ΠΜΣ ''ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ''

(ΠΛΗ2, $6^{ος}$ **κύκλος**, $1^{ο}$ **εξάμηνο**, **2023**)

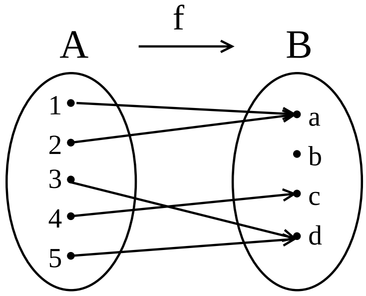
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κ. ΜΑΝΕΣ - Ι. ΤΑΣΟΥΛΑΣ

Σημειώσεις διαλέξεων 3

1.3 Απεικονίσεις

Δίνονται δύο μη κενά σύνολα A, B και ένας κανόνας (που συνήθως μπορεί να περιγραφεί από ένα τύπο) με τον οποίο αντιστοιχίζουμε σε κάθε στοιχείο του A ένα και μόνο ένα στοιχείο του B. Τότε ορίζεται μια απεικόνιση f του A στο B (συμβολισμός $f : A \to B$).



Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της f και συμβολίζεται με $D(f)$ ή D_f τα δε στοιχεία του ονομάζονται **πρότυπα**. Αν το πρότυπο α αντιστοιχίζεται μέσω της f στο στοιχείο β τότε σημειώνουμε $f(\alpha) = \beta$. Στην περίπτωση αυτή το β ονομάζεται **εικόνα** του στοιχείου α.

Το υποσύνολο του B που αποτελείται από όλες τις εικόνες ονομάζεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $R(f)$ ή R_f, δηλαδή

$$R(f) = \{\beta \in B : \text{ υπάρχει } \alpha \in A \text{ με } f(\alpha) = \beta\} = \{f(x) : x \in D(f)\}$$

Μια απεικόνιση $f : A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής** (ή απλά **συνάρτηση**). Στην περίπτωση αυτή το τυχαίο στοιχείο του A συμβολίζεται συνήθως με x και ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** ενώ η εικόνα του $y = f(x)$ ονομάζεται **τιμή** της ανεξάρτητης μεταβλητής. Το τυχαίο στοιχείο $y \in R(f)$ ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Γενικότερα, αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση $f : A \to R$ ονομάζεται πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών. Εδώ έχουμε n το πλήθος ανεξάρτητες μεταβλητές και μια εξαρτημένη $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Όταν μια πραγματική συνάρτηση f, n μεταβλητών, δε συνοδεύεται από το πεδίο ορισμού της, τότε ως $D(f)$ νοείται το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in D(f)$ μπορεί να ορισθεί ο αριθμός $f(x) \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Βασικές απεικονίσεις

Η απεικόνιση $f : A \to A$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in A$ ονομάζεται **ταυτοτική απεικόνιση** του A και σημειώνεται με 1_A.

Μια απεικόνιση f ονομάζεται **σταθερή** αν το σύνολο τιμών της είναι μονοσύνολο, δηλαδή $R(f) = \{\beta\}$.

Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός συνόλου E τότε η απεικόνιση $f : E \to \{0, 1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση του** A και συμβολίζεται με μ_A (ή χ_A). Η χαρακτηριστική συνάρτηση χρησιμεύει για τον καθορισμό των σχέσεων και πράξεων των συνόλων όπως φαίνεται και από την επόμενη άσκηση.

Παράδειγμα

$E = [10]$, $A = \{1, 3, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 9, 10\}$, $A \cap B = \{3, 9\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

Στην περίπτωση αυτή, η χαρακτηριστική συνάρτηση οποιουδήποτε υποσυνόλου F του E μπορεί να αναπαρασταθεί από μια 10-άδα (δυαδική λέξη)

$$\mu_F = (\mu_F(1), \mu_F(2), \ldots, \mu_F(10))$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mu_A &= (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \\ \mu_B &= (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) \\ \mu_{A\cap B} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ \mu_{A\cup B} &= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι
$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A\cap B}(x), \forall x \in E.$
$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in E.$

1.3.2 Αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις

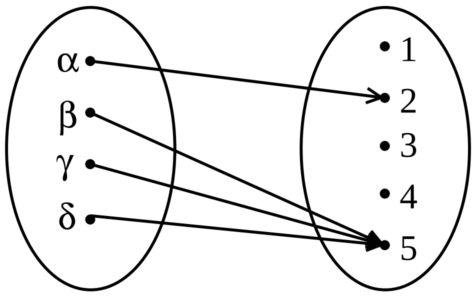
(i) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται $1-1$ όταν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά πρότυπα έχουν διαφορετικές εικόνες, δηλαδή

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

Ισοδύναμα για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
(ii) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **επί** όταν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A, δηλαδή όταν $B = R(f)$.
(iii) Μια απεικόνιση $f : A \to B$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** όταν είναι $1-1$ και επί.

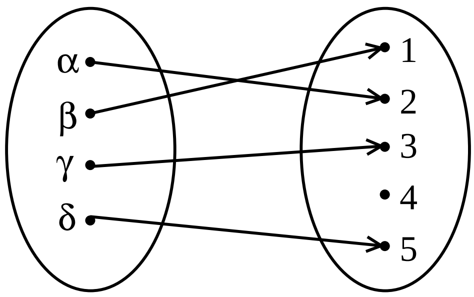
Παραδείγματα

α)



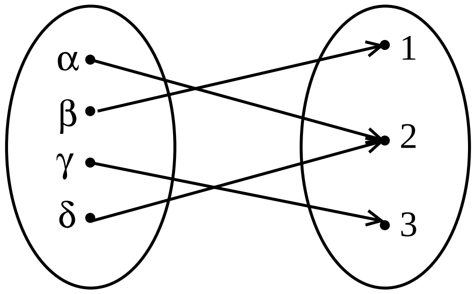
Δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί.

β)

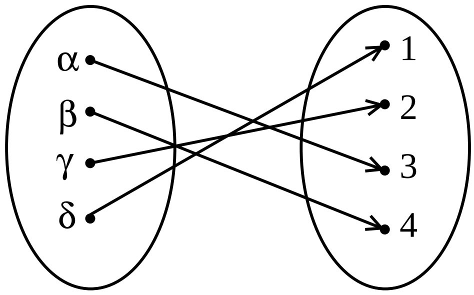


Είναι 1-1 αλλά όχι επί.

γ)



Είναι επί αλλά όχι 1-1.
δ)



Είναι αμφιμονοσήμαντη.

Άσκηση 5. *Να εξετασθεί αν η συνάρτηση* $f : [0,1] \to [5,8]$ *με* $f(x) = 3x + 5$ *είναι αμφιμονοσήμαντη.*

Λύση. Έστω $x_1, x_2 \in A = [0,1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι $1-1$.

Έστω $y \in B = [5,8]$ με $f(x) = y$ τότε

$$5 \leq y \leq 8 \Leftrightarrow 5 \leq 3x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [5,8]$ υπάρχει $x \in [0,1]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = 3x + 5$ προκύπτει ότι $x = \dfrac{y-5}{3}$.

Άρα, η f είναι αμφιμονοσήμαντη. □

1.3.3 Γραφική παράσταση

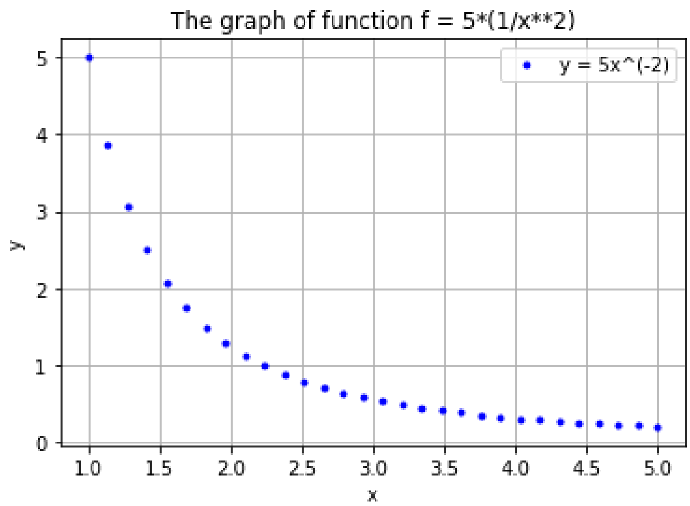
Έστω η απεικόνιση $f : A \to B$, τότε το σύνολο

$$\{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$$

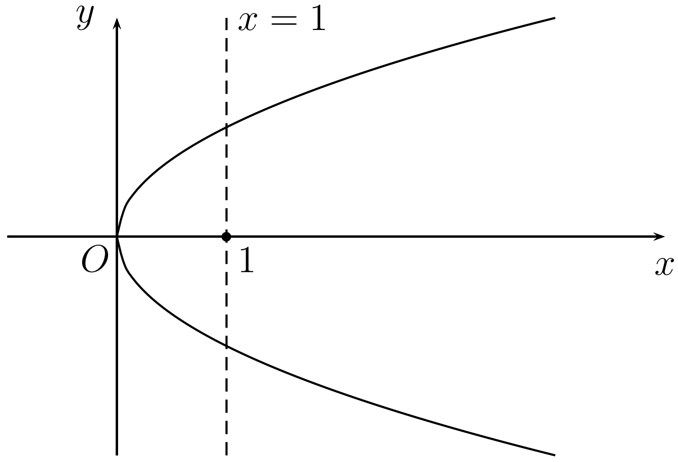
ονομάζεται **γραφική παράσταση** ή (**διάγραμμα**) της απεικόνισης f και συμβολίζεται με $G(f)$ (ή G_f).

Η γραφική παράσταση μιας πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής συνήθως είναι δυνατό να σχεδιασθεί στο Καρτεσιανό επίπεδο και έχει την ιδιότητα ότι κάθε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα Oy την τέμνει σε ένα το πολύ σημείο.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#function f(x) = 5x^(-2)
f = lambda x: 5*(1/x**2)

#create n points (x,f(x)), 1 <= x <= 5
n = 30
x = np.linspace(1, 5, n)
y = f(x)

#plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, y, 'b.', label = 'y = 5x^(-2)')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.grid(True)
plt.title("The graph of function f = 5*(1/x**2)")
plt.legend()
plt.show()
```

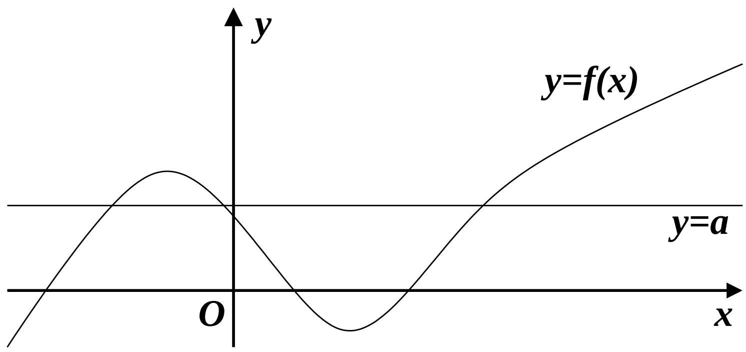


Παράδειγμα. Η καμπύλη του επόμενου σχήματος δεν είναι γραφική παράσταση κάποιας πραγματικής συνάρτησης της μεταβλητής x, διότι τέμνεται από την ευθεία $x = 1$ σε 2 σημεία.



Αν η συνάρτηση είναι $1-1$, τότε και κάθε παράλληλη ευθεία προς τον άξονα Ox πρέπει να την τέμνει σε ένα το πολύ σημείο.

Παράδειγμα



Η συνάρτηση $y = f(x)$ δεν είναι $1-1$ διότι τέμνεται από την ευθεία $y = a$ σε τρία σημεία.

Υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων δεν είναι δυνατό να σχεδιασθεί η γραφική παράσταση. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση του Dirichlet που ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

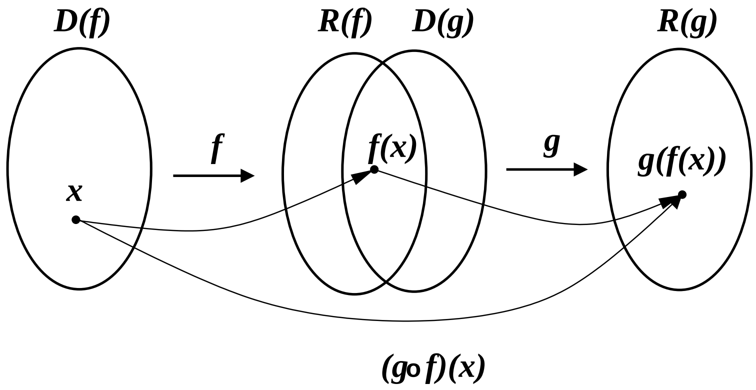
1.3.4 Σύνθεση απεικονίσεων

Δίνονται δύο απεικονίσεις f, g με $R(f) \cap D(g) \neq \emptyset$.

Τότε ορίζεται μια καινούρια απεικόνιση που ονομάζεται **σύνθεση** της g με την f, και συμβολίζεται με $g \circ f$, ως εξής:

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\},$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



Παράδειγμα

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = \sqrt{x-6}$. Τότε $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [2, +\infty)$, $D(g) = [6, +\infty)$ και $R(g) = [0, +\infty)$.

Είναι

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 \geq 6\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 6} = \sqrt{x^2 - 4}$.

Επιπλέον,

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\} = \{x \in [6, +\infty) : \sqrt{x-6} \in \mathbb{R}\} = [6, +\infty)$$

και $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 = x - 4$.

Οπως προκύπτει και από το προηγούμενο παράδειγμα οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ είναι εν γένει διαφορετικές.

Άσκηση

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$. Να δειχθεί ότι αν f, g είναι $1-1$ (αντίστοιχα επί) τότε και η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι $1-1$ (αντίστοιχα επί).

1.3.5 Αντίστροφη απεικόνιση

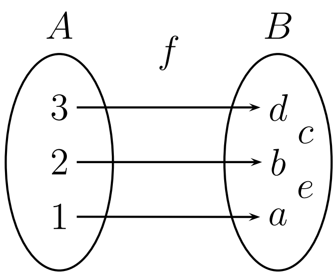
Έστω $f : A \to B$ μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση, τότε η **αντίστροφη απεικόνιση** της f, που συμβολίζεται με f^{-1}, είναι η απεικόνιση που σε κάθε $y \in B$ αντιστοιχεί το μοναδικό $x \in A$ με $f(x) = y$, δηλαδή ισχύει :

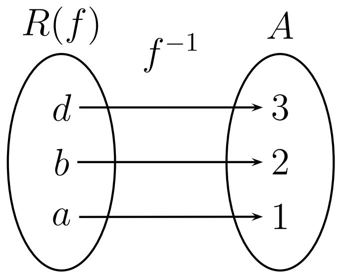
$$f^{-1} : B \to A \text{ με } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Εύκολα προκύπτει ότι $f^{-1} \circ f = 1_A$ και $f \circ f^{-1} = 1_B$.

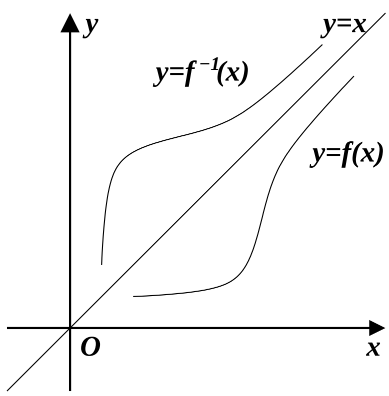
Προκειμένου να ορίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση μιας $1-1$ αλλά όχι επί απεικόνισης $f : A \to B$ θεωρούμε αντί του συνόλου B το σύνολο $R(f)$ και ορίζουμε την $f^{-1} : R(f) \to A$.

Παράδειγμα. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται μια απεικόνιση $f : A \to B$ και η αντίστροφή της, όπου $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{a, b, c, d, e\}$.





Η γραφική παράσταση της αντίστροφης μια αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης μιας μεταβλητής f στο Καρτεσιανό επίπεδο είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$.



Άσκηση Αν $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$ είναι δυο αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις τότε $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.3.6 Εικόνες συνόλων

Αν $f : A \to B$ είναι μια απεικόνιση και $\Gamma \subseteq A$, $\Delta \subseteq B$ τότε τα σύνολα

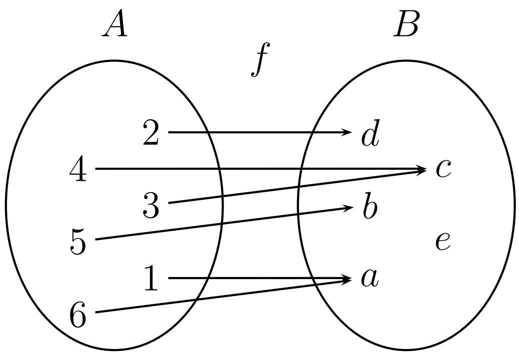
$$f(\Gamma) = \{y \in B : \text{ υπάρχει } x \in \Gamma \text{ με } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in \Gamma\}$$

και

$$f^{-1}(\Delta) = \{x \in A : f(x) \in \Delta\}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **εικόνα** του Γ και **αντίστροφη εικόνα** του Δ.

Παράδειγμα



$f(\{2,3\}) = f(\{2,3,4\}) = \{c,d\}$
$f^{-1}(\{a,c\}) = f^{-1}(\{a,c,e\}) = \{1,6,3,4\}$
$f(f^{-1}(\{a,c,e\})) = f(\{1,6,3,4\}) = \{a,c\} \subset \{a,c,e\}$
$f^{-1}(f(\{2,3\})) = f^{-1}(\{c,d\}) = \{2,3,4\} \supset \{2,3\}$.

Εύκολα αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες

1. $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
2. $f(f^{-1}(\Delta)) \subseteq \Delta$ και $f^{-1}(f(\Gamma)) \supseteq \Gamma$.
3. (i) $f(\Gamma_1) \subseteq f(\Gamma_2)$, όταν $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq A$.
   (ii) $f^{-1}(\Delta_1) \subseteq f^{-1}(\Delta_2)$, όταν $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq B$.
4. (i) $f(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = f(\Gamma_1) \cup f(\Gamma_2)$, όταν $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq A$.
   (ii) $f^{-1}(\Delta_1 \cup \Delta_2) = f^{-1}(\Delta_1) \cup f^{-1}(\Delta_2)$, όταν $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq B$.
5. (i) $f(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \subseteq f(\Gamma_1) \cap f(\Gamma_2)$, όταν $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq A$.
   (ii) $f^{-1}(\Delta_1 \cap \Delta_2) = f^{-1}(\Delta_1) \cap f^{-1}(\Delta_2)$, όταν $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq B$.

Πρόταση. Για μια απεικόνιση $f : A \to B$ ισχύουν

(i) f $1-1$ αν και μόνον αν $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$, $\forall \Gamma \subseteq A$.

(ii) f επί αν και μόνον αν $f(f^{-1}(\Delta)) = \Delta$, $\forall \Delta \subseteq B$.

(iii) f $1-1$ αν και μόνον αν $f(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = f(\Gamma_1) \cap f(\Gamma_2)$ για κάθε $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq A$.

Απόδειξη της (i)

Έστω ότι η απεικόνιση f είναι $1-1$· θα δειχθεί ότι $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$. Σύμφωνα με την ιδιότητα 2, αρκεί να δειχθεί ότι $f^{-1}(f(\Gamma)) \subseteq \Gamma$. Πραγματικά, αν $x \in f^{-1}(f(\Gamma))$ τότε $f(x) \in f(\Gamma)$ οπότε θα υπάρχει $\xi \in \Gamma$ με $f(x) = f(\xi)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι $1-1$ έπεται ότι $x = \xi$ οπότε $x \in \Gamma$. Αντίστροφα αν $f^{-1}(f(\Gamma)) = \Gamma$ $\forall \Gamma \subseteq A$, θα δειχθεί ότι η f είναι $1-1$. Πραγματικά, αν $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ εφαρμόζουμε τη δοσμένη ισότητα για $\Gamma = \{x_1\}$, οπότε προκύπτει ότι $x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$ και επομένως $x_1 = x_2$.

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να αποδειχθούν τα παρακάτω

   (i) $A = B$ αν και μόνο αν $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.

   (ii) $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.

   (iii) $\mu_A(x) + \mu_{\overline{A}}(x) = 1$ για κάθε $x \in E$.

   (iv) $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A\cap B}(x)$, $\forall x \in E$.

   (v) $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$, $\forall x \in E$.

   (Υπόδειξη: Διακρίνετε περιπτώσεις για το $x \in E$)

2. Σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι $1-1$, επί, ή αμφιμονοσήμαντη;

   (i) $A = [0, 1]$, $B = [5, 9]$ και $f(x) = 3x + 5$.

   (ii) $A = [-2, 2]$, $B = [0, 4]$ και $f(x) = x^2$.

   (iii) $A = [0, 2]$, $B = [\frac{1}{3}, 1]$ και $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

3. Δίνονται τα σύνολα $A = \{2^3, 2^4, 2^5, \ldots\}$ και $B = \{4^6, 4^8, 4^{10}, \ldots\}$. Να δοθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : A \to B$.

4. Έστω $A = \{1, 2, 4, 3, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ και $f : A \to B$ με $f(x) = (x - 5)(x - 4)$. Να βρεθούν τα σύνολα $f(A)$, $f(\{3, 4\})$, $f(\emptyset)$, $f(\{1, 2, 6\})$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{0, 2\})$, $f^{-1}(\{12\})$, $f^{-1}(\{9\})$, $f^{-1}(\{4, 5, 6\})$.