ΜΠΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
Διακριτά Μαθηματικά

Ασκήσεις φροντιστηρίου 2

2022-2023

1 Άλγεβρα Boole

Ιδιότητες

Στη δυαδική άλγεβρα Boole ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=y+x \\ x\cdot y=y\cdot x \end{array}\right\} \quad \text{(αντιμεταθετικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+(y+z)=(x+y)+z \\ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z \end{array}\right\} \quad \text{(προσεταιριστικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+(x\cdot y)=x \\ x\cdot(x+y)=x \end{array}\right\} \quad \text{(απορροφητικότητα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+x=x \\ x\cdot x=x \end{array}\right\} \quad \text{(αδυναμία)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \\ x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z) \end{array}\right\} \quad \text{(επιμεριστικότητα)}$$

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ιδιότητες:

i. $(x')'=x$

ii. $x+0=x$ και $x+1=1$.

iii. $x\cdot 0=0$ και $x\cdot 1=x$.

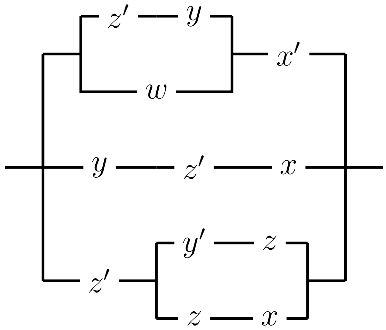
iv. $x+x'=1$ και $x\cdot x'=0$.

v. $x'+x\cdot y=x'+y$.

vi. $\left.\begin{array}{l} (x+y)'=x'\cdot y' \\ (x\cdot y)'=x'+y' \end{array}\right\}$ (τύποι De Morgan).

Άσκηση. *Να απλοποιηθεί το παρακάτω δίπολο, με χρήση των συναρτήσεων Boole.*

$(x, y, z, w) \rightarrow$

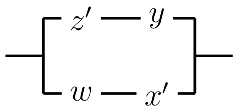


0 ή 1

Λύση. Η συνάρτηση Boole που αντιστοιχεί στο παραπάνω δίπολο είναι η

$$\begin{aligned} f &= (z'y + w)x' + yz'x + z'(y'z + zx) \\ &= \underline{z'yx'} + wx' + \underline{yz'x} + z'z(y' + x) \\ &= z'y(x' + x) + wx' + 0 = z'y1 + wx' \\ &= \underline{z'y + wx'} \end{aligned}$$

Επομένως, το ισοδύναμο απλοποιημένο δίπολο είναι το ακόλουθο:



□

Άσκηση. *Να λυθεί η εξίσωση*

$$x + y' = x'$$

Λύση. (1ος τρόπος) Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας με όλες τις δυνατές επιλογές:

x	y	x'	$x + y'$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Άρα, η εξίσωση έχει μια λύση, την $(x, y) = (0, 0)$.

(2ος τρόπος) Αν $x = 1$, τότε $1 + y' = 0$, αδύνατο.
Αν $x = 0$, τότε θα πρέπει να ισχύει $0 + y' = 1$. Επομένως, $y' = 1$, δηλαδή $y = 0$.
Άρα, η εξίσωση έχει μια λύση, την $(x, y) = (0, 0)$. □

Άσκηση. *Να λυθεί η εξίσωση Boole*

$(a, b, x, y) = ?$

$$ax + y = b$$

όπου x, y είναι οι άγνωστοι και $a, b \in \{0, 1\}$ είναι παράμετροι.

Λύση. Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας (με 16 γραμμές). Εναλλακτικά, διακρίνουμε περιπτώσεις για τις τιμές των παραμέτρων a, b.

- $a = b = 1$. Τότε, η εξίσωση γίνεται $x + y = 1$ και υπάρχουν 3 λύσεις:

$$1)\ x = y = 1, \qquad 2)\ x = 1, y = 0, \qquad 3)\ x = 0, y = 1.$$

- $a = b = 0$. Τότε, $y = 0$ και υπάρχουν 2 λύσεις:

$$1)\ x = y = 0, \qquad 2)\ x = 1, y = 0.$$

- $a = 1$, $b = 0$. Τότε, $x + y = 0$ και υπάρχει μία λύση, η $x = y = 0$.
- $a = 0$, $b = 1$. Τότε, $y = 1$ και υπάρχουν 2 λύσεις:

$$1)\ x = y = 1, \qquad 2)\ x = 0, y = 1.$$

□

Άσκηση. *Να λυθεί το σύστημα Boole*

$$x' + (y' + x)y' = 1$$
$$x + x'y' = 0$$

Λύση. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

i) Αν $y = 0$, τότε η δεύτερη εξίσωση δίνει $x + x'1 = 0 \Rightarrow x + x' = 0$, που είναι αδύνατο.

ii) Αν $y = 1$, τότε η δεύτερη εξίσωση δίνει $x + x'0 = 0 \Rightarrow x = 0$ και η πρώτη εξίσωση δίνει $x' + (0 + x)0 = 1 \Rightarrow x' = 1 \Rightarrow x = 0$.

Επομένως, η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (0, 1)$.

2ος τρόπος: Το σύστημα επαληθεύεται ανν η παράσταση $f = (x' + (y' + x)y')(x + x'y')'$ είναι ίση με 1. Απλοποιώντας την f

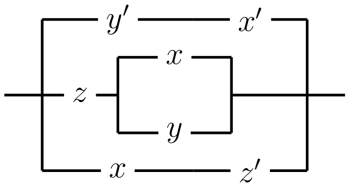
$(a+b)' = a'b'$

$$f = (x' + (y' + x)y')(x + x'y')' = (x' + y' + xy')x'\underline{(x'y')'} = (x' + x'y' + x'\cancel{x}y')(x + y)$$
$$= (1 + y')x'(x + y) = 1(x'x + x'y) = \underline{x'y},$$

$(ab)' = (a' + b')$

έχουμε τελικά ότι $f = x'y$. Άρα, θα πρέπει να είναι $x = 0$ και $y = 1$. □

Άσκηση. *Να βρεθεί η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο δίπολο*



Αν $xz = 1$, υπάρχει τιμή των μεταβλητών x, y, z ώστε η συνάρτηση που αντιστοιχεί στο δίπολο να λαμβάνει τιμή 1;

Λύση. Η συνάρτηση Boole που αντιστοιχεί στο παραπάνω δίπολο είναι η

$$
\begin{aligned}
f = f(x,y,z) &= y'x' + \underline{zx} + zy + \underline{xz'} \\
&= y'x' + (z + z')x + zy \\
&= y'x' + x + zy \\
&= (y' + x)(x' + x) + zy \\
&= \underline{y'} + x + \underline{zy} \\
&= x + (y' + z)(y' + y) \\
&= x + \underline{y' + z}
\end{aligned}
$$

$a + bc = (a+b)(a+c)$

$a(b+c) = ab + ac$

$a + (bc) = (a+b)(a+c)$

$a(b+c) = ab + ac$

Αν $xz = 1$, τότε αναγκαστικά είναι $x = z = 1$. Στην περίπτωση αυτή, είναι $f = 1 + y' + 1 = 1$, δηλαδή η f λαμβάνει τιμή 1 για κάθε τιμή της y. Επομένως, οι ζητούμενες τιμές (x, y, z) είναι οι $(1, 0, 1)$ και $(1, 1, 1)$. □

Άσκηση. *Να βρεθεί μια συνάρτηση Boole που έχει 3 μεταβλητές x, y, z και λαμβάνει την τιμή 1 μόνο όταν ισχύει η σχέση $x + y = z$.* $\left(f = (x+y)z + (x+y)'z' \right)$

Λύση. Θα φτιάξουμε τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης f που ψάχνουμε

n μεταβλητές : 2^{2^n} συναρτήσεις Boole

	x	y	z	f	
	1	1	1	1	← xyz
$x'+y'+z$ →	1	1	0	0	
	1	0	1	1	← $xy'z$
$x'+y+z$ →	1	0	0	0	
	0	1	1	1	← $x'yz$
$x+y'+z$ →	0	1	0	0	
$x+y+z'$ →	0	0	1	0	
	0	0	0	1	← $x'y'z'$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε (έναν) τύπο της ως εξής:

dnf:

$$f = \underline{xyz + xy'z} + x'yz + x'y'z' = xz + x'yz + x'y'z' =^{*}$$

$$= xz + yz + x'y'z'$$

$z(\overset{x+y}{x + x'y})$

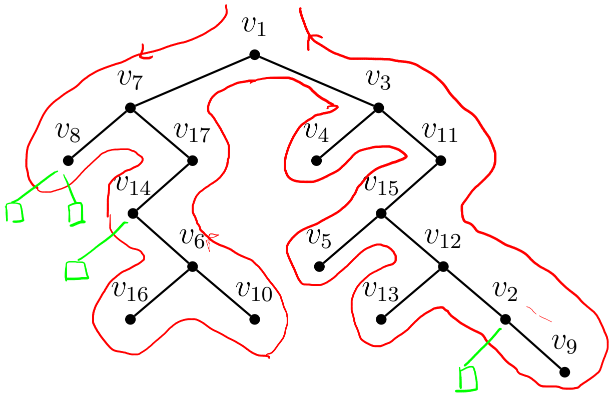
cnf:

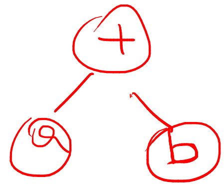
$$f = (x' + y' + z)(x' + y + z)(x + y' + z)(x + y + z')$$

□

2 Δένδρα

Άσκηση. *Να γίνει διάσχιση σε προδιάταξη, ενδοδιάταξη, μεταδιάταξη και σε διάταξη κατά επίπεδα του παρακάτω δυαδικού δένδρου με ρίζα το* v_1*:*





in: a + b
pre: + a b
post: a b +

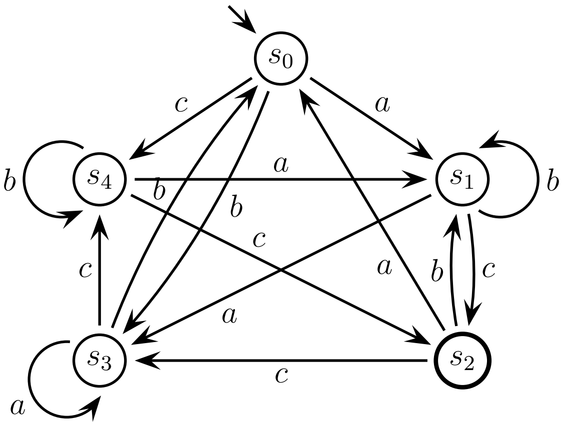
Απάντηση.

Προδιάταξη: 1, 7, 8, 17, 14, 6, 16, 10, 3, 4, 11, 15, 5, 12, 13, 2, 9
Ενδοδιάταξη: 8, 7, 14, 16, 6, 10, 17, 1, 4, 3, 5, 15, ~~5~~, 13, 12, 2, 9, 11
Μεταδιάταξη: 8, 16, 10, 6, 14, 17, 7, 4, 5, 13, 9, 2, 12, 15, 11, 3, 1
Κατά επίπεδα: 1, 7, 3, 8, 17, 4, 11, 14, 15, 6, 5, 12, 16, 10, 13, 2, 9

□

3 Αυτόματα

Άσκηση. *Δίδεται το παρακάτω αυτόματο*



(i) *Να εξετασθεί αν το αυτόματο αναγνωρίζει τις λέξεις*

$w_1 = c^2b^3a^4$ *(δηλαδή $w_1 = ccbbbaaaa$),* $s_0 \xrightarrow{c} s_4 \xrightarrow{c} s_2 \xrightarrow{b} s_1 \xrightarrow{b} s_1 \xrightarrow{b} s_1 \xrightarrow{a} s_3 \xrightarrow{a} \cdots \to s_3$

$w_2 = abcabcabc,$

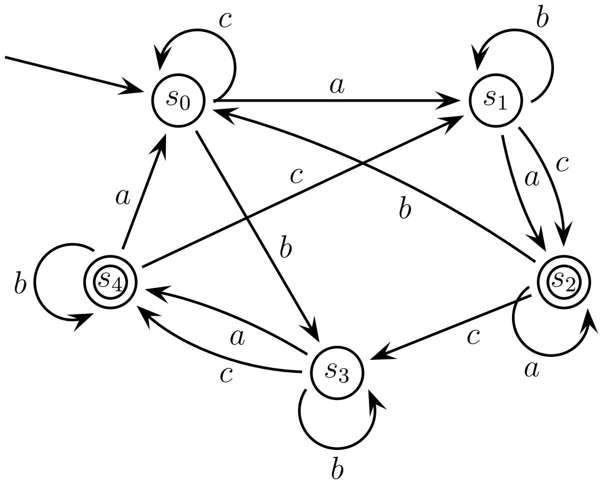
$w_3 = ba^lcb^mab^n$, *όπου* $l, m, n \in \mathbf{N}^*$. $\to \mathbb{N}^*$ $s_0 \xrightarrow{b} s_3 \xrightarrow{a^l} s_3 \xrightarrow{c} s_4 \xrightarrow{b^m} s_4 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b^n} s_1$

(ii) *Να βρεθούν οι τιμές των $m, n \in \mathbb{N}^*$, ώστε το αυτόματο να αναγνωρίζει τη λέξη $w = ab^mc^n$.*

$s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b^m} s_1 \xrightarrow{c} s_2 \boxed{\xrightarrow{c} s_3 \xrightarrow{c} s_4 \xrightarrow{c} s_2} \to \cdots$ $n \in \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$

Απάντηση. i) Δεν αναγνωρίζει την w_1, ούτε την w_3. Αναγνωρίζει την w_2.
ii) Αναγνωρίζει την w ανν $m \in \mathbb{N}^*$ και $n \in \{3k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$. □

Άσκηση. *Δίδεται το παρακάτω D-αυτόματο:*



i) *Να εξετασθεί αν το παραπάνω D-αυτόματο αναγνωρίζει τις λέξεις:*

$$w_1 = c\ b\ c\ b\ c\ b\ c, \qquad w_2 = a^5\ b^5\ c^5, \qquad w_3 = b^5\ a^5\ c^5$$

ii) *Να βρεθεί για ποιες τιμές των $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$, το παραπάνω D-αυτόματο αναγνωρίζει τη λέξη $w = a^2b^kc^\lambda$.*

$k=1$: $f^*(s_0, w) = s_0 \notin T$ (δεν αναγνωρίζεται)

$k>1$: Αναγνωρίζεται όταν $\lambda = 1 + 4i^{(s_4)}$, ή $\lambda = 3 + 4i^{(s_2)}$, $i \in \mathbb{N}$

δηλαδή $\lambda = 2i + 1$, $i \in \mathbb{N}$

$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| - |A_1\cap A_2| - |A_2\cap A_3| - |A_1\cap A_3| + |A_1\cap A_2\cap A_3|$

4 Αρχές $=|E|$

Άσκηση. *1323 φοιτητές που συμμετείχαν σε μια έρευνα, απάντησαν (με ναι ή όχι) στις παρακάτω ερωτήσεις:*

- A_1 *Έχετε γεννηθεί στην Αθήνα;* 464
- A_2 *Το Τμήμα στο οποίο μπήκατε ήταν η πρώτη σας προτίμηση;* 355
- A_3 *Είστε ευχαριστημένοι με το Τμήμα σας;* 561

Οι καταφατικές απαντήσεις (ναι) στις παραπάνω ερωτήσεις ήταν 464, 355 και 561 αντίστοιχα. Επίσης:

- $A_1\cap A_2$ *120 από τους φοιτητές είναι Αθηναίοι και μπήκαν στην πρώτη τους προτίμηση.*
- $A_1\cap A_3$ *120 από τους φοιτητές είναι Αθηναίοι και είναι ευχαριστημένοι με το Τμήμα τους.*
- $A_2\cap A_3$ *100 από τους φοιτητές που μπήκαν στην πρώτη τους προτίμηση είναι ευχαριστημένοι με το Τμήμα τους.*
- $A_1\cap A_2\cap A_3$ *20 Αθηναίοι φοιτητές μπήκαν στην πρώτη τους προτίμηση και είναι ευχαριστημένοι με το Τμήμα τους.*

Να βρεθεί το πλήθος των φοιτητών που ανήκουν στις παρακάτω κατηγορίες:

$\bar A_1\cap \bar A_2\cap \bar A_3 = \overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$ *i) Κατάγονται από την επαρχία, δεν μπήκαν στην πρώτη τους προτίμηση και δεν είναι ευχαριστημένοι από το Τμήμα τους.*

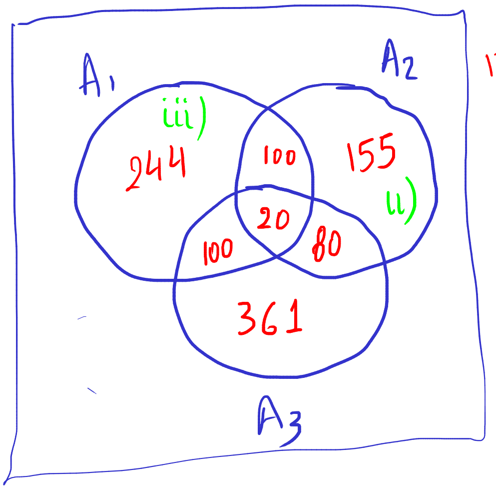
$\bar A_1\cap A_2\cap \bar A_3$ *ii) Κατάγονται από την επαρχία, μπήκαν στην πρώτη τους προτίμηση και δεν είναι ευχαριστημένοι από το Τμήμα τους.*

$A_1\cap \bar A_2\cap \bar A_3$ *iii) Είναι Αθηναίοι, δεν μπήκαν στην πρώτη τους προτίμηση και δεν είναι ευχαριστημένοι από το Τμήμα τους.*

i) $|\bar A_1\cap \bar A_2\cap \bar A_3| = 1323-464-155-80-361$

ii) 155

iii) 244



$1323 = |E|$

$$|A\cap B\cap C| = |A\cup B\cup C| - |A| - |B| - |C| + |A\cap B| + |B\cap C| + |A\cap C|$$
$$= 139 - 63 - 91 - \cancel{44} + 25 + \cancel{21} + \cancel{23} = 164 - 63 - 91 = 10$$

Άσκηση. *Αν για τα σύνολα A, B, C γνωρίζουμε ότι $|A \cup B \cup C| = 139$ και*

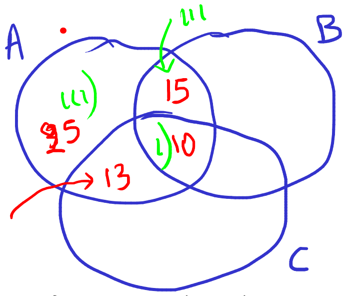
$$|A| = 63, \quad |B| = 91, \quad |C| = 44, \quad |A\cap B| = 25, \quad |A\cap C| = 23, |B\cap C| = 21,$$

να βρεθούν οι πληθάριθμοι των παρακάτω συνόλων:

i) $A \cap B \cap C$, 10

ii) $A \cap B \cap \overline{C}$, 15

iii) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$. 25



Άσκηση. *Με πόσους τρόπους μπορούν να μπουν $n = 6$ διακεκριμένα άτομα σε $k = 3$ διακεκριμένα αυτοκίνητα, έτσι ώστε σε κάθε αυτοκίνητο να μπει τουλάχιστον 1 άτομο;*

Λύση. Έστω E το σύνολο όλων των τρόπων χωρίς περιορισμούς. Ως γνωστό, είναι $|E| = k^n = 3^6$, διότι κάθε τρόπος αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα σε μια λέξη $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ με n γράμματα $w_1, w_2, \ldots, w_n$ στο αλφάβητο $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$. Η αντιστοιχία είναι η εξής: $w_i = j$ σημαίνει ότι το άτομο i μπήκε στο αυτοκίνητο j. 112123

Ορίζουμε, για κάθε $j \in [k]$, το A_j να είναι το σύνολο των τρόπων που τα άτομα μπορούν να μπουν στα υπόλοιπα αυτοκίνητα εκτός του αυτοκινήτου j. Το ζητούμενο είναι λοιπόν το $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$. Έχουμε ότι

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^6, \qquad |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1, \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0.$$

Επομένως,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \cdot 2^6 - 3$$

και άρα $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |E| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3^6 - 3 \cdot 2^6 + 3 = 540.$ □

Άσκηση. *Να δειχθεί ότι αν υπάρχουν n φωλιές για $kn+1$ περιστέρια, τότε τουλάχιστον μια φωλιά θα έχει τουλάχιστον $k+1$ περιστέρια.*

Λύση. Έστω ότι κάθε φωλιά έχει το πολύ k περιστέρια. Τότε, οι n φωλιές θα έχουν συνολικά το πολύ kn περιστέρια. Άρα, τουλάχιστον 1 περιστέρι δεν βρίσκεται σε φωλιά, άτοπο. □

Άσκηση. *Ένα συρτάρι περιέχει 6 ζευγάρια μαύρες* Μ *κάλτσες, 5 ζευγάρια καφέ* Κ *κάλτσες, 5 ζευγάρια άσπρες* Α *κάλτσες και 4 ζευγάρια πράσινες* Π *κάλτσες. Πόσες κάλτσες πρέπει να βγάλουμε από το συρτάρι (χωρίς να βλέπουμε), έτσι ώστε*

i) να έχουμε σίγουρα 2 κάλτσες με το ίδιο χρώμα;

ii) να έχουμε σίγουρα 2 με διαφορετικό χρώμα;

Λύση. *i)* Έχουμε $n = 4$ διαφορετικά χρώματα. Άρα, πρέπει να βγάλουμε τουλάχιστον $n+1 = 5$. *ii)* Έχουμε το πολύ $n = 12$ κάλτσες με ίδιο χρώμα (12 μαύρες). Άρα, πρέπει να βγάλουμε τουλάχιστον $n+1 = 13$. □

Άσκηση. *Πόσοι αριθμοί πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο $[10, 99] = \{10, 11, \ldots, 98, 99\}$, έτσι ώστε*

90 αριθμοί

i) τουλάχιστον ένα πολλαπλάσιο του 3 να περιλαμβάνεται στην επιλογή;

ii) τουλάχιστον δύο αριθμοί με το ίδιο πρώτο ψηφίο να περιλαμβάνονται στην επιλογή;

Λύση. *i)* Το σύνολο περιέχει $99/3 - 9/3 = 30$ πολλαπλάσια του 3. Πράγματι, ένα πολλαπλάσιο του 3 στο σύνολο είναι της μορφής $3k$, με

$$10 \le 3k \le 99 \Leftrightarrow 10/3 \le k \le 99/3 \Leftrightarrow 3 + 1/3 \le k \le 33 \overset{k\in\mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} 4 \le k \le 33$$

και $|[4, 33]| = 30$. Άρα το σύνολο περιέχει $n = 60$ αριθμούς που δεν είναι πολλαπλάσια του 3 και επομένως πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον $n+1 = 61$ αριθμούς.

ii) Το σύνολο διαμερίζεται σε $n = 9$ υποσύνολα που το καθένα περιέχει 10 αριθμούς με ίδιο πρώτο ψηφίο. Τα σύνολα αυτά είναι τα

$$[10, 19], \quad [20, 29], \quad [30, 39], \ldots, [90, 99].$$

Άρα, πρέπει να επιλέξουμε τουλάχιστον $n+1 = 10$ αριθμούς, ώστε δύο να ανήκουν αναγκαστικά στο ίδιο υποσύνολο. □