

**Ασκήσεις για την 1η απαλλακτική πρόοδο
Διαλέξεις 1,2,3**

Πρόταση 1 (Αρχή της επαγωγής). Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση με $n \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

i) Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

ii) Αν $n \Pi(k)$ είναι αληθής για κάποιο $k \geq 1$, τότε και $n \Pi(k + 1)$ είναι αληθής.

Τότε $n \Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 1. Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Λύση. Έστω $\Pi(n)$ η πρόταση $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ που θέλουμε να αποδείξουμε. Η $\Pi(1)$:

$$1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει η $\Pi(k)$, για κάποιο $k \geq 1$, δηλαδή ισχύει ότι

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι τότε ισχύει και η $\Pi(k+1)$:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Εκτελώντας τις πράξεις στο πρώτο μέλος και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η $\Pi(k)$ ισχύει, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = (k+1) \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \\ &= (k+1) \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = (k+1) \frac{(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

δηλαδή η $\Pi(k+1)$ ισχύει.

Επομένως, η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. □

Άσκηση 2. Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Λύση. Η σχέση προφανώς ισχύει για $n = 1$, αφού $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \geq 1$:

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

Τότε θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k + 1$:

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η $\Pi(k)$ ισχύει, έχουμε ότι

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4(k+1)) = \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2$$

δηλαδή η σχέση ισχύει και για $n = k + 1$.

Επομένως, η σχέση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. □

Άσκηση 3. Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad \text{όπου } n \geq 2$$

Λύση. Η σχέση ισχύει για $n = 2$, αφού $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \geq 2$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

Τότε θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

δηλαδή η σχέση ισχύει και για $n = k + 1$.

Επομένως, η σχέση ισχύει για κάθε $n \geq 2$. □

Άσκηση 4. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^*.$$

Λύση. Η σχέση προφανώς ισχύει για $n = 1$, αφού $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \geq 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

δηλαδή η σχέση ισχύει και για $n = k + 1$.

Επομένως, η σχέση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. □

Άσκηση 5. Να βρεθεί που είναι το σφάλμα στην επόμενη “επαγωγική απόδειξη”.

Πρόταση Όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιηθεί επαγωγή ως προς τον αριθμό n των τριαντάφυλλων.

Έστω η πρόταση $\Pi(n)$: “Σε κάθε σύνολο με n τριαντάφυλλα όλα έχουν το ίδιο χρώμα.”

Η $\Pi(1)$ είναι προφανώς αληθής.

Έστω ότι η $\Pi(k)$ είναι αληθής, δηλαδή σε κάθε σύνολο με k τριαντάφυλλα όλα έχουν το ίδιο χρώμα. Θα αποδειχθεί ότι και η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής.

Έστω $\{r_1, r_2, \dots, r_k, r_{k+1}\}$ είναι ένα σύνολο με $k+1$ τριαντάφυλλα. Τότε τα υποσύνολα $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ και $\{r_2, \dots, r_k, r_{k+1}\}$ περιέχουν k τριαντάφυλλα, επομένως, από την υπόθεση της επαγωγής, σε κάθε σύνολο όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα. Επειδή το r_2 ανήκει και στα δύο σύνολα, έπεται όλα τα τριαντάφυλλα έχουν το ίδιο χρώμα, άρα η $\Pi(k+1)$ είναι αληθής. □

Λύση. Το επαγωγικό βήμα από το $n = 1$ στο $n = 2$ δεν είναι έγκυρο. Πράγματι, όταν $n = 2 = 1 + 1$, δηλαδή όταν $k = 1$ τότε τα σύνολα $\{r_1, \dots, r_k\} = \{r_1\}$ και $\{r_2, \dots, r_{k+1}\} = \{r_2\}$ δεν έχουν κοινό στοιχείο το r_2 . □

Άσκηση 6. Έστω ότι για μια πρόταση $\Pi(n)$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και $\Pi(k)$ είναι αληθής, τότε και $\Pi(k + 3)$ είναι επίσης αληθής. Τι πρέπει να ισχύει έτσι ώστε $\Pi(n)$ να είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$;

Λύση. Αρκεί να είναι αληθείς οι προτάσεις $\Pi(0), \Pi(1), \Pi(2)$. Τότε θα είναι αληθείς και οι προτάσεις $P(3k), P(3k + 1), P(3k + 2)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επειδή κάθε φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$ ανήκει σε μια από τις 3 μορφές $3k, 3k + 1, 3k + 2$ έπεται ότι η πρόταση $P(n)$ θα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 2 (Αρχή της πλήρους επαγωγής). Έστω $\Pi(n)$ μια πρόταση με $n \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

i) Η $\Pi(1)$ είναι αληθής.

ii) Αν $n \in \mathbb{N}^*$ και $\Pi(k)$ είναι αληθής για κάθε $1 \leq k < n$, τότε και $\Pi(n)$ είναι αληθής.

Τότε $\Pi(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άσκηση 7. (*) Ναδειχθεί ότι μπορούμε να πληρώσουμε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο των 10 ευρώ και μεγαλύτερο ή ίσο των 40 ευρώ, χρησιμοποιώντας μόνο χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ.

Λύση. Κάθε πολλαπλάσιο των 10 ευρώ και μεγαλύτερο ή ίσο των 40 ευρώ εκφράζεται στην μορφή

$$10n, \text{ όπου } n \geq 4$$

Για $n = 4$, δηλαδή το ποσό $10 \cdot 4 = 40$ μπορεί να πληρωθεί χρησιμοποιώντας 2 χαρτονομίσματα των 20 ευρώ, οπότε η πρόταση ισχύει για $n = 4$.

Για $n = 5$, δηλαδή το ποσό $10 \cdot 5 = 50$ μπορεί να πληρωθεί χρησιμοποιώντας 1 χαρτονομίσμα των 50 ευρώ, οπότε η πρόταση ισχύει για $n = 5$.

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για κάθε k με $5 \leq k \leq n - 1$, δηλαδή μπορούμε να πληρώσουμε κάθε ποσό $10 \cdot k$, όπου $5 \leq k \leq n - 1$, χρησιμοποιώντας μόνο χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ.

Θα δείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $k = n$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$10n = 10(n - 2 + 2) = 10(n - 2) + 20$$

Επειδή $5 \leq k \leq n - 1 \Leftrightarrow 5 \leq n - 1 \Leftrightarrow 4 \leq n - 2$ οπότε $4 \leq \underbrace{n - 2}_k \leq n - 1$. Επομένως,

από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχει τρόπος να πληρώσουμε το ποσό $10(n - 2)$ χρησιμοποιώντας μόνο χαρτονομίσματα των 20 και 50 ευρώ.

Επομένως, μπορούμε να πληρώσουμε και το ποσό

$$10n = 10(n - 2) + 20$$

προσθέτοντας στην λύση της επαγωγικής υπόθεσης άλλο ένα χαρτονόμισμα των 20 ευρώ. Επομένως, ο ισχυρισμός ισχύει για το n .

Άρα, η πρόταση ισχύει για κάθε $n \geq 5$ (και άρα και για κάθε $n \geq 4$) □

Παραδείγματα

$$40 = 2 \cdot 20$$

$$50 = 1 \cdot 50$$

$$60 = 40 + 20 = 2 \cdot 20 + 20 = 3 \cdot 20$$

$$70 = 50 + 20 = 1 \cdot 50 + 20 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 50$$

$$80 = 60 + 20 = 3 \cdot 20 + 20 = 4 \cdot 20$$

$$90 = 70 + 20 = 1 \cdot 20 + 1 \cdot 50 + 20 = 2 \cdot 20 + 1 \cdot 50, \text{ κ.ο.κ.}$$

Άσκηση 8 (Ταυτότητες με σύνολα). Έστω E ένα μη κενό σύνολο και $A, B, C \subseteq E$.
 Ναδειχθεί ότι

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

(Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την διαφορά.)

Λύση. (1ος τρόπος: Με την μέθοδο των πινάκων.) Τα A, B, C είναι υποσύνολα του E . Στον επόμενο πίνακα εξετάζουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις που μπορεί να ισχύουν για κάθε στοιχείο $x \in E$. Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

A	B	C	$B \setminus C$	$A \cap (B \setminus C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Οι στήλες $A \cap (B \setminus C)$ και $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$ είναι ίδιες. Άρα, τα σύνολα αυτά έχουν τα ίδια στοιχεία του E , δηλαδή είναι ίσα.

Παρατήρηση: Οι επιπλέον στήλες που χρησιμοποιήθηκαν στην επαλήθευση ήταν βοηθητικές και μπορούν να παραλειφθούν.

(2ος τρόπος: Με τη χρήση ιδιοτήτων.) Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες των πράξεων συνόλων, έχουμε τις επόμενες ισότητες:

$$\begin{aligned}
 (A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} && X \setminus Y = X \cap \bar{Y} \\
 &= (A \cap B) \cap (\bar{A} \cup \bar{C}) && \overline{X \cap Y} = \bar{X} \cup \bar{Y} \\
 &= ((A \cap B) \cap \bar{A}) \cup ((A \cap B) \cap \bar{C}) && X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\
 &= \emptyset \cup (A \cap B \cap \bar{C}) && X \cap \bar{X} = \emptyset \\
 &= A \cap (B \cap \bar{C}) && X \cup \emptyset = X \\
 &= A \cap (B \setminus C) && X \setminus Y = X \cap \bar{Y}.
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ξεκινήσαμε τις πράξεις από το δεξιό μέλος της ισότητας, το οποίο ήταν πιο “σύνθετο” από το αριστερό μέλος, και άρα είχε περισσότερες επιλογές για εφαρμογή των ιδιοτήτων. □

Άσκηση 9 (Ταυτότητες με σύνολα). Έστω E ένα μη κενό σύνολο και $A, B \subseteq E$.
 Ναδειχθεί ότι

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}).$$

(Διαμέριση του A ως προς την τομή του με τα B και \bar{B} .)

Λύση. Θέλουμε να δείξουμε ότι $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$. Τα A, B είναι υποσύνολα του E . Πού μπορεί να ανήκει κάποιο στοιχείο $x \in E$; Σημειώνουμε 1 αν το x ανήκει στο σύνολο και 0 αλλιώς.

A	B	\bar{B}	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$	$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0

Οι στήλες των A και $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ είναι ίδιες.

Άρα, τα σύνολα A και $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ περιέχουν τα ίδια στοιχεία του E , δηλαδή είναι ίσα.

Βασικές Ιδιότητες Πράξεων

- $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap \Gamma, A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma$
- $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma), A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (De Morgan).

Μια σχέση R στο E ονομάζεται (μερική) **διάταξη** όταν ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- (i) aRa , για κάθε $a \in E$ (ανακλαστική)
- (ii) aRb και $bRa \implies a = b$, για κάθε $a, b \in E$ (αντισυμμετρική)
- (iii) aRb και $bR\gamma \implies aR\gamma$, για κάθε $a, b, \gamma \in E$ (μεταβατική).

Συνήθως η σχέση διάταξης σημειώνεται με \leq .

Η διάταξη ονομάζεται **ολική** αν ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\alpha \leq \beta \text{ ή } \beta \leq \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in E.$$

Σημαντικές μερικές διατάξεις: σχέση εγκλεισμού \subseteq στο δυναμοσύνολο του E , διάταξη γινόμενο στο $A \times B$, σχέση διαιρετότητας $|$ στο \mathbb{N} .

Άσκηση 10 (Παράδειγμα σχέσης διάταξης). Έστω R σχέση στο \mathbb{N} , με $xRy \Leftrightarrow x = y^k$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Ναδειχθεί ότι η R είναι σχέση μερικής διάταξης. Είναι η R σχέση ολικής διάταξης;

Λύση. Για κάθε $a \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $a = a^1$, όπου $1 \in \mathbb{N}^*$, άρα aRa , δηλαδή η σχέση R είναι ανακλαστική.

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με aRb και bRa . Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a = b^{k_1}$ και $b = a^{k_2}$. Αντικαθιστώντας το b έχουμε ότι $a = a^{k_1 k_2}$. Επομένως, $k_1 k_2 = 1$, οπότε $k_1 = k_2 = 1$, άρα $a = b$. Δηλαδή, η σχέση R είναι αντισυμμετρική.

Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ με aRb και bRc . Τότε υπάρχουν $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $a = b^{k_1}$ και $b = c^{k_2}$. Αντικαθιστώντας το b προκύπτει ότι $a = c^{k_1 k_2}$, όπου $k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*$, άρα aRc , δηλαδή η σχέση R είναι μεταβατική.

Επομένως, η σχέση R είναι σχέση μερικής διάταξης.

Η σχέση R δεν είναι ολική διάταξη, διότι ούτε $2R3$, ούτε $3R2$. □

Δίδεται ένα σύνολο V , στο οποίο έχουμε ορίσει μια μερική διάταξη \triangleleft . Μια **ολική** διάταξη \leq στο V ονομάζεται **γραμμική επέκταση** ή **τοπολογική διάταξη** της διάταξης \triangleleft στο V αν για κάθε $a, b \in V$ ισχύει

$$a \triangleleft b \Rightarrow a \leq b.$$

Δηλαδή η διάταξη \leq είναι “συμβατή” με την \triangleleft και την επεκτείνει σε όλα τα ζεύγη στοιχείων.

Αλγόριθμος εύρεσης τοπολογικής διάταξης

- Είσοδος: Ένα σύνολο U διατεταγμένων ζευγών (x, y) που αναπαριστούν την μερική διάταξη \triangleleft στο σύνολο V
- Έξοδος: Μια (διατεταγμένη) λίστα L των στοιχείων του V , η οποία αναπαριστά την τοπολογική διάταξη \leq .
- Όσο υπάρχουν στοιχεία του V που δεν έχουν προστεθεί στην L
 - Επιλέγουμε ένα στοιχείο $x \in V$ που δεν έχει μικρότερο στοιχείο μεταξύ των στοιχείων που δεν έχουν προστεθεί στην λίστα L (Δηλαδή το x δεν εμφανίζεται στην δεύτερη θέση κανενός ζεύγους του U .)
 - Προσθέτουμε το x στο τέλος της λίστας L .
 - Σβήνουμε όλα τα ζεύγη (x, y) του U που περιέχουν το x .

Άσκηση 11 (Τοπολογική διάταξη). Να βρεθεί η σειρά εκτέλεσης των δραστηριοτήτων $A, B, C, D, E, F, G, H, K, M$ όταν

$A < C, A < D, A < M, A < H, B < A, B < D, B < K, B < M, C < G, C < H, C < M, D < H, E < A, E < B, E < C, E < K, F < D, F < G, G < H, K < C, M < H,$

όπου $x < y$ όταν η x προηγείται της y .

Λύση. Εδώ $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, K, M\}$.

Έστω L η ζητούμενη τοπολογική διάταξη. Αρχικά $L = \square$

$U = \{(A, C), (A, D), (A, M), (A, H), (B, A), (B, D), (B, K), (B, M), (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), (E, A), (E, B), (E, C), (E, K), (F, D), (F, G), (G, H), (K, C), (M, H)\}$

Σε κάθε βήμα: Βρίσκουμε όλα τα στοιχεία $y \in V$ που δεν εμφανίζονται (ως δεύτερο στοιχείο) σε κανένα ζεύγος (x, y) του U , τα προσθέτουμε στο τέλος της L και σβήνουμε όλα τα ζεύγη (y, z) του U όπου εμφανίζεται το y (ως πρώτο στοιχείο).

1ο βήμα: $L = [E, F]$

$$U = \{(A, C), (A, D), (A, M), (A, H), (B, A), (B, D), (B, K), (B, M), (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, (G, H), (K, C), (M, H)\}$$

2ο βήμα: $L = [E, F, B]$

$$U = \{(A, C), (A, D), (A, M), (A, H), \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, (G, H), (K, C), (M, H)\}$$

3ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K]$

$$U = \{\cancel{(A, C)}, \cancel{(A, D)}, \cancel{(A, M)}, \cancel{(A, H)}, \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, (C, G), (C, H), (C, M), (D, H), \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, (G, H), \cancel{(K, C)}, (M, H)\}$$

4ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D]$

$$U = \{\cancel{(A, C)}, \cancel{(A, D)}, \cancel{(A, M)}, \cancel{(A, H)}, \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, \cancel{(C, G)}, \cancel{(C, H)}, \cancel{(C, M)}, \cancel{(D, H)}, \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, (G, H), \cancel{(K, C)}, (M, H)\}$$

5ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M]$

$$U = \{\cancel{(A, C)}, \cancel{(A, D)}, \cancel{(A, M)}, \cancel{(A, H)}, \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, \cancel{(C, G)}, \cancel{(C, H)}, \cancel{(C, M)}, \cancel{(D, H)}, \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, \cancel{(G, H)}, \cancel{(K, C)}, \cancel{(M, H)}\}$$

6ο βήμα: $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M, H]$

$$U = \{\cancel{(A, C)}, \cancel{(A, D)}, \cancel{(A, M)}, \cancel{(A, H)}, \cancel{(B, A)}, \cancel{(B, D)}, \cancel{(B, K)}, \cancel{(B, M)}, \cancel{(C, G)}, \cancel{(C, H)}, \cancel{(C, M)}, \cancel{(D, H)}, \cancel{(E, A)}, \cancel{(E, B)}, \cancel{(E, C)}, \cancel{(E, K)}, \cancel{(F, D)}, \cancel{(F, G)}, \cancel{(G, H)}, \cancel{(K, C)}, \cancel{(M, H)}\}$$

Άρα, μια τοπολογική διάταξη είναι η $L = [E, F, B, A, K, C, D, G, M, H]$. □

Παρατήρηση: Στα βήματα της προηγούμενης άσκησης είχαμε εναλλακτικές επιλογές για την σειρά των στοιχείων της L . Συγκεκριμένα στο 1ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα E, F , στο 3ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα A, K , στο 4ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για τα C, D και στο 5ο βήμα είχαμε 2 επιλογές για την σειρά των G, M . Από τις επιλογές αυτές προκύπτουν εναλλακτικές τοπολογικές διατάξεις, εδώ στο παράδειγμα υπάρχουν τουλάχιστον $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ διαφορετικές τοπολογικές διατάξεις.

Άσκηση 12 (Διάγραμμα Hasse διαιρετότητας). Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse των θετικών διαιρετών του 36 ως προς την μερική διάταξη της σχέσης διαιρετότητας.

Άσκηση 13 (Διάγραμμα Hasse ιεραρχίας δικαιωμάτων πρόσβασης). Θεωρούμε το σύνολο δικαιωμάτων:

$$R = \{Read, Write, Execute, Delete, Share, View, Edit, Upload, Download, Admin\}.$$

Ορίζουμε τη σχέση $a \leq b$ αν το δικαίωμα a περιλαμβάνεται στο b . Οι σχέσεις κάλυψης είναι:

- $Read \leq Edit, Download, Write$
- $Write \leq Edit, Upload$
- $View \leq Edit, Share$
- $Edit \leq Delete, Share$
- $Download \leq Upload$
- $Delete, Share, Upload, Download, Execute \leq Admin$

Να σχεδιασθεί το διάγραμμα Hasse της ιεραρχίας των δικαιωμάτων πρόσβασης.

Αν (E, \leq) είναι ένα διατεταγμένο σύνολο και A είναι ένα μη κενό υποσύνολό του τότε ένα στοιχείο $\alpha \in E$ (αντίστοιχα $\beta \in E$) ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) φράγμα του A όταν $x \leq \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leq x$) για κάθε $x \in A$. Όταν υπάρχει ένα τουλάχιστον άνω (αντίστοιχα κάτω) φράγμα ενός συνόλου A , τότε το σύνολο αυτό ονομάζεται **άνω** (αντίστοιχα **κάτω**) **φραγμένο** σύνολο.

Αν A είναι ένα άνω (αντίστοιχα κάτω) φραγμένο υποσύνολο του (E, \leq) τότε ένα στοιχείο $s \in E$ (αντίστοιχα $i \in E$) που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) s είναι άνω φράγμα (αντίστοιχα i είναι κάτω φράγμα).

(ii) $s \leq \alpha$ (αντίστοιχα $\beta \leq i$) για κάθε άνω φράγμα α (αντίστοιχα κάτω φράγμα β) του A ονομάζεται **supremum ή ελάχιστο άνω φράγμα** (αντίστοιχα **infimum ή μέγιστο κάτω φράγμα** πέρας) του A και σημειώνεται με $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$).

Πρέπει να τονισθεί ότι τα $\sup A$ και $\inf A$ δεν υπάρχουν πάντα για ένα σύνολο. Όταν όμως υπάρχουν είναι μοναδικά. Γενικά το $\sup A$ (αντίστοιχα $\inf A$) δεν ανήκει υποχρεωτικά στο σύνολο A . Όμως, στην περίπτωση που ανήκει ονομάζεται **μέγιστο** (αντίστοιχα **ελάχιστο**) στοιχείο του A και σημειώνεται με $\max A$ (αντίστοιχα $\min A$).

Άσκηση 14 (Φραγμένα σύνολα). Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathbb{N}^*, |)$ και

$$A_1 = \{32, 80, 160, 640\}$$

$$A_2 = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ περιττός}, n^2 \leq 40\}$$

Να ευρεθούν τα *supremum* (ελάχιστο άνω φράγμα) και *infimum* (μέγιστο κάτω φράγμα) των παραπάνω συνόλων. Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

Λύση. Ισχύει ότι

$$\sup A_1 = \text{ΕΚΠ}(32, 80, 160, 640) = 640$$

Πράγματι,

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ είναι άνω φράγμα του } A_1$$

$$\Leftrightarrow 32|n \text{ και } 80|n \text{ και } 160|n \text{ και } 640|n$$

$$\Leftrightarrow n \text{ κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του } A_1$$

Οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα του A_1 θα είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των στοιχείων του A_1 .

Επίσης,

$$\inf A_1 = \text{MK}\Delta(32, 80, 160, 640) = 16$$

Πράγματι,

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ είναι κάτω φράγμα του } A_1$$

$$\Leftrightarrow n|32 \text{ και } n|80 \text{ και } n|160 \text{ και } n|640$$

$$\Leftrightarrow n \text{ κοινός διαιρέτης των στοιχείων του } A_1$$

Οπότε το μέγιστο κάτω φράγμα του A_1 θα είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των στοιχείων του A_1 .

Επομένως το A_1 έχει μέγιστο ως προς την διάταξη $|$ αφού το $\sup A_1 = 640$ ανήκει στο A_1 , ενώ δεν έχει ελάχιστο ως προς την διάταξη $|$ αφού το $\inf A_1 = 16$ δεν ανήκει στο A_1 .

Πριν απαντήσουμε στα ίδια ερωτήματα για το A_2 πρώτα θα βρούμε τα στοιχεία του. Έχουμε ότι

$$A_2 = \{1, 3, 5\}$$

(αφού $1^2 \leq 40$, $3^2 \leq 40$, $5^2 \leq 40$, $7^2 \not\leq 40$, κ.ο.κ.)

Οπότε,

$$\sup A_2 = \text{EK}\Pi(1, 3, 5) = 15$$

$$\inf A_2 = \text{MK}\Delta(1, 3, 5) = 1$$

Επομένως, το A_2 έχει ελάχιστο και δεν έχει μέγιστο ως προς την διάταξη $|$. □

Άσκηση 15 (Φραγμένα σύνολα). Έστω το διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ όπου $E = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$ (Υπενθύμιση: $\mathcal{P}(E)$ το δυναμοσύνολο του E .)

Να ευρεθούν τα *supremum* και *infimum* των παρακάτω υποσυνόλων του E

$$A_1 = \{\{10, 15\}, \{5, 20, 25\}, \{10, 30\}, \{20, 35\}\}$$

$$A_2 = \{\{10, 20, 25\}, \{5, 10, 40\}, \{5, 10, 35\}, \{5, 10, 20, 40\}\}$$

Ποια από αυτά έχουν μέγιστο ή ελάχιστο;

Λύση. Ισχύει ότι

$$\sup A_1 = \{10, 15\} \cup \{5, 20, 25\} \cup \{10, 30\} \cup \{20, 35\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$$

Πράγματι,

$B \subseteq E$ είναι άνω φράγμα του A_1

$$\Leftrightarrow \{10, 15\} \subseteq B \text{ και } \{5, 20, 25\} \subseteq B \text{ και } \{10, 30\} \subseteq B \text{ και } \{20, 35\} \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow B \text{ υπερσύνολο των στοιχείων του } A_1$$

Οπότε το ελάχιστο άνω φράγμα του A_1 θα είναι το “μικρότερο” τέτοιο υπερσύνολο B , δηλαδή η ένωση των στοιχείων του A_1 .

$$\inf A_1 = \{10, 15\} \cap \{5, 20, 25\} \cap \{10, 30\} \cap \{20, 35\} = \emptyset$$

Πράγματι,

$B \subseteq E$ είναι κάτω φράγμα του A_1

$$\Leftrightarrow B \subseteq \{10, 15\} \text{ και } B \subseteq \{5, 20, 25\} \text{ και } B \subseteq \{10, 30\} \text{ και } B \subseteq \{20, 35\}$$

$$\Leftrightarrow B \text{ υποσύνολο των στοιχείων του } A_1$$

Οπότε το μέγιστο άνω φράγμα του A_1 θα είναι το “μεγαλύτερο” τέτοιο υποσύνολο B , δηλαδή η τομή των στοιχείων του A_1 .

Επομένως, το A_1 έχει δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο ως προς την διάταξη \subseteq .

Ομοίως,

$$\sup A_2 = \{10, 20, 25\} \cup \{5, 10, 40\} \cup \{5, 10, 35\} \cup \{5, 10, 20, 40\} = \{5, 10, 20, 25, 35, 40\}$$

$$\inf A_2 = \{10, 20, 25\} \cap \{5, 10, 40\} \cap \{5, 10, 35\} \cap \{5, 10, 20, 40\} = \{10\}.$$

Επομένως, το A_2 έχει ελάχιστο και μέγιστο ως προς την διάταξη \subseteq . \square

Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο ενός συνόλου E τότε η απεικόνιση $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση του A** και συμβολίζεται με μ_A (ή χ_A).

Άσκηση 16 (Χαρακτηριστική συνάρτηση). Να αποδειχθούν τα παρακάτω

(i) $A = B$ αν και μόνο αν $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in E$.

(ii) $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in E$.

(iii) $\mu_A(x) + \mu_{\bar{A}}(x) = 1$ για κάθε $x \in E$.

(iv) $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x), \forall x \in E$.

(v) $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \forall x \in E$.

(Υπόδειξη: Διακρίνετε περιπτώσεις για το $x \in E$)

Λύση της (iv). Έστω $x \in E$. Διακρίνουμε τις παρακάτω 4 περιπτώσεις για το x .

- $x \in A, x \in B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \in A \cap B$.

Οπότε $\mu_{A \cup B}(x) = 1, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \max\{1, 1\} = 1$ και $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x) = 1 + 1 - 1 = 1$.

- $x \in A, x \notin B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.

Οπότε $\mu_{A \cup B}(x) = 1, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \max\{1, 0\} = 1$ και $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x) = 1 + 0 - 0 = 1$.

- $x \notin A, x \in B$. Τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.

Οπότε $\mu_{A \cup B}(x) = 1, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \max\{0, 1\} = 1$ και $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x) = 0 + 1 - 0 = 1$.

- $x \notin A, x \notin B$. Τότε $x \notin A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.

Οπότε $\mu_{A \cup B}(x) = 0, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \max\{0, 0\} = 0$ και $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x) = 0 + 0 - 0 = 0$.

Επομένως, η σχέση $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_{A \cap B}(x)$ ισχύει για κάθε $x \in E$. □

Άσκηση 17 (Παραδείγματα με χαρακτηριστική συνάρτηση). Γράψτε ένα πρόγραμμα σε Python που χρησιμοποιεί μια χαρακτηριστική συνάρτηση για να αναγνωρίζει ιδιωτικές διευθύνσεις IP. Η χαρακτηριστική συνάρτηση θα πρέπει να επιστρέφει 1 αν η διεύθυνση IP είναι ιδιωτική και 0 διαφορετικά. Χρησιμοποιήστε τους παρακάτω κανόνες για τα ιδιωτικά εύρη διευθύνσεων IP:

- 10.0.0.0 - 10.255.255.255
- 172.16.0.0 - 172.31.255.255
- 192.168.0.0 - 192.168.255.255

i) Υλοποιήστε τη χαρακτηριστική συνάρτηση.

ii) Εφαρμόστε τη σε μια λίστα διευθύνσεων IP για να κρατήσετε μόνο τις ιδιωτικές.

iii) Χρησιμοποιήστε ένα λεξικό όπου τα κλειδιά είναι ονόματα διακομιστών και οι τιμές είναι διευθύνσεις IP. Διαχωρίστε τους διακομιστές σε δύο ομάδες: αυτούς με ιδιωτικές IP και αυτούς με δημόσιες IP.

```
def is_internal_ip(ip):
    """
    Characteristic function to check if an IP address is private (internal).
    """
    private_ranges = [
        (10, 10), # 10.0.0.0 – 10.255.255.255
        (172, 172, 16, 31), # 172.16.0.0 – 172.31.255.255
        (192, 192, 168, 168), # 192.168.0.0 – 192.168.255.255
    ]

    octets = list(map(int, ip.split('.')))
    if len(octets) != 4:
        return 0 # Invalid IP address

    for range_ in private_ranges:
        if len(range_) == 2 and range_[0] <= octets[0] <= range_[1]:
            return 1
        if len(range_) == 4 and range_[0] <= octets[0] <= range_[1] and range_[2] <= octets[1] <= range_[3]:
            return 1

    return 0

# List of IP addresses
ip_addresses = [
    "10.0.0.1", "172.16.5.4", "192.168.1.100",
    "8.8.8.8", "172.32.0.1", "192.169.0.1",
]
```



```
# Apply the characteristic function to filter private IPs
internal_ips = [ip for ip in ip_addresses if is_internal_ip(ip)]

print("Internal IP addresses:")
print(internal_ips)

# Example dataset with IPs and categories
data = {
    "Server1": "10.0.0.1",
    "Server2": "192.168.2.15",
    "Public1": "8.8.8.8",
    "Server3": "172.20.10.5",
    "Public2": "172.32.1.2",
}

# Separate internal and public IPs
internal_servers = {key: value for key, value in data.items() if is_internal_ip(value)}
public_servers = {key: value for key, value in data.items() if not is_internal_ip(value)}

print("Internal Servers:")
print(internal_servers)

print("Public Servers:")
print(public_servers)
```

Output:

```
Internal IP addresses:
['10.0.0.1', '172.16.5.4', '192.168.1.100']
Internal Servers:
{'Server1': '10.0.0.1', 'Server2': '192.168.2.15', 'Server3': '172.20.10.5'}
Public Servers:
{'Public1': '8.8.8.8', 'Public2': '172.32.1.2'}
```

Άσκηση 18 (Παραδείγματα με χαρακτηριστική συνάρτηση). Γράψτε ένα πρόγραμμα σε Python που να χρησιμοποιεί μια “χαρακτηριστική συνάρτηση” για να ελέγχει αν ένα password είναι ασφαλές ή όχι. Χρησιμοποιείστε την συνάρτηση για να φιλτράρετε μια λίστα από password.

```
def is_secure_password(password):  
    """  
    Characteristic function to check if a password is secure.  
    Returns 1 if secure, 0 otherwise.  
    """  
    if len(password) < 8:  
        return 0  
    if not any(char.isupper() for char in password):  
        return 0  
    if not any(char.isdigit() for char in password):  
        return 0  
    if not any(char in "!@#$%&*()" for char in password):  
        return 0  
    return 1  
  
# List of passwords  
passwords = [  
    "123456", "Password123!", "letmein", "Admin@2023",  
    "qwerty!", "Secure#2022", "Short1!"  
]  
  
# Separate secure and insecure passwords  
secure_passwords = [pw for pw in passwords if is_secure_password(pw)]  
insecure_passwords = [pw for pw in passwords if not is_secure_password(pw)]  
  
print("Secure passwords:")  
print(secure_passwords)  
  
print("Insecure passwords:")  
print(insecure_passwords)
```

Output:

```
Secure passwords:  
['Password123!', 'Admin@2023', 'Secure#2022']  
Insecure passwords:  
['123456', 'letmein', 'qwerty!', 'Short1!']
```

Άσκηση 19 (Παραδείγματα με χαρακτηριστική συνάρτηση). Σε μια εφαρμογή συστήματος προτάσεων, κάθε χρήστης επιλέγει ταινίες από διάφορες κατηγορίες. Δίνεται ένα σύνολο κατηγοριών C και μια λίστα προτιμήσεων χρηστών. Γράψτε μια χαρακτηριστική συνάρτηση που ελέγχει αν μια κατηγορία ταινιών ανήκει στις προτιμήσεις ενός χρήστη.

- Το σύνολο όλων των κατηγοριών C είναι {"Action", "Comedy", "Drama", "Horror", "Sci-Fi", "Classic"}.
 - Κάθε χρήστης επιλέγει ένα υποσύνολο από τις κατηγορίες.
 - Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\mu_U : C \rightarrow \{0, 1\}$ επιστρέφει 1 αν μια κατηγορία ανήκει στις προτιμήσεις του χρήστη U και 0 διαφορετικά.
- i) Υλοποιήστε τη χαρακτηριστική συνάρτηση για να φιλτράρετε τις κατηγορίες.
- ii) Εφαρμόστε τη σε ένα σύνολο δεδομένων χρηστών για να βρείτε κοινές ή μοναδικές προτιμήσεις.

```
def characteristic_function(category, user_set):  
    """  
    Characteristic function for user preferences.  
    Returns 1 if the category is in the user's preferences, 0 otherwise.  
    """  
    return 1 if category in user_set else 0  
  
# List of categories  
categories = ["Action", "Comedy", "Drama", "Horror", "Sci-Fi", "Classic"]  
  
# User preferences  
user_preferences = {  
    "User1": {"Action", "Comedy", "Sci-Fi"},  
    "User2": {"Action", "Drama", "Horror"},  
    "User3": {"Action", "Drama", "Horror"},  
    "User4": {"Action", "Classic"}  
}  
  
# Find common categories across all users  
common_categories = [  
    category for category in categories  
    if all(characteristic_function(category, prefs) for prefs in user_preferences.values())  
]  
  
# Find unique categories per user  
unique_categories = {  
    user: [  
        category for category in categories  
        if characteristic_function(category, prefs)  
        and not any(  

```

```
        characteristic_function(category, other_prefs) for other_user, other_prefs in
user_preferences.items() if other_user != user
    )
]
for user, prefs in user_preferences.items()
}

print("Common categories:", common_categories)
print("Unique categories per user:", unique_categories)
```

Output:

```
Common categories: ['Action']
```

```
Unique categories per user: {'User1': ['Comedy', 'Sci-Fi'], 'User2': [], 'User3': [], '
User4': ['Classic']}
```

(i) Μια απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ ονομάζεται 1-1 όταν δύο οποιαδήποτε διαφορετικά πρότυπα έχουν διαφορετικές εικόνες, δηλαδή

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2),$$

Ισοδύναμα για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

(ii) Μια απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ ονομάζεται **επί** όταν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A , δηλαδή όταν $B = R(f)$.

(iii) Μια απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ ονομάζεται **αμφιμονοσήμαντη** όταν είναι 1-1 και επί.

Άσκηση 20 (Συναρτήσεις 1-1, επί, αμφιμονοσήμαντες). Σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ είναι 1-1, επί, ή αμφιμονοσήμαντη;

(i) $A = [0, 1]$, $B = [5, 9]$ και $f(x) = 3x + 5$.

(ii) $A = [0, 1]$, $B = [5, 9]$ και $f(x) = 3x + 5$.

(iii) $A = [-2, 2]$, $B = [0, 4]$ και $f(x) = x^2$.

(iv) $A = [0, 2]$, $B = [\frac{1}{3}, 1]$ και $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Λύση. (i) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0, 1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι 1-1.

Έστω $y \in B = [5, 9]$ με $f(x) = y$ τότε

$$5 \leq y \leq 9 \Leftrightarrow 5 \leq 3x + 5 \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $y \in B$ τα οποία δεν είναι εικόνα κανενός προτύπου του A δηλαδή η f δεν είναι επί. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει $x \in A$

ώστε $f(x) = 9$. Πράγματι, $f(x) = 9 \Leftrightarrow 3x + 5 = 9 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \notin A$.

Η f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

(ii) (Όμοιο με το (i)) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0, 1]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι 1-1.

Έστω $y \in B = [5, 8]$ με $f(x) = y$ τότε

$$5 \leq y \leq 8 \Leftrightarrow 5 \leq 3x + 5 \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [5, 8]$ υπάρχει $x \in [0, 1]$ ώστε $f(x) = y$.

Πράγματι, από την εξίσωση $y = 3x + 5$ προκύπτει ότι $x = \frac{y-5}{3}$.

Άρα, η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iii) Έστω $x_1, x_2 \in A = [-2, 2]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

Επομένως, αν $x_2 = -x_1$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$ δηλαδή η f δεν είναι 1-1.

Εναλλακτικά, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(1) = f(-1) = 1$, οπότε η f δεν είναι 1-1.

Έστω $y \in B = [0, 4]$ με $f(x) = y$ τότε

$$0 \leq y \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [0, 4]$ υπάρχει $x \in [-2, 2]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = x^2$ προκύπτει ότι $x = \pm \sqrt{y}$.

Η f δεν είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iv) Έστω $x_1, x_2 \in A = [0, 2]$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε

$$\frac{1}{x_1 + 1} = \frac{1}{x_2 + 1} \Leftrightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η f είναι 1-1.

Έστω $y \in B = [\frac{1}{3}, 1]$ με $f(x) = y$ τότε

$$\frac{1}{3} \leq y \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

Επομένως, η f είναι επί αφού για κάθε $y \in [\frac{1}{3}, 1]$ υπάρχει $x \in [0, 2]$ ώστε $f(x) = y$. Πράγματι, από την εξίσωση $y = \frac{1}{x+1}$ προκύπτει ότι $x = \frac{1}{y} - 1$.

Η f είναι αμφιμονοσήμαντη. □

Άσκηση 21. Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f(x) = x^2 + x + 1/\mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα.

Λύση. Ο ισχυρισμός είναι λάθος. Είναι

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = y^2 + y + 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y) + x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0 \end{aligned}$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε x, y τέτοια ώστε $x \neq y$ και $x + y = -1$, π.χ. $x = 0$ και $y = -1$, τότε $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$ και $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$. □

Άσκηση 22. Να εξετασθεί αν η απεικόνιση $f : A \rightarrow B$, με $A = [1, 2]$ και $B = [7, 10]$ και τύπο $f(x) = 2x + 5$ είναι επί.

Λύση. Ο ισχυρισμός είναι λάθος. Είναι

$$x \in A \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow 7 \leq 2x + 5 \leq 9 \Rightarrow 7 \leq f(x) \leq 9$$

Άρα, αν $y \in B$, με $y > 9$, τότε δεν υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. \square

Άσκηση 23. Δίνονται τα σύνολα $A = \{2^3, 2^4, 2^5, \dots\}$ και $B = \{4^6, 4^8, 4^{10}, \dots\}$. Να δοθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : A \rightarrow B$.

Λύση. Απεικονίζουμε το τυχαίο στοιχείο 2^n , $n \in \mathbb{N}^*$, του A στο 4^{2n} , δηλαδή ορίζουμε $f(2^n) = 4^{2n}$.

Επειδή $4^{2n} = (2^2)^{2n} = 2^{4n} = (2^n)^4$, η f ορίζεται ισοδύναμα από τον τύπο $f(x) = x^4$.

Το τυχαίο στοιχείο y του B είναι της μορφής $y = 4^{2n}$. Το στοιχείο αυτό είναι εικόνα του $x = 2^n \in A$, άρα η f είναι επί. Επιπλέον, η f είναι και ένα προς ένα, διότι το x είναι το μοναδικό πρότυπο για το y . Πράγματι, αν υπάρχει και άλλο πρότυπο $x' = 2^m$ με $f(x') = y$, τότε

$$y = 4^{2n} = f(x') = f(2^m) = 4^{2m} \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m \Rightarrow x = x'. \quad \square$$

Άρα η f είναι και ένα προς ένα.

Αν $f : A \rightarrow B$ είναι μια απεικόνιση και $\Gamma \subseteq A, \Delta \subseteq B$ τότε τα σύνολα

$$f(\Gamma) = \{y \in B : \text{υπάρχει } x \in \Gamma \text{ με } y = f(x)\} = \{f(x) : x \in \Gamma\}$$

και

$$f^{-1}(\Delta) = \{x \in A : f(x) \in \Delta\}$$

ονομάζονται αντίστοιχα **εικόνα** του Γ και **αντίστροφη εικόνα** του Δ .

Άσκηση 24 (Εικόνες συνόλων). Έστω $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = [7], B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = \{0\} \cup [12]$ και $f : A \rightarrow B$ με

$$f(x) = (x - 5)(x - 4).$$

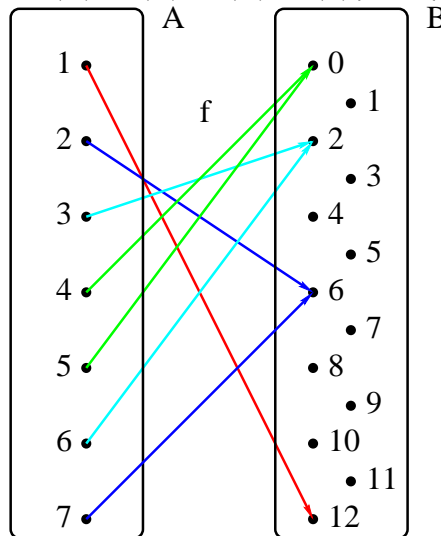
Να βρεθούν τα σύνολα

i) $f(A), f(\{3, 4\}), f(\emptyset), f(\{1, 2, 6\}),$

ii) $f^{-1}(B), f^{-1}(\{2\}), f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{0, 2\}), f^{-1}(\{12\}), f^{-1}(\{9\}), f^{-1}(\{4, 5, 6\}).$

Λύση. Ισχύει ότι

i) $f(A) = \{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7)\} = \{12, 6, 2, 0, 0, 2, 6\} = \{0, 2, 6, 12\}.$



$$f(\{3, 4\}) = \{f(3), f(4)\} = \{2, 0\}.$$

$$f(\emptyset) = \emptyset.$$

$$f(\{1, 2, 6\}) = \{f(1), f(2), f(6)\} = \{12, 6, 2\}.$$

ii) $f^{-1}(B) = A.$

$$f^{-1}(\{2\}) = \{3, 6\}, \text{ διότι } f(3) = f(6) = 2 \text{ και } f(x) \neq 2 \text{ για κάθε } x \in A \text{ με } x \neq 3, 6.$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{4, 5\}, \text{ διότι } f(4) = f(5) = 0 \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in A \text{ με } x \neq 4, 5.$$

$$f^{-1}(\{0, 2\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{2\}) = \{3, 6\} \cup \{4, 5\} = \{3, 4, 5, 6\}.$$

$$f^{-1}(\{12\}) = \{1\}, \text{ διότι } f(1) = 12 \text{ και } f(x) \neq 12 \text{ για κάθε } x \in A \text{ με } x \neq 1.$$

$$f^{-1}(\{9\}) = \emptyset, \text{ διότι } f(x) \neq 9 \text{ για κάθε } x \in A.$$

$$f^{-1}(\{4, 5, 6\}) = f^{-1}(\{4\}) \cup f^{-1}(\{5\}) \cup f^{-1}(\{6\}) = \emptyset \cup \emptyset \cup \{2, 7\} = \{2, 7\}. \quad \square$$

Άσκηση 25 (Εικόνες συνόλων). Έστω η απεικόνιση $f : \text{Employees} \rightarrow \text{Departments}$ που αντιστοιχίζει εργαζομένους στα τμήματα όπου εργάζονται. Για παράδειγμα:

$$f(\text{Alice}) = \text{HR}, \quad f(\text{Bob}) = \text{Engineering}, \quad f(\text{Carol}) = \text{HR}.$$

α) Ποια είναι η ερμηνεία του συνόλου $f(\text{Employees})$;

Η εικόνα $f(\text{Employees})$ είναι το σύνολο των τμημάτων που έχουν τουλάχιστον έναν εργαζόμενο. Για παράδειγμα:

$$f(\text{Employees}) = \{\text{HR}, \text{Engineering}\}.$$

β) Για ένα συγκεκριμένο τμήμα d , ποιο είναι το σύνολο $f^{-1}(\{d\})$;

Για ένα συγκεκριμένο τμήμα d , η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{d\})$ είναι το σύνολο των εργαζομένων σε αυτό το τμήμα. Για παράδειγμα:

- $f^{-1}(\{\text{HR}\}) = \{\text{Alice}, \text{Carol}\}$
- $f^{-1}(\{\text{Engineering}\}) = \{\text{Bob}\}$

Άσκηση 26 (Εικόνες συνόλων). Έστω $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ η απεικόνιση που ορίζεται από τον τύπο

$$h(x) = \text{το υπόλοιπο της διαίρεσης του } x \text{ δια του } 4$$

Για παράδειγμα, η εικόνα του $A = \{14, 21, 35, 41\}$ είναι το σύνολο $h(A) = \{h(14), h(21), h(35), h(41)\} = \{2, 1, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}$.

α) Να βρεθούν οι πιθανές έξοδοι της h .

Οι πιθανές έξοδοι της h είναι το σύνολο των πιθανών υπολοίπων $\{0, 1, 2, 3\}$ της διαίρεσης ενός φυσικού x δια του 4.

β) Τι συμπεραίνετε αν για κάποιο σύνολο φυσικών A ισχύει ότι $0 \notin h(A)$;

Αν σε ένα σύνολο A υπάρχουν πολλαπλάσια του 4 τότε το $h(A)$ περιέχει το στοιχείο 0 (η h ανιχνεύει αυτά τα πολλαπλάσια), επομένως, συμπεραίνουμε ότι το A δεν περιέχει κανένα πολλαπλάσιο του 4.

γ) Να βρεθεί η αντίστροφη εικόνα του $\{2\}$.

$$h^{-1}(2) = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, \dots\} = \{4k + 2 : k \in \mathbb{N}\}$$

Άσκηση 27 (Εικόνες συνόλων). Έστω ένας firewall που διαθέτει μια συνάρτηση $f : IP\ Addresses \rightarrow \{Allowed, Blocked\}$ η οποία αποθηκεύει αν για μια διεύθυνση IP έχει επιτραπεί ή όχι η σύνδεση με κάποιο κόμβο του δικτύου.

Η εικόνα της f είναι το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων της συνάρτησης $\{Allowed, Blocked\}$.

Τι ερμηνεία έχει η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{Blocked\})$;

Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{Blocked\})$ είναι το σύνολο των διευθύνσεων IP που έχουν αποκλειστεί.

Άσκηση 28 (Εικόνες συνόλων). Μια συνάρτηση $q : Queries \rightarrow \mathcal{P}(Documents)$ αντιστοιχίζει κάθε ερώτημα αναζήτησης στο σύνολο εγγράφων που περιέχουν τις λέξεις-κλειδιά του.

Για ένα συγκεκριμένο σύνολο εγγράφων D , τι ερμηνεία έχει η αντίστροφη εικόνα $q^{-1}(D)$;

Η αντίστροφη εικόνα $q^{-1}(D)$ είναι το σύνολο ερωτημάτων που οδηγούν στα έγγραφα αυτά.