A = \text{ΕΚΠ}(4, 16, 28, 40) = 560.$$

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\inf A = \text{ΜΚΔ}(4, 16, 28, 40) = 4.$$

**3**. Για το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ όπου $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ και

$$A = \{\{2, 4, 8\}, \{6, 8\}, \{2, 8, 10\}, \{4, 8\}\}$$

ισχύουν ότι

$$B \text{ είναι άνω φράγμα του } A$$

$$\Leftrightarrow \{2, 4, 8\} \subseteq B, \{6, 8\} \subseteq B, \{2, 8, 10\} \subseteq B, \{4, 8\} \subseteq B$$

Οπότε, το ελάχιστο άνω φράγμα του $A$ θα είναι το ''μικρότερο'' τέτοιο σύνολο $B$, δηλαδή η ένωση όλων των στοιχείων του $A$. Κατόπιν τούτου, είναι

$$\sup A = \{2, 4, 8\} \cup \{6, 8\} \cup \{2, 8, 10\} \cup \{4, 8\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\inf A = \{2, 4, 8\} \cap \{6, 8\} \cap \{2, 8, 10\} \cap \{4, 8\} = \{8\}.$$

## Ασκήσεις προς επίλυση

1. Έστω $E$ ένα μη κενό σύνολο και $A, B, C \subseteq E$. Να δειχθεί ότι

   i) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$. (Επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης ως προς την τομή.)

   ii) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. (Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την διαφορά.)

   iii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (Κανόνας De Morgan για το συμπλήρωμα της τομής.)

   iv) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. (Διαμέριση του $A$ ως προς την τομή του με τα $B$ και $\overline{B}$.)

   **Λύση της (iv)**
   Θέλουμε να δείξουμε ότι $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Τα $A, B$ είναι υποσύνολα του $E$. Πού μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο $x \in E$; Σημειώνουμε 1 αν το $x$ ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

| $A$ | $B$ | $\overline{B}$ | $A \cap B$ | $A \cap \overline{B}$ | $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

   Οι στήλες των $A$ και $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ είναι ίδιες.

   Άρα, τα σύνολα $A$ και $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ περιέχουν τα ίδια στοιχεία του $E$, δηλαδή είναι ίσα.

2. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ ορίζουμε μια σχέση $R$ ως εξής:

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } k \in Z \text{ ώστε } y - x = 3k.$$

   Για παράδειγμα,

$$2R5, \text{ διότι } 5 - 2 = 3 \cdot 1$$

$$2R8, \text{ διότι } 8 - 2 = 3 \cdot 2$$

$$8R2, \text{ διότι } 2 - 8 = 3 \cdot (-2)$$

$$(3, 7) \notin R \text{ διότι δεν υπάρχει } k \in \mathbb{Z} \text{ ώστε } 7 - 3 = 4 = 3k.$$

α) Να δειχθεί ότι η σχέση $R$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}$.

β) Να βρεθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5.

**Λύση του β) για τον αριθμό 2**: Η κλάση ισοδυναμίας του 2 είναι εξ ορισμού το σύνολο

$$\begin{aligned} C_2 &= \{x \in \mathbb{N} : 2Rx\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 2 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 2 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η κλάση $C_5$ του 5 ταυτίζεται με την $C_2$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} C_5 = \{x \in \mathbb{N} : 5Rx\} &= \{x \in \mathbb{N} : x - 5 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = 3(k + 1), k \in \mathbb{Z}\} = C_2 \end{aligned}$$

Το ίδιο συμβαίνει και για τις κλάσεις των στοιχείων $5, 8, 11, \ldots$ που ανήκουν στην $C_2$, δηλαδή $C_2 = C_5 = C_8 = C_{11} = \cdots$.

3. Έστω $R$ σχέση στο $\mathbb{N}$, με $xRy \Leftrightarrow x = y^k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι η $R$ είναι σχέση μερικής διάταξης. Είναι η $R$ σχέση ολικής διάταξης;

4. Να σχεδιασθεί το διαγραμμα Hasse του δυναμοσυνόλου του $[4]$ ως προς την μερική διάταξη του εγκλεισμού $\subseteq$.

5. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse του συνόλου των θετικών διαιρετών του 36 ως προς την μερική διάταξη της διαιρετότητας.

6. Να βρεθεί η σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων $A, B, C, D, E, F, G, H, K, M$ όταν
$A < C$, $A < D$, $A < M$, $A < H$, $B < A$, $B < D$, $B < K$, $B < M$, $C < G$, $C < H$, $C < M$, $D < H$, $E < A$, $E < B$, $E < C$, $E < K$, $F < D$, $F < G$, $G < H$, $K < C$, $M < H$,
όπου $x < y$ όταν η $x$ προηγείται της $y$.

7. Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*, |)$ και

$$A_1 = \{32, 80, 160, 640\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ περιττός }, n^2 \leq 40\}$$

Να ευρεθούν τα supremum και infimum των παραπάνω συνόλων. Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

8. Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ όπου $E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$

$$A_1 = \{\{10, 15\}, \{5, 20, 25\}, \{10, 30\}, \{20, 35\}\}$$

$$A_2 = \{\{10, 20, 25\}, \{5, 10, 40\}, \{5, 10, 35\}, \{5, 10, 20, 40\}\}$$

Να ευρεθούν τα supremum και infimum των παραπάνω συνόλων. Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;