ΠΜΣ "ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ"
(ΠΛΗ2, 7$^{\text{ος}}$ κύκλος, 1$^{\text{ο}}$ εξάμηνο, 2024)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Κ. ΜΑΝΕΣ - Ι. ΤΑΣΟΥΛΑΣ

Σημειώσεις διαλέξεων 2

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

1.1 Σύνολα

Το **σύνολο** είναι μια συλλογή αντικειμένων σαφώς καθορισμένων τα οποία θεωρούμε ως μια ολότητα. Τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο ονομάζονται **στοιχεία του συνόλου**. Όταν θέλουμε να δηλώσουμε ότι το αντικείμενο x ανήκει (αντίστοιχα δεν ανήκει) στο σύνολο A, τότε σημειώνουμε $x \in A$ (αντίστοιχα $x \notin A$). Το **κενό σύνολο** είναι το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και σημειώνεται με $\emptyset$ ή $\varnothing$.

Τα σύνολα συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, ενώ τα στοιχεία τους με μικρά. Τα σύνολα παρουσιάζονται δια αναγραφής των στοιχείων τους, όπου αυτό είναι δυνατό, αλλιώς δια περιγραφής των στοιχείων του.

Παραδείγματα. Τα σύνολα

$$A = \{1, 1/2, -1/3, a\}, B = \{-1, 4, \{-1, 2\}, 6, 1\}$$

δίδονται δια αναγραφής των στοιχείων τους, ενώ τα σύνολα

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 3\} \text{ (ή } \Gamma = \{x \in \mathbb{R} | x^2 > 3\}),$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{N}^* : x \text{ πολλαπλάσιο του } 5\}$$

δια περιγραφής των στοιχείων τους.

Παρατηρήσεις

1. Σε ένα σύνολο, κάθε στοιχείο μπορεί να εμφανίζεται το πολύ μια φορά.
2. Σε ένα σύνολο, δεν παίζει ρόλο η σειρά που αναγράφονται τα στοιχεία του. Έτσι, $\{2, -3, 4, 7\} = \{-3, 7, 4, 2\}$.
3. Το σύνολο $\{\varnothing\}$ δεν είναι κενό, αλλά περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο (είναι μονοσύνολο), το κενό σύνολο. Γενικά, ισχύει $\{x\} \neq x$.

Μερικά βασικά σύνολα είναι τα παρακάτω:
$\mathbb{N}$ το σύνολο των **φυσικών αριθμών**,
$\mathbb{Z}$ το σύνολο των **ακεραίων αριθμών**,
$\mathbb{Q}$ το σύνολο των **ρητών αριθμών**,
$\mathbb{R}$ το σύνολο των **πραγματικών αριθμών**,
$\mathbb{C}$ το σύνολο των **μιγαδικών αριθμών**.

Αν A είναι ένα από τα παραπάνω σύνολα με A^*, σημειώνουμε το σύνολο που αποτελείται από όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του A.

Κάθε σύνολο της μορφής $\{1, 2, \ldots, n\}$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, ονομάζεται **τμήμα φυσικών αριθμών** και σημειώνεται με $[n]$. Για παράδειγμα, $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1.1.1 Σχέσεις συνόλων

Εγκλεισμός: Ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου B (συμβολισμός $A \subseteq B$) αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ συνεπάγεται ότι $x \in B$. Στην περίπτωση αυτή το B ονομάζεται **υπερσύνολο** του A.

Για παράδειγμα, το σύνολο $\{1, 2, 4\}$ είναι υποσύνολο του $\{1, 2, 3, 4\}$. Το σύνολο $\{a, c\}$ δεν είναι υποσύνολο του $\{a, b, d\}$.

Κάθε σύνολο A είναι υποσύνολο του εαυτού του. Το κενό σύνολο $\varnothing$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου A.

Όταν $A \subseteq B$ και υπάρχει ένα τουλάχιστο στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A (δηλαδή όταν $A \subseteq B$ και $A \neq B$) τότε το A ονομάζεται **γνήσιο υποσύνολο** του B (συμβολισμός $A \subset B$).

Για παράδειγμα, τα γνήσια υποσύνολα του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$ είναι τα σύνολα $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\varnothing$.

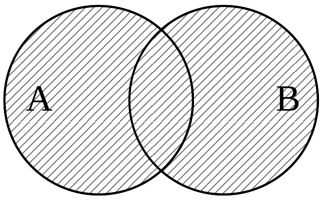
Ισότητα: Δύο σύνολα ονομάζονται ίσα (συμβολισμός $A = B$) όταν κάθε στοιχείο του ενός συνόλου ανήκει στο άλλο και αντιστρόφως. Προφανώς ισχύει

$$A = B \iff (A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A).$$

1.1.2 Πράξεις συνόλων

(i) Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε η **ένωση** των A, B (συμβολισμός $A \cup B$) είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή/και στο B, δηλαδή

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή/και } x \in B\}.$$

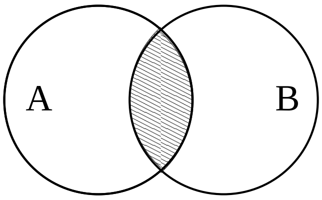


A	B	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

(Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.)

(ii) Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε η **τομή** (συμβολισμός $A \cap B$) των A, B είναι το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των A, B, δηλαδή

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$$



A	B	$A \cap B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Αν για τα A, B ισχύει ότι $A \cap B = \varnothing$, τότε τα A, B ονομάζονται **ξένα**.

Η ένωση και η τομή των συνόλων ορίζεται για περισσότερα από δύο σύνολα,

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in [n] \text{ με } x \in A_i\},$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in [n]\}$$

Επίσης σημειώνουμε

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in \mathbb{N}^* \text{ με } x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Γενικότερα, αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια συνόλων ορίζεται η ένωση και η τομή τους ως εξής:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \text{ Υπάρχει } i \in I \text{ με } x \in A_i\},$$

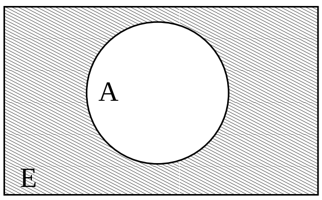
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

Παραδείγματα

1. Αν $I = \{3, 7, 11\}$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = A_3 \cup A_7 \cup A_{11}$
2. Αν $I = \mathbb{N}^*$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$.
3. Αν $I = \{2n : n \in \mathbb{N}^*$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = A_2 \cup A_4 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i}$.

(iii) Έστω ένα σύνολο E (το οποίο πολλές φορές θα θεωρείται βασικό σύνολο) και $A \subseteq E$. Το **συμπλήρωμα** του συνόλου A (συμβολισμός $\overline{A}$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του E που δεν ανήκουν στο A.

$$\overline{A} = \{x \in E : x \notin A\}$$

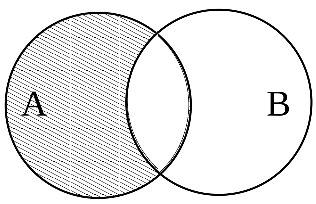


A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Άλλοι συμβολισμοί για το συμπλήρωμα είναι: A^c, A'.

(iv) Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε η **διαφορά** (συμβολισμός $A \setminus B$) είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B, δηλαδή

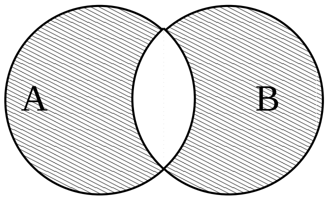
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$



A	B	$A \setminus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

(v) Αν A, B είναι δύο σύνολα τότε η **συμμετρική διαφορά** των A και B (συμβολισμός $A \triangle B$) είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B και όλων των στοιχείων του B που δεν ανήκουν στο A, δηλαδή

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



A	B	$A \triangle B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Παραδείγματα.

1. Έστω $E = [10] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ και } B = \{2, 3, 5, 7, 9\}.$$

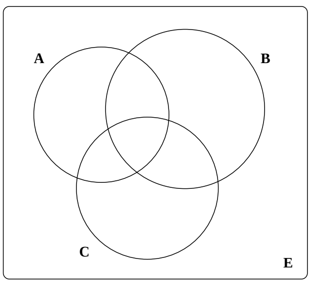
Τότε $A, B \subseteq E$ και

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}, A \cap B = \{2, 3, 5\},$$

$$\overline{A} = \{7, 8, 9, 10\}, \overline{B} = \{1, 4, 6, 8, 10\},$$

$$A \setminus B = \{1, 4, 6\}, B \setminus A = \{7, 9\}, A \triangle B = \{1, 4, 6, 7, 9\}.$$

2. Έστω E το σύνολο των μαθητών ενός σχολείου, A, B και C το σύνολο των μαθητών του σχολείου που μιλούν αντίστοιχα Αγγλικά, Γαλλικά και Γερμανικά.



$A \cup B \cup C$ είναι το σύνολο αυτών που μιλούν τουλάχιστον μια από τις 3 γλώσσες.
$A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ είναι το σύνολο αυτών που μιλούν Αγγλικά και δεν μιλούν ούτε Γαλλικά, ούτε Γερμανικά.

Ιδιότητες Πράξεων

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$
3. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (De Morgan).

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων να γίνουν ως ασκήσεις. Στις επόμενες ασκήσεις δίδονται δυο αντιπροσωπευτικές μέθοδοι απόδειξης.

Άσκηση 1. *Να αποδειχθεί ότι* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Λύση.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ και } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ και } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

οπότε, επειδή χρησιμοποιήθηκαν παντού ισοδυναμίες,

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Άσκηση 2. *Να αποδειχθεί ότι* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Λύση. Τα A, B, C είναι υποσύνολα του E.

Πού μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο $x \in E$;

Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Οι στήλες $A \cap (B \cup C)$ και $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ είναι ίδιες. Άρα, τα σύνολα αυτά έχουν τα ίδια στοιχεία του E, δηλαδή είναι ίσα.

Αν σε ένα τύπο εμφανίζονται:

2 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^2 = 4$ γραμμές (περιπτώσεις),

3 διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει $2^3 = 8$ γραμμές (περιπτώσεις),

n διαφορετικά σύνολα, ο πίνακας έχει 2^n γραμμές (περιπτώσεις).

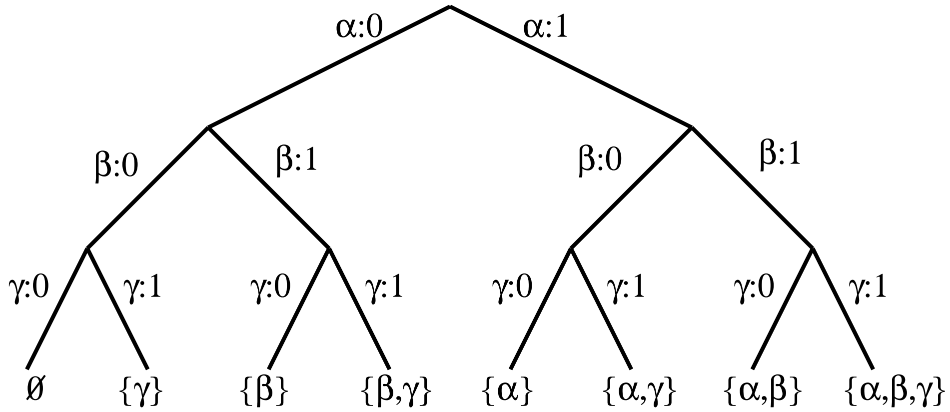
Η μέθοδος των πινάκων είναι πρακτική όταν σε ένα τύπο εμφανίζονται το πολύ 4 διαφορετικά σύνολα.

1.1.3 Δυναμοσύνολο

Το σύνολο όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου E ονομάζεται **δυναμοσύνολο** του E και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(E)$.

Παράδειγμα Αν $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, τότε

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, E\}.$$



Αν $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(F) = \{&\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}, \{\beta, \gamma\}, \{\beta, \delta\}, \{\gamma, \delta\},\\ &\{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \delta\}, \{\alpha, \gamma, \delta\}, \{\beta, \gamma, \delta\}, F\}\\ = \mathcal{P}&(E) \cup \{\emptyset \cup \{\delta\}, \{\alpha\} \cup \{\delta\}, \{\beta\} \cup \{\delta\}, \{\gamma\} \cup \{\delta\}, \{\alpha, \beta\} \cup \{\delta\},\\ &\{\alpha, \gamma\} \cup \{\delta\}, \{\beta, \gamma\} \cup \{\delta\}, E \cup \{\delta\}\}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το E έχει 3 στοιχεία και το $\mathcal{P}(E)$ έχει $2^3 = 8$ στοιχεία. Επίσης, το F έχει 4 στοιχεία και το $\mathcal{P}(F)$ έχει $2^4 = 16$ στοιχεία.

Γενικά ισχύει ότι αν το σύνολο E έχει n στοιχεία τότε το $\mathcal{P}(E)$ θα έχει 2^n στοιχεία.

1.1.4 Καρτεσιανό γινόμενο

Έστω A, B δυο μη κενά σύνολα, τότε **καρτεσιανό γινόμενο**, με πρώτο παράγοντα το A και δεύτερο παράγοντα το B, ονομάζεται το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (α, β) με $\alpha \in A$, $\beta \in B$ (συμβολισμός $A \times B$), δηλαδή

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}.$$

Όταν το ένα (τουλάχιστον) από τα σύνολα A, B είναι το κενό σύνολο τότε ως καρτεσιανό γινόμενο τους ορίζεται το κενό σύνολο.

Παραδείγματα

1. Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $B = \{1, 2\}$ τότε είναι

$$A \times B = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2), (\gamma, 1), (\gamma, 2), (\delta, 1), (\delta, 2)\}$$

$$B \times A = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (1, \beta), (2, \beta), (1, \gamma), (2, \gamma), (1, \delta), (2, \delta)\}.$$

$$B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

2. Αν $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ τότε το $A \times B$ αποτελείται από τα ζεύγη:

$A \times B$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	(x_1, y_3)	(x_1, y_4)	(x_1, y_5)
x_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	(x_2, y_3)	(x_2, y_4)	(x_2, y_5)
x_3	(x_3, y_1)	(x_3, y_2)	(x_3, y_3)	(x_3, y_4)	(x_3, y_5)
x_4	(x_4, y_1)	(x_4, y_2)	(x_4, y_3)	(x_4, y_4)	(x_4, y_5)

3. Αν $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}$ και $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ είναι το σύνολο των ενδείξεων των 52 χαρτιών της τράπουλας.

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου γενικεύεται για περισσότερους από δύο παράγοντες ως εξής:

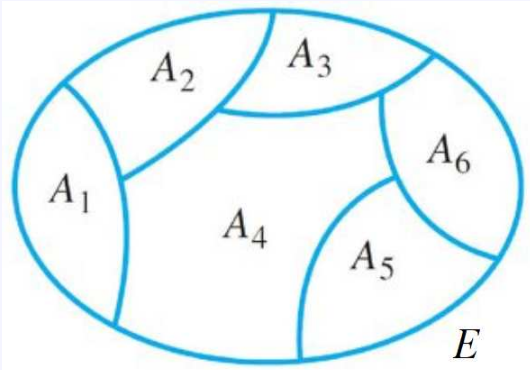
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ για κάθε } i \in [n]\}.$$

Εξάλλου, αν $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ φορές}}$ σημειώνεται με A^n.

Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιείται συχνά τόσο στη Μαθηματική Ανάλυση όσο και στη Γραμμική Άλγεβρα για τους χώρους $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ των δύο, τριών, $\ldots$, n διαστάσεων.

1.1.5 Διαμερίσεις

Μια οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$, **μη κενών** υποσυνόλων ενός συνόλου E ονομάζεται **διαμέριση** του E αν ισχύουν οι παρακάτω δύο συνθήκες:
(i) τα σύνολα A_i είναι ανά δύο ξένα,
(ii) η ένωσή τους είναι το E.



Παραδείγματα
(i) Τα σύνολα $A_1 = \{1, 3, 5, 7\}, A_2 = \{2, 4\}, A_3 = \{6, 9, 10\}, A_4 = \{8\}$ αποτελούν μια διαμέριση του $[10] = \{1, 2, \ldots, 10\}$.
(i) Έστω E το σύνολο όλων των περιττών φυσικών αριθμών και A_i, $i \in I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που λήγουν σε i, τότε η οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ αποτελεί μια διαμέριση του E.
(ii) Έστω $E = \mathbb{R}$ και $A_i = [i, i + 1)$, όπου $i \in \mathbb{Z}$, τότε η οικογένεια $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί μια διαμέριση του $\mathbb{R}$.
(iii) Έστω E το σύνολο των ατόμων που που φοιτούν στο Πα.Πει., F το σύνολο των γυναικών που φοιτούν του Πα.Πει και M το σύνολο των ανδρών που φοιτούν στο Πα.Πει. Τα σύνολα F, M αποτελούν μια διαμέριση του E.

Μια άλλη διαμέριση του E ορίζεται από τα σύνολα A (αντ. $\overline{A}$) των ατόμων που φοιτούν στο Πα.Πει και γεννήθηκαν (αντ. δεν γεννήθηκαν) στην πόλη της Αθήνας.

1.2 Σχέσεις

Έστω A, B δύο μη κενά σύνολα, τότε κάθε μη κενό υποσύνολο[α΄] R του $A \times B$ ορίζει μια **διμελή σχέση** (ή απλά **σχέση**) μεταξύ των στοιχείων των A και B. Συγκεκριμένα, αν για τα στοιχεία $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ισχύει $(\alpha, \beta) \in R$ τότε τα στοιχεία α, β σχετίζονται μέσω της σχέσης R και σημειώνουμε ότι $\alpha R \beta$, δηλαδή

$$\alpha R \beta \Longleftrightarrow (\alpha, \beta) \in R.$$

[α΄] Προσοχή! Το σύμβολο R μια σχέσης δεν πρέπει να συγχέεται με το σύμβολο $\mathbb{R}$ του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Παραδείγματα.
(i) Μια σχέση R στο σύνολο $E = A \times B$ όπου $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ και $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ είναι το σύνολο σημειωμένων ζευγών του επόμενου πίνακα:

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1			$\star$		
x_2		$\star$		$\star$	
x_3			$\star$		
x_4	$\star$	$\star$	$\star$		

(ii) Αν A είναι το σύνολο των καταναλωτικών αγαθών και B το σύνολο των καταστημάτων, τότε ο προτασιακός τύπος ‘‘το αγαθό $\alpha \in A$ πωλείται στο κατάστημα $\beta \in B$’’ ορίζει μια σχέση μεταξύ των στοιχείων των A και B.
(iii) Αν E είναι το σύνολο των σπουδαστών ενός έτους, τότε ο προτασιακός τύπος ‘‘ο σπουδαστής α έχει την ίδια επίδοση με το σπουδαστή β’’ ορίζει μια σχέση των στοιχείων του E.
(iv) Αν E είναι το σύνολο των ευθειών του επιπέδου, τότε η καθετότητα ορίζει μια σχέση (την οποία συμβολίζουμε με $\perp$) μεταξύ των στοιχείων του E, με $\epsilon_1 \perp \epsilon_2$ όταν η ευθεία ϵ_1 είναι κάθετη στην ευθεία ϵ_2.
(v) Αν E είναι το σύνολο όλων των φοιτητών του Τμήματος, τότε ορίζεται μια σχέση R των στοιχείων του E ως εξής:

$$aRb \Leftrightarrow \text{ οι } a,\, b \text{ είναι φίλοι.}$$

(vi) Αν E είναι το σύνολο των ανθρώπων, τότε ορίζεται μια σχέση R των στοιχείων του E ως εξής: aRb αν οι a, b είναι συγγενείς.

1.2.1 Κατηγορίες σχέσεων

Μια σχέση R στο σύνολο E (δηλαδή υποσύνολο $E \times E$) ονομάζεται **ανακλαστική** ανν για κάθε $a \in E$ ισχύει ότι aRa.

Παραδείγματα $E =$ Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b \in E$.
$aRb \Leftrightarrow$ Οι a, b έχουν γεννηθεί την ίδια χρονιά. (Ειναι ανακλαστική.)
$aSb \Leftrightarrow$ Ο a είναι πατέρας του b. (Δεν είναι ανακλαστική.)

Μια σχέση R στο σύνολο E ονομάζεται **συμμετρική** ανν για κάθε $a, b \in E$ ισχύει ότι $aRb \Leftrightarrow bRa$.

Παραδείγματα $E =$ Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b \in E$.
$aRb \Leftrightarrow$ Οι a, b είναι φίλοι. (Ειναι συμμετρική.)
$aSb \Leftrightarrow$ Ο a είναι πατέρας του b. (Δεν είναι συμμετρική.)
Έστω $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (2,3), (4,2), \ldots\}$. Αν η R είναι συμμετρική, τότε θα περιέχει σίγουρα και τα ζεύγη $(1,2)$, $(2,4)$. (Μπορεί να περιέχει και άλλα ζεύγη.)

Μια σχέση R στο σύνολο E ονομάζεται **μεταβατική** αν και μόνο για κάθε $a, b, c \in E$ με aRb και bRc έπεται ότι aRc.

Παραδείγματα $E =$ Το σύνολο όλων των ανθρώπων, $a, b, c \in E$.
$aRb \Leftrightarrow$ Οι a, b είναι αδέρφια (με τους ίδιους γονείς). (Ειναι μεταβατική.)
$aSb \Leftrightarrow$ Οι a, b είναι γνωστοί/φίλοι. (Δεν είναι μεταβατική.)

1.2.2 Ισοδυναμία

Μια σχέση R στο E ονομάζεται **ισοδυναμία** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) $\alpha R \alpha$, για κάθε $a \in E$ (**ανακλαστική**)
(ii) $\alpha R \beta \Leftrightarrow \beta R \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**συμμετρική**)
(ii) $\alpha R \beta$ και $\beta R \gamma \implies \alpha R \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση ισοδυναμίας σημειώνεται με $\sim$ αντί R.

Παραδείγματα

1. Αν E είναι το σύνολο των φοιτητών που φοιτούν στο Πα.Πει., τότε η σχέση R με

$$aRb \Leftrightarrow a, b \text{ φοιτούν στο ίδιο Τμήμα του Πα.Πει.}$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

2. Αν $E = \mathbb{N}^*$ τότε το σύνολο $R = \{(x, y) : |x - y|$ πολλαπλάσιο του $2\}$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας, με $n_1 \sim n_2$ όταν $\frac{n_1 - n_2}{2}$ είναι ακέραιος αριθμός.

Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο E και $\alpha \in E$ τότε το σύνολο

$$C_\alpha = \{\beta \in E : \beta \sim \alpha\}$$

ονομάζεται **κλάση ισοδυναμίας** του στοιχείου α.

Για παράδειγμα, η κλάση ισοδυναμίας C_a ενός φοιτητή a του Πα.Πει. σύμφωνα με την σχέση R του 1ου παραδείγματος, είναι το σύνολο όλων των φοιτητών που φοιτούν στο ίδιο Τμήμα με αυτόν.

Οι κλάσεις ισοδυναμίας μπορεί να συμπίπτουν για ορισμένα $\alpha \in E$. Συγκεκριμένα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\alpha \in C_\alpha$, για κάθε $\alpha \in E$.
2. $\alpha \sim \beta \Longrightarrow C_\alpha = C_\beta$.
3. $\alpha \not\sim \beta \Longrightarrow C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$.

Από τις τρεις ιδιότητες αυτές προκύπτει ότι:

Κάθε σχέση ισοδυναμίας στο E ορίζει μια διαμέριση του E.

Ισχύει και το **αντίστροφο**, δηλαδή αν (A_i), $i \in I$, είναι μια διαμέριση του E, τότε ορίζουμε τη σχέση R στο E ως εξής:

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } i \in I \text{ με } x, y \in A_i.$$

Εύκολα προκύπτει ότι η σχέση αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες (i),(ii) και (iii) οπότε είναι μια σχέση ισοδυναμίας με κλάσεις ισοδυναμίας τα σύνολα A_i.

Το σύνολο $\{C_\alpha : \alpha \in E\}$ ονομάζεται **σύνολο πηλίκο** του E για τη σχέση $\sim$ και συμβολίζεται με $E/\sim$.

Για παράδειγμα, το σύνολο πηλίκο της σχέσης R του πρώτου παραδείγματος είναι το σύνολο των 10 Τμημάτων του Πα.Πει.

Το σύνολο πηλίκο της σχέσης του 2ου παραδείγματος είναι το σύνολο $\{A, \Pi\}$ όπου A, Π είναι αντίστοιχα τα σύνολα των άρτιων και περιττών φυσικών αριθμών.

1.2.3 Διάταξη

Μια σχέση R στο σύνολο E ονομάζεται **αντισυμμετρική** ανν για κάθε $a, b \in E$ το πολύ ένα από (a, b) και (b, a) ανήκει στην σχέση R.

Παράδειγμα Αν η R είναι αντισυμμετρική τότε $(1, 2) \in R \Rightarrow (2, 1) \notin R$.

Ισοδύναμα, μια σχέση R είναι **αντισυμμετρική** αν έχει την ιδιότητα ότι αν aRb και bRa τότε $a = b$.

Μια σχέση R στο E ονομάζεται **(μερική) διάταξη** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες :
(i) $\alpha R\alpha$, για κάθε $\alpha \in E$ (**ανακλαστική**)
(ii) $\alpha R\beta$ και $\beta R\alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in E$ (**αντισυμμετρική**)
(iii) $\alpha R\beta$ και $\beta R\gamma \Longrightarrow \alpha R\gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in E$ (**μεταβατική**).

Συνήθως η σχέση διάταξης σημειώνεται με $\leq$.

Η διάταξη ονομάζεται **ολική** αν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\alpha \leq \beta \text{ ή } \beta \leq \alpha, \ \ \forall \alpha, \beta \in E.$$

Με άλλα λόγια μια διάταξη στο E ονομάζεται ολική αν συγκρίνονται όλα τα στοιχεία του E.

Ένα σύνολο E εφοδιασμένο με μια μερική (αντίστοιχα ολική) διάταξη ονομάζεται **μερικά** (αντίστοιχα **ολικά**) διατεταγμένο σύνολο και σημειώνεται με $(E, \leq)$.

Παραδείγματα

1. Η σχέση $\leq$ στο $\mathbb{R}$ είναι ολική διάταξη, ενώ η σχέση $<$ στο $\mathbb{R}$ δεν είναι διάταξη.

2. (Σύγκριση αξιολογήσεων) Οι πλατφόρμες διανομής φαγητού (delivery) έχουν για κάθε κατάστημα που προσφέρει προϊόντα στην πλατφόρμα τους κάποιους δείκτες αξιολόγησης, π.χ.:

K_1 $(4.6, 4.7, 4.9)$

Ποιότητα	4.6
Εξυπηρέτηση	4.7
Ταχύτητα (delivered by efood)	4.9

K_2 $(4.6, 4.7, 4.6)$

Ποιότητα	4.6
Εξυπηρέτηση	4.7
Ταχύτητα	4.6

K_3 $(4.5, 4.8, 4.9)$

Ποιότητα	4.6
Εξυπηρέτηση	4.8
Ταχύτητα (delivered by efood)	4.9

K_4 $(4.8, 5, 4.9)$

Ποιότητα	4.8
Εξυπηρέτηση	5
Ταχύτητα (delivered by efood)	4.9

K_5 $(4.6, 4.8, 4.9)$

Ποιότητα	4.6
Εξυπηρέτηση	4.8
Ταχύτητα (delivered by efood)	4.9

K_6 $(4.5, 4.6, 4.9)$

Ποιότητα	4.5
Εξυπηρέτηση	4.6
Ταχύτητα (delivered by efood)	4.9

Στο παράδειγμα, σε κάθε κατάστημα αντιστοιχεί μια τριάδα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ όπου x μετράει την ποιότητα, y την εξυπηρέτηση και z την ταχύτητα παράδοσης. Για να συγκρίνουμε τις αξιολογήσεις ορίζουμε στο σύνολο των τριάδων την σχέση R ως εξής:

$$(x, y, z)R(a, b, c) \Leftrightarrow x \leq a \text{ και } y \leq b \text{ και } z \leq c$$

Η σχέση R είναι μια σχέση μερικής διάταξης.

Πράγματι, ισχύουν οι ιδιότητες

(i) $(x, y, z)R(x, y, z)$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, διότι $x \leq x$ και $y \leq y$ και $z \leq z$.

(ii) Αν $(x, y, z)R(a, b, c)$ και $(a, b, c)R(x, y, z)$, τότε $(x, y, z) = (a, b, c)$ για κάθε $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, διότι ισχύει ότι $x \leq a \leq x$ και $y \leq b \leq y$ και $z \leq c \leq z$.

(iii) Αν $(x, y, z)R(a, b, c)$ και $(a, b, c)R(k, l, m)$, τότε $(x, y, z) \subseteq (k, l, m)$ για κάθε $(x, y, z), (a, b, c), (k, l, m) \in \mathbb{R}^3$.

Σύμφωνα με την σχέση αυτή

$K_2(4.6, 4.7, 4.6) \leq K_1(4.6, 4.7, 4.9)$ (δηλαδή το K_1 είναι καλύτερο από το K_2),
$K_6(4.5, 4.6, 4.9) \leq K_3(4.5, 4.8, 4.9)$ (δηλαδή το K_3 είναι καλύτερο από το K_6.
Όμως τα $K_2(4.6, 4.7, 4.6)$ και $K_6(4.5, 4.6, 4.9)$ δεν συγκρίνονται, ομοίως, ούτε τα $K_1(4.6, 4.7, 4.9)$ και $K_3(4.5, 4.8, 4.9)$ συγκρίνονται, δηλαδή η διάταξη δεν είναι ολική.

3. (Σύγκριση βάσει χαρακτηριστικών) Μερικοί ιστότοποι αγορών οικιακών συσκευών δίνουν την δυνατότητα σύγκρισης των χαρακτηριστικών ορισμένων ομοειδών προϊόντων, για παράδειγμα ακολουθεί ένας τέτοιος πίνακας που αφορά 6 φούρνους μικροκυμάτων:

Οθόνη						
Οθόνη Ενδείξεων	✓	✗	✗	✗	✗	✓
Γενικά						
Ρολόι	✓	✗	✗	✗	✗	✓
Περιστρεφόμενος Δίσκος	✓	✓	-	✓	✓	-
Λειτουργίες	Grill, Αυτόματα Προγράμματα, Απόψυξη	Grill, Αυτόματα Προγράμματα	Αυτόματα Προγράμματα, Απόψυξη	Αυτόματα Προγράμματα	Grill, Αυτόματα Προγράμματα	Αυτόματα Προγράμματα, Απόψυξη
Τύπος Ελέγχου	Ψηφιακός	Αναλογικός	Αναλογικός	Αναλογικός	Αναλογικός	Ψηφιακός
Ρετρό	✗	✓	✗	✗	✓	✗

Δύο φούρνοι A, B μπορούν *συγκριθούν* αν *το σύνολο των χαρακτηριστικών* του A είναι *υποσύνολο των χαρακτηριστικών* του B και τότε θεωρούμε ότι ο B είναι καλύτερος από τον A διότι έχει περισσότερα χαρακτηριστικά. Έτσι για παράδειγμα ο 1ος φούρνος είναι καλύτερος από τον 6ο φούρνο του πίνακα. Από την άλλη δεν συγκρίνονται οι φούρνοι 1 και 2 διότι έχουν άλλα χαρακτηριστικά, π.χ. ο 1ος είναι ψηφιακός, ενώ ο δεύτερος αναλογικός. Ούτε ο 3ος φούρνος συγκρίνεται με τον 5ο, διότι τα σύνολο των λειτουργιών τους { Αυτόματα προγράμματα, Απόψυξη } και { Grill, Αυτόματα προγράμματα } δεν είναι το ένα υποσύνολο του άλλου ή αντιστρόφως.

Γενικότερα, η σχέση εγκλεισμού $\subseteq$ στο $\mathcal{P}(E)$ είναι μερική διάταξη.

Πράγματι, ισχύουν οι ιδιότητες

(i) $A \subseteq A$ για κάθε $A \subseteq E$.

(ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$ για κάθε $A, B \subseteq E$.

(iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq C$, τότε $A \subseteq C$ για κάθε $A, B, C \subseteq E$.

Η σχέση αυτή δεν είναι ολική, αφού για παράδειγμα τα σύνολα $\{x\}$ και $\{y\}$ δεν συγκρίνονται όταν $x \neq y$.

4. Η σχέση διαιρετότητας $\mid$ στο $\mathbb{N}^*$ είναι μερική διάταξη, όπου με $\mid$ συμβολίζεται η σχέση του $\mathbb{N}^*$ που ορίζεται ως εξής: Για κάθε $x, y \in \mathbb{N}^*$

$$x \mid y \Leftrightarrow x \text{ διαιρεί τον } y$$

Άσκηση 3 (Μερική διάταξη διαιρετότητας). *Στο σύνολο* $\mathbb{N}^*$, *ορίζουμε την σχέση διαιρετότητας* $\mid$ *ως εξής*

$$\begin{aligned} x \mid y &\Leftrightarrow x \text{ διαιρεί τον } y \\ &\Leftrightarrow \text{υπάρχει } k \in \mathbb{N}^* \text{ ώστε } y = kx. \end{aligned}$$

i) Να δειχθεί ότι η σχέση διαιρετότητας $\mid$ *είναι σχέση μερικής διάταξης στο* $\mathbb{N}^*$.

ii) Είναι η σχέση διαιρετότητας $\mid$ *σχέση ολικής διάταξης στο* $\mathbb{N}^*$;

Λύση του (i).
(Ανακλαστική ιδιότητα.) Για κάθε $x \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $x = 1 \cdot x$, άρα $x \mid x$.
(Αντισυμμετρική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid x$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $x = k_2 y$, οπότε $y = k_1 k_2 y$ και

$$y = k_1 k_2 y \Rightarrow k_1 k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1 \Rightarrow x = y.$$

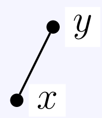
(Μεταβατική ιδιότητα.) Θεωρούμε $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ με $x \mid y$ και $y \mid z$. Τότε, υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $y = k_1 x$ και $z = k_2 y$, οπότε $z = k_2 k_1 x$. Επειδή $k_2 k_1 \in \mathbb{N}^*$ έπεται ότι $x \mid z$.

Κατόπιν τούτων, η σχέση $\mid$ είναι σχέση μερικής διάταξης στο $\mathbb{N}^*$.

Λύση του (ii). Δεν είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{N}^*$, διότι υπάρχουν αριθμοί στο $\mathbb{N}^*$ που δεν συγκρίνονται. Για παράδειγμα, $3 \nmid 5$ και $5 \nmid 3$. □

Τα **διαγράμματα Hasse** αναπαριστούν γεωμετρικά μια μερική διάταξη $\leq$ που ορίζεται σε ένα σύνολο A:

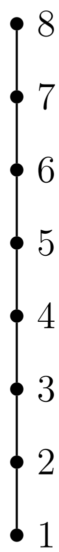
- Τα στοιχεία του A αναπαρίστανται από σημεία.
- Αν $x < y$ και δεν υπάρχει $z \in A$ ώστε $x < z < y$ (σχέση κάλυψης), τότε τα σημεία x και y ενώνονται με μια γραμμή, έτσι ώστε το σημείο x να βρίσκεται χαμηλότερα από το σημείο y.



Οι γραμμές αυτές αναπαριστούν τις σχέσεις κάλυψης.

Παραδείγματα

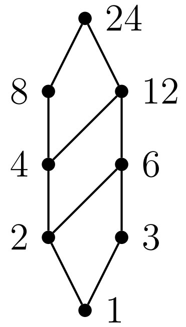
1. Έστω A το τμήμα των φυσικών αριθμών $[8] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ εφοδιασμένο με την κλασική σχέση διάταξης $\leq$. Ένα διάγραμμα Hasse για το A είναι το επόμενο:



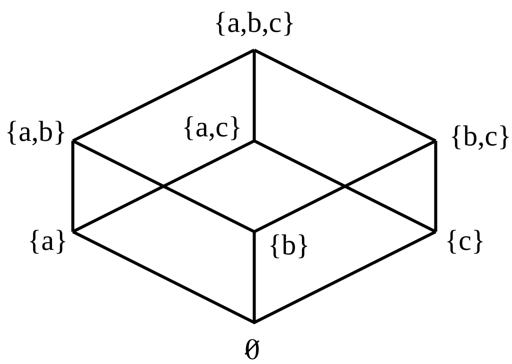
2. Έστω A το σύνολο των θετικών διαιρετών του 24, δηλαδή

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\},$$

εφοδιασμένο με την σχέση διαιρετότητας $|$. Ένα διάγραμμα Hasse για το A είναι το επόμενο:



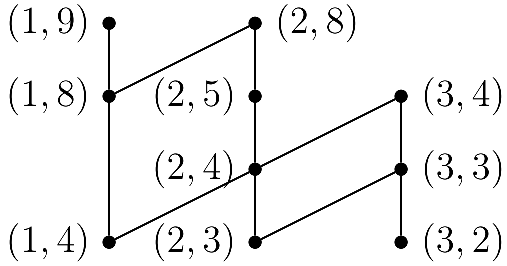
3. Το διάγραμμα Hasse του δυναμοσυνόλου του $A = \{a, b, c\}$ ως προς τη μερική διάταξη του εγκλεισμού $\subseteq$:



4. Το διάγραμμα Hasse του συνόλου των ζευγών $E = \{(1,4), (1,8),\ (1,9),$ $(2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,8)\},\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4)$, ως προς την μερική διάταξη $\leq$ που ορίζεται ως εξής

$$(x, y) \leq (a, b) \Leftrightarrow x \leq a \text{ και } y \leq b.$$

είναι το εξής:



1.2.4 Μετατροπή μερικής διάταξης σε ολική

Δίδεται ένα σύνολο V, στο οποίο έχουμε ορίσει μια μερική διάταξη $\lhd$. Μια **ολική** διάταξη $\leq$ στο V ονομάζεται **γραμμική επέκταση** ή **τοπολογική διάταξη** της διάταξης $\lhd$ στο V ανν για κάθε $a, b \in V$ ισχύει

$$a \lhd b \Rightarrow a \leq b.$$

Δηλαδή η διάταξη $\leq$ είναι ‘‘συμβατή’’ με την $\lhd$ και την επεκτείνει σε όλα τα ζεύγη στοιχείων σε μια ολική διάταξη.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι δίνεται το σύνολο $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ με την μερική διάταξη $\lhd$, για την οποία $x \lhd x$ για κάθε $x \in V$ και επιπλέον

$$d \lhd b,\ d \lhd c,\ d \lhd a,\ d \lhd e,\ d \lhd f,\ b \lhd e,\ c \lhd e,\ a \lhd f$$

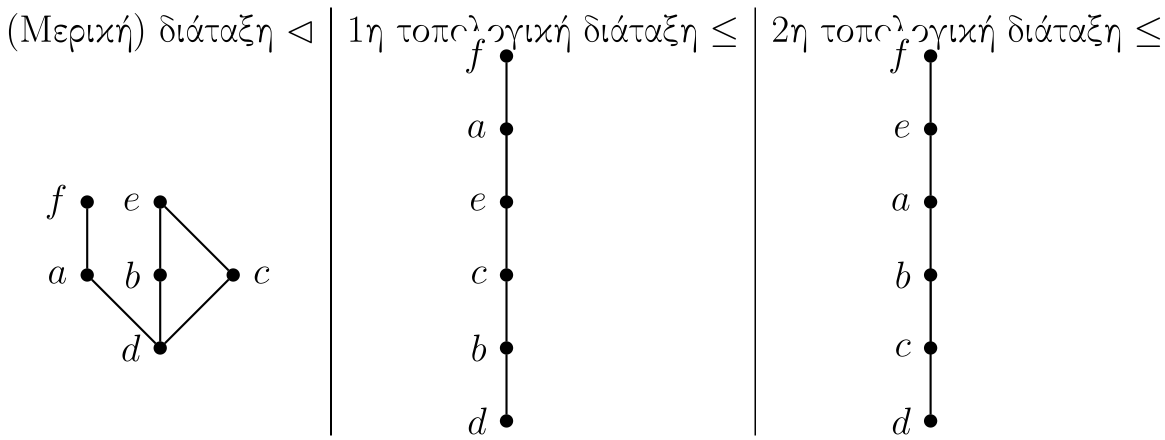
Μια τοπολογική διάταξη $\leq$ για την σχέση $\lhd$ είναι η ολική διάταξη

$$d \leq b \leq c \leq a \leq e \leq f$$

Μια άλλη τοπολογική διάταξη $\leq$ είναι η ολική διάταξη

$$d \leq c \leq b \leq e \leq a \leq f.$$

Σχηματικά:



Αποδεικνύεται ότι:

Κάθε μερική διάταξη μπορεί να επεκταθεί σε μια τοπολογική διάταξη.

Μερικές φορές μπορεί να υπάρχουν πολλές τοπολογικές διατάξεις.

Για την εύρεση της τοπολογικής διάταξης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο επόμενος αλγόριθμος:

Αλγόριθμος εύρεσης τοπολογικής διάταξης

- Είσοδος: Ένα σύνολο U διατεταγμένων ζευγών (x, y) που αναπαριστούν την μερική διάταξη $\lhd$ στο σύνολο V
- Έξοδος: Μια (διατεταγμένη) λίστα L των στοιχείων του V, η οποία αναπαριστά την τοπολογική διάταξη $\leq$.

- Όσο υπάρχουν στοιχεία του V που δεν έχουν προστεθεί στην L
  - Επιλέγουμε ένα στοιχείο $x \in V$ που δεν έχει μικρότερο στοιχείο μεταξύ των στοιχείων που δεν έχουν προστεθεί στην λίστα L (Δηλαδή το x δεν εμφανίζεται στην δεύτερη θέση κανενός ζεύγους του U.)
  - Προσθέτουμε το x στο τέλος της λίστας L.
  - Σβήνουμε όλα τα ζεύγη (x, y) του U που περιέχουν το x.

Το πρόβλημα της επέκτασης μιας μερικής διάταξης σε ολική είναι πολύ συνηθισμένο στις εφαρμογές, όπως φαίνεται και στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση 4 (Βάζοντας τα πράγματα σε σειρά). *Για την ολοκλήρωση ενός έργου, πρέπει να εκτελεστούν* 9 *δραστηριότητες* $1, 2, \ldots, 9$. *Κάποιες από αυτές χρειάζονται τα αποτελέσματα μερικών άλλων, των οποίων η εκτέλεση πρέπει να προηγηθεί. Οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:*

	απαιτήσεις		*απαιτήσεις*		*απαιτήσεις*
1	3, 4	4		7	3, 4
2	1, 5	5		8	5, 7
3		6	1, 2	9	6, 8

Να βρεθεί με ποια σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι $1, 2, \ldots, 9$ *ώστε να ολοκληρωθεί το έργο.*

Λύση. Οι απαιτήσεις του προβλήματος ορίζουν μια μερική διάταξη στο σύνολο 1, 2, …, 9. Συγκεκριμένα, $j < i$ αν η δραστηριότητα i απαιτεί την ολοκλήρωση της δραστηριότητας j. Επομένως, η ολοκλήρωση του έργου απαιτεί την ικανοποίηση των παρακάτω ζευγών περιορισμών:

$$\begin{aligned} U = \{&(1,2), (1,6), (2,6), (3,1), (3,7), (3,8), \\ &(4,1), (4,7), (5,2), (5,8), (6,9), (8,9)\} \end{aligned}$$

Η εύρεση της σειράς εκτέλεσης αντιστοιχεί στην εύρεση μια τοπολογικής διάταξης για την μερική διάταξη των απαιτήσεων.

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της τοπολογικής διάταξης. Θα φτιάξουμε μια λίστα L που τελικά θα περιέχει τους αριθμούς $1, 2, 3, \ldots, 9$ με την σειρά της τοπολογικής διάταξης. Κάθε φορά, επιλέγουμε μια δραστηριότητα i που δεν απαιτεί τις υπόλοιπες που απομένουν, την προσθέτουμε στο τέλος της L και σβήνουμε από το U τα ζεύγη που την περιέχουν. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να εξαντληθούν οι δραστηριότητες.

0. Αρχικά, έχουμε $V = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$, $L = []$ και

$$\begin{aligned} U = \{&(1, 2), (1, 6), (2, 6), (3, 1), (3, 7), (3, 8), \\ &(4, 1), (4, 7), (5, 2), (5, 8), (6, 9), (8, 9)\} \end{aligned}$$

1. Επιλέγουμε την 5 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5]$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (3, 1), (3, 7), (3, 8), (4, 1), (4, 7), (6, 9), (8, 9)\}$$

2. Επιλέγουμε την 3 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 4, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3]$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (4, 1), (4, 7), (6, 9), (8, 9)\}$$

3. Επιλέγουμε την 4 οπότε έχουμε $V = [1, 2, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4]$ και

$$U = \{(1, 2), (1, 6), (2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$

4. Επιλέγουμε την 1 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 7, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1]$ και

$$U = \{(2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$

5. Επιλέγουμε την 7 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 8, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7]$ και

$$U = \{(2, 6), (6, 9), (8, 9)\}$$

6. Επιλέγουμε την 8 οπότε έχουμε $V = [2, 6, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8]$ και

$$U = \{(2, 6), (6, 9)\}$$

7. Επιλέγουμε την 2 οπότε έχουμε $V = [6, 9]$, $L = [5, 3, 4, 1, 7, 8, 2]$ και

$$U = \{(6, 9)\}$$

8. Επιλέγουμε την 6 οπότε έχουμε: $V = [9]$, $L = [5,3,4,1,7,8,2,6]$ και
$$U = \{\}$$

9. Επιλέγουμε την 9 οπότε έχουμε $V = []$, $L = [5,3,4,1,7,8,2,6,9]$ και
$$U = \{\}$$

Επομένως, μια τοπολογική διάταξη των δραστηριοτήτων 1, 2, ..., 9, και άρα μια πιθανή σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων, είναι η σειρά

$$L = [5,3,4,1,7,8,2,6,9].$$

Παρακάτω δίδεται μια υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου στην γλώσσα Python

```
V = [1,2,3,4,5,6,7,8,9] #elements
U = [(1,2),(1,6),(2,6),(3,1),(3,7),(4,1),(4,7),(5,2),(5,8),(6,9)
    ,(3,8),(8,9)] #partial order
Vc = V.copy()
n = len(V)
pre = [[] for i in range(n+1)] #u in pre[v] <==> (u,v) in U
succ = [[] for i in range(n+1)] #u in succ[v] <==> (v,u) in U
for t in U: #for each tuple t in U
    pre[t[1]].append(t[0]) #populate pre
    succ[t[0]].append(t[1]) #populate succ

L = [] #result is stored in L
while(len(Vc) > 0):
    l = len(Vc)
    for v in Vc: #for each element v
        if len(pre[v]) == 0: #if v has no predecessor
            L.append(v) #append it in L
            for u in succ[v]: #for each successor u of v
                pre[u].remove(v) #delete v from list of predecessors
    of u
            #succ[v].clear()
            Vc.remove(v) #delete v
            break #reset for v loop
    if l == len(Vc): break #no progress => no possible solution

if (len(Vc)==0): print("result:", L)
else: print("no result found")
```

Output:

```
result: [3, 4, 1, 5, 2, 6, 7, 8, 9]
```

1.2.5 Φραγμένα σύνολα

Αν $(E, \leq)$ είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και A είναι ένα μη κενό υποσύνολό του τότε ένα στοιχείο $\alpha \in E$ (αντίστοιχα $\beta \in E$) ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) φράγμα του A όταν $x \leq \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leq x$) για κάθε $x \in A$. Όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα ενός συνόλου A, τότε το σύνολο αυτό ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) **φραγμένο** σύνολο.

Αν A είναι ένα άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμένο υποσύνολο του $(E, \leq)$ τότε ένα στοιχείο $s \in E$ (αντίστοιχα $i \in E$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:
(i) s είναι άνω φράγμα (αντίστοιχα i είναι κάτω φράγμα).
(ii) $s \leq \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leq i$) για κάθε άνω φράγμα α (αντίστοιχα κάτω φράγμα β) του A ονομάζεται **supremum ή άνω πέρας** (αντίστοιχα **infimum ή κάτω πέρας**) του A και σημειώνεται με $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$).

Πρέπει να τονισθεί ότι τα $\sup A$ και $\inf A$ δεν υπάρχουν πάντα για ένα σύνολο. Όταν όμως υπάρχουν είναι μοναδικά. Γενικά το $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$) δεν ανήκει υποχρεωτικά στο σύνολο A. Όμως, στην περίπτωση που ανήκει ονομάζεται **μέγιστο** (αντίστοιχα **ελάχιστο**) στοιχείο του A και σημειώνεται με $\max A$ (αντίστοιχα $\min A$).

Παραδείγματα
1. Για το ολικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{R}, \leq)$ είναι:
α) Αν $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ τότε $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$.
Το 1 είναι μέγιστο στοιχείο του A, διότι $1 \in A$, ενώ το A δεν έχει ελάχιστο, αφού $0 \notin A$.
β) Αν $A = (\alpha, \beta)$ τότε $\sup A = \beta$ και $\inf A = \alpha$.
Το A δεν έχει μέγιστο, ούτε ελάχιστο στοιχείο, αφού τα α, β δεν ανήκουν στο A.
2. Για το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*, |)$, όπου $|$ είναι η σχέση διαιρετότητας και $A = \{4, 16, 28, 40\}$ ισχύει ότι

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ είναι άνω φράγμα του } A$$

$$\Leftrightarrow 4|n \text{ και } 16|n \text{ και } 28|n \text{ και } 40|n$$

$$\Leftrightarrow n \text{ κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του } A$$

Οπότε, το ελάχιστο άνω φράγμα του A θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του A, δηλαδή

$$\sup A = \text{ΕΚΠ}(4, 16, 28, 40) = 560.$$

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\inf A = \text{ΜΚΔ}(4, 16, 28, 40) = 4.$$

3. Για το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ όπου $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ και

$$A = \{\{2, 4, 8\}, \{6, 8\}, \{2, 8, 10\}, \{4, 8\}\}$$

ισχύουν ότι

$$B \text{ είναι άνω φράγμα του } A$$

$$\Leftrightarrow \{2, 4, 8\} \subseteq B, \{6, 8\} \subseteq B, \{2, 8, 10\} \subseteq B, \{4, 8\} \subseteq B$$

Οπότε, το ελάχιστο άνω φράγμα του A θα είναι το ''μικρότερο'' τέτοιο σύνολο B, δηλαδή η ένωση όλων των στοιχείων του A. Κατόπιν τούτου, είναι

$$\sup A = \{2, 4, 8\} \cup \{6, 8\} \cup \{2, 8, 10\} \cup \{4, 8\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Ομοίως, προκύπτει ότι

$$\inf A = \{2, 4, 8\} \cap \{6, 8\} \cap \{2, 8, 10\} \cap \{4, 8\} = \{8\}.$$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. Έστω E ένα μη κενό σύνολο και $A, B, C \subseteq E$. Να δειχθεί ότι

   i) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$. (Επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης ως προς την τομή.)

   ii) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. (Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την διαφορά.)

   iii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (Κανόνας De Morgan για το συμπλήρωμα της τομής.)

   iv) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. (Διαμέριση του A ως προς την τομή του με τα B και $\overline{B}$.)

   Λύση της (iv)
   Θέλουμε να δείξουμε ότι $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Τα A, B είναι υποσύνολα του E. Πού μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο $x \in E$; Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

A	B	$\overline{B}$	$A \cap B$	$A \cap \overline{B}$	$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

   Οι στήλες των A και $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ είναι ίδιες.

   Άρα, τα σύνολα A και $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ περιέχουν τα ίδια στοιχεία του E, δηλαδή είναι ίσα.

2. Να αποδειχθεί επαγωγικά ο κανόνας του De Morgan για το συμπλήρωμα της τομής $n \geq 2$ σύνολων, δηλαδή $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$

3. Έστω E το σύνολο όλων των φοιτητών που σπουδάζουν στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς. Έστω A, B, C τα υποσύνολα του E που περιέχουν τους φοιτητές που

   - γνωρίζουν Αγγλικά
   - γνωρίζουν Γαλλικά

- γνωρίζουν Γερμανικά

αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τα σύνολα A, B, C, E και τις πράξεις της ένωσης, της τομής, του συμπληρώματος και της διαφοράς να εκφράσετε τα σύνολα των φοιτητών που

- Γνωρίζουν μόνο Αγγλικά
- Γνωρίζουν τουλάχιστον δύο από τις τρεις γλώσσες.
- Γνωρίζουν ακριβώς δύο από τις τρεις γλώσσες.
- Δεν γνωρίζουν καμία από τις 3 γλώσσες.

4. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse του δυναμοσυνόλου του $[4]$ ως προς την μερική διάταξη του εγκλεισμού $\subseteq$.

5. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse του συνόλου των θετικών διαιρετών του 36 ως προς την μερική διάταξη της διαιρετότητας.

6. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse του συνόλου $[3] \times [4]$ ως προς την μερική διάταξη $\leq$ που ορίζεται ως εξής: Για κάθε (x, y), $(a, b) \in [3] \times [4]$
$$(x, y) \leq (a, b) \Leftrightarrow x \leq a \text{ και } y \leq b$$

7. Να βρεθεί η σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων A, B, C, D, E, F, G, H, K, M όταν
$A < C$, $A < D$, $A < M$, $A < H$, $B < A$, $B < D$, $B < K$, $B < M$, $C < G$, $C < H$, $C < M$, $D < H$, $E < A$, $E < B$, $E < C$, $E < K$, $F < D$, $F < G$, $G < H$, $K < C$, $M < H$,
όπου $x < y$ όταν η x προηγείται της y.

8. Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*, |)$ και
$$A_1 = \{32, 80, 160, 640\}$$
$$A_2 = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ περιττός }, n^2 \leq 40\}$$
Να ευρεθούν τα supremum και infimum των παραπάνω συνόλων. Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

9. Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ όπου $E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$
$$A_1 = \{\{10, 15\}, \{5, 20, 25\}, \{10, 30\}, \{20, 35\}\}$$
$$A_2 = \{\{10, 20, 25\}, \{5, 10, 40\}, \{5, 10, 35\}, \{5, 10, 20, 40\}\}$$

Να ευρεθούν τα supremum και infimum των παραπάνω συνόλων. Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

10. Να γραφούν όλες οι δυνατές διαμερίσεις του $[n]$ για $n = 1, 2, 3, 4$

Λύση: Η μοναδική διαμέριση του $[1]$ είναι η $\{1\}$.

Οι 2 διαμερίσεις του $[2]$ είναι οι εξής: $\{1\}, \{2\}$ και $\{1, 2\}$.

Οι 5 διαμερίσεις του $[3]$ είναι οι εξής:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\} \quad \{1, 2\}, \{3\} \quad \{1, 3\}, \{2\} \quad \{1\}, \{2, 3\} \quad \{1, 2, 3\}$$

Υπάρχουν 15 τρόποι να διαμερίσουμε το σύνολο $[4]$:

$\{1\},\{2\},\{3\},\{\mathbf{4}\}$	$\{1,2\},\{3\},\{\mathbf{4}\}$	$\{1,3\},\{2\},\{\mathbf{4}\}$	$\{1\},\{2,3\},\{\mathbf{4}\}$
$\{1,2,3\},\{\mathbf{4}\}$	$\{1\},\{2\},\{\mathbf{3,4}\}$	$\{1,2\},\{\mathbf{3,4}\}$	$\{1\},\{\mathbf{2,4}\},\{3\}$
$\{1,3\},\{\mathbf{2,4}\}$	$\{\mathbf{1,4}\},\{2\},\{3\}$	$\{\mathbf{1,4}\},\{2,3\}$	$\{1\},\{\mathbf{2,3,4}\}$
$\{\mathbf{1,3,4}\},\{2\}$	$\{\mathbf{1,2,4}\},\{3\}$	$\{\mathbf{1,2,3,4}\}$	

11. Στο σύνολο $\mathbb{N}$ ορίζουμε μια σχέση R ως εξής:

$$xRy \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει } k \in Z \text{ ώστε } y - x = 3k.$$

Για παράδειγμα,

$$2R5, \text{ διότι } 5 - 2 = 3 \cdot 1$$

$$2R8, \text{ διότι } 8 - 2 = 3 \cdot 2$$

$$8R2, \text{ διότι } 2 - 8 = 3 \cdot (-2)$$

$$(3, 7) \notin R \text{ διότι δεν υπάρχει } k \in \mathbb{Z} \text{ ώστε } 7 - 3 = 4 = 3k.$$

α) Να δειχθεί ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N}$.

β) Να βρεθούν οι κλάσεις ισοδυναμίας των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5.

Λύση του α): Ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $x - x = 0 = 3 \cdot 0$, άρα ικανοποιείται ο ορισμός με $k = 0$, δηλαδή xRx.

Ισχύει η συμμετρική ιδιότητα. Πράγματι, αν $x, y \in \mathbb{N}$ με xRy, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε $y - x = 3k$. Επομένως, $x - y = 3(-k)$, και επειδή, $-k \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι yRx.

Ισχύει η μεταβατική ιδιότητα. Πράγματι, αν $x, y, z \in \mathbb{N}$ με xRy και yRz, τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$y - x = 3k_1 \qquad \text{και} \qquad z - y = 3k_2.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι $z - x = 3(k_1 + k_2)$ και επειδή $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, έπεται ότι xRz.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Λύση του β) για τον αριθμό 2: Η κλάση ισοδυναμίας του 2 είναι εξ ορισμού το σύνολο

$$\begin{aligned} C_2 &= \{x \in \mathbb{N} : 2Rx\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 2 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{3k + 2 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η κλάση C_5 του 5 ταυτίζεται με την C_2. Πράγματι,

$$\begin{aligned} C_5 = \{x \in \mathbb{N} : 5Rx\} &= \{x \in \mathbb{N} : x - 5 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} : x - 2 = 3(k + 1), k \in \mathbb{Z}\} = C_2 \end{aligned}$$

Το ίδιο συμβαίνει και για τις κλάσεις των στοιχείων $5, 8, 11, \ldots$ που ανήκουν στην C_2, δηλαδή $C_2 = C_5 = C_8 = C_{11} = \cdots$.