ΠΜΣ "ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ"

(ΠΛΗ2, 7^{ος} κύκλος, 1^{ο} εξάμηνο, 2024)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κ. ΜΑΝΕΣ - Ι. ΤΑΣΟΥΛΑΣ

Σημειώσεις διαλέξεων 7

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία συνδυαστικής

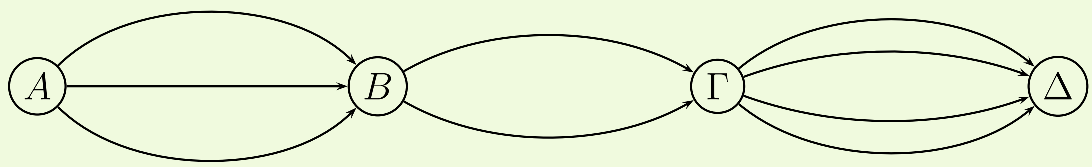
2.1 Βασικές αρχές απαρίθμησης

- Κανόνας γινομένου ή πολλαπλασιαστική αρχή
- Κανόνας αθροισματος
- Κανόνας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης

Πολλαπλασιαστική αρχή ή
Κανόνας γινομένου

Αν ένα αντικείμενο A μπορεί να επιλεγεί κατά m τρόπους και ένα αντικείμενο B κατά n τρόπους τότε και τα δύο μαζί μπορούν να επιλεγούν κατά $m \cdot n$ τρόπους.

Παράδειγμα 1. *Αν από την πόλη A στην πόλη B υπάρχουν 3 διαφορετικοί δρόμοι, από την B στη Γ 2 δρόμοι και από τη Γ στη Δ 4 δρόμοι, πόσες διαδρομές υπάρχουν από την πόλη A στη Δ μέσω των πόλεων B και Γ;*



Απάντηση. Υπάρχουν $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ διαδρομές. □

Ο κανόνας του γινομένου διατυπώνεται σαφέστερα στη γλώσσα των συνόλων:

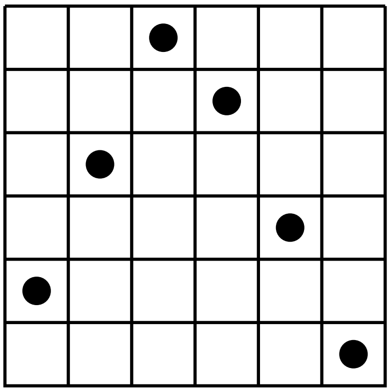
- Αν $|A|$[α΄] $= m$ και $|B| = n$ τότε $|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n$.
- Αν $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, $\ldots$, $|A_k| = n_k$,
  τότε $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

[α΄] $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του A = ο αριθμός των στοιχείων του A.

Παράδειγμα 2. *Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 6 πιόνια στα τετράγωνα μιας 6×6 σκακιέρας ώστε να μην υπάρχουν δύο ή περισσότερα πιόνια στην ίδια γραμμή ή στήλη.*

Λύση.

1 εκλογή $\longrightarrow$
2 εκλογή $\longrightarrow$
3 εκλογή $\longrightarrow$
4 εκλογή $\longrightarrow$
5 εκλογή $\longrightarrow$
6 εκλογή $\longrightarrow$



Το πρώτο πιόνι τοποθετείται στην πρώτη γραμμή με 6 διαφορετικούς τρόπους. Για το δεύτερο πιόνι υπάρχουν 5 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρείται το τετράγωνο της δεύτερης γραμμής στην στήλη του οποίου έχουμε βάλει στην πρώτη γραμμή το πρώτο πιόνι). Για το τρίτο πιόνι υπάρχουν 4 διαφορετικοί τρόποι (εξαιρούνται τα τετράγωνα της τρίτης γραμμής στις στήλες των οποίων έχουμε ήδη βάλει τα δυο προηγούμενα πιόνια). Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο (βλέπε προηγούμενο σχήμα) για το τέταρτο πιόνι υπάρχουν 3 τρόποι, για το πέμπτο 2 τρόποι και για το έκτο ένας μόνο τρόπος τοποθέτησής του.

Έτσι σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή για να τοποθετήσουμε και τα 6 πιόνια στην σκακιέρα θα υπάρχουν

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ τρόποι.}$$

□

Συχνά, σε προβλήματα απαρίθμησης, όταν διαμερίζουμε ένα πρόβλημα σε περιπτώσεις, χρησιμοποιείται και ο κανόνας του αθροίσματος,

Κανόνας αθροίσματος:

- Αν $|A| = m$ και $|B| = n$ με $A \cap B = \emptyset$ (δηλαδή A, B ξένα) τότε $|A \cup B| = |A| + |B| = m + n$.
- Αν $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, ..., $|A_k| = n_k$ όπου τα A_i, A_j είναι ξένα όταν $i \neq j$ τότε $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Παράδειγμα 3. *Ένα εστιατόριο έχει δύο κατηγορίες από μενού: Μενού για χορτοφάγους που αποτελείται από 3 κυρίως πιάτα και μενού για κρεατοφάγους που περιέχει 7 κυρίως πιάτα, ενώ υπάρχουν 4 είδη σαλάτας κοινά και για δύο μενού, εκ των οποίων το ένα είναι μόνο για κρεατοφάγους. Να υπολογισθεί ο αριθμός των διαφορετικών γευμάτων που αποτελούνται από 1 κυρίως πιάτο και 1 σαλάτα.*

Λύση. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για γεύματα: Χορτοφαγικά και Κρεατοφαγικά.

Από τον κανόνα του γινομένου, ο αριθμός των χορτοφαγικών γευμάτων είναι $3 \cdot 3 = 9$, ενώ ο αριθμός των κρεατοφαγικών γευμάτων είναι $7 \cdot 4 = 28$.

Άρα, συνολικά, από τον κανόνα του αθροίσματος υπάρχουν $9 + 28 = 37$ διαφορετικά γεύματα με 1 κυρίως πιάτο και 1 σαλάτα.

Κανόνας της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης:

- Έστω A, B **πεπερασμένα** σύνολα. Αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση f από το A στο B τότε $|A| = |B|$.

Πρακτικά, ο κανόνας της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης διατυπώνεται ως εξής:

- Αν σε κάθε αντικείμενο ενός συνόλου A μπορεί να αντιστοιχηθεί ένα και μοναδικό αντικείμενο ενός συνόλου B και αντιστρόφως, τότε τα δύο σύνολα έχουν ίσο πλήθος στοιχείων.

2.2 Διατάξεις ή Λίστες ή Διανύσματα

Έστω E ένα σύνολο με n στοιχεία, δηλαδή $|E| = n$. (**Παρατήρηση:** $|E|$ ονομάζεται **πληθάριθμος** ή **πληθικός αριθμός** του E).

Κάθε διατεταγμένη m-άδα $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ με $a_i \in E$ για κάθε $i \in [m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ ονομάζεται **διάταξη των n στοιχείων ανά m** (m-permutation of n elements).

Αν τα στοιχεία μιας διάταξης είναι διαφορετικά (δηλαδή $a_i \neq a_j$ για κάθε $i, j \in [m]$ με $i \neq j$) τότε αυτή ονομάζεται **απλή διάταξη** (ή **διάταξη**) ενώ αν τα στοιχεία της δεν είναι κατ᾽ ανάγκη διαφορετικά τότε αυτή ονομάζεται **επαναληπτική διάταξη** ή **διάταξη με επανάληψη**.

Αν $n = m$, τότε η διάταξη n ανά n ονομάζεται **μετάθεση** n στοιχείων.

Μια επαναληπτική μετάθεση στην οποία εμφανίζονται k διαφορετικά στοιχεία ονομάζεται **μετάθεση k ειδών στοιχείων**.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 4. *Αν $n = 4$, $m = 2$ και $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, τότε οι διατάξεις των 4 ανά δύο είναι :*

$$(\alpha,\beta),\ (\alpha,\gamma),\ (\alpha,\delta),\ (\beta,\gamma),\ (\beta,\delta),\ (\gamma,\delta),$$
$$(\beta,\alpha),\ (\gamma,\alpha),\ (\delta,\alpha),\ (\gamma,\beta),\ (\delta,\beta),\ (\delta,\gamma),$$

ενώ οι διατάξεις με επανάληψη των 4 ανά 2 είναι οι **προηγούμενες** *και* **επιπλέον** *οι:*

$$(\alpha,\alpha),\ (\beta,\beta),\ (\gamma,\gamma),\ (\delta,\delta).$$

Παράδειγμα 5. *Οι μεταθέσεις των 3 στοιχείων είναι :*

$$(\alpha,\beta,\gamma),\ (\alpha,\gamma,\beta),\ (\beta,\alpha,\gamma),$$
$$(\beta,\gamma,\alpha),\ (\gamma,\alpha,\beta),\ (\gamma,\beta,\alpha).$$

Παράδειγμα 6. *Οι μεταθέσεις 3 ειδών όπου το α εμφανίζεται 2 φορές και τα β, γ από μία φορά είναι:*

$$(\alpha,\alpha,\beta,\gamma),\ (\alpha,\alpha,\gamma,\beta),\ (\alpha,\beta,\alpha,\gamma),\ (\alpha,\beta,\gamma,\alpha),$$
$$(\alpha,\gamma,\alpha,\beta),\ (\alpha,\gamma,\beta,\alpha)\ (\beta,\alpha,\alpha,\gamma),\ (\beta,\alpha,\gamma,\alpha)$$
$$(\beta,\gamma,\alpha,\alpha),\ (\gamma,\alpha,\alpha,\beta),\ (\gamma,\alpha,\beta,\alpha),\ (\gamma,\beta,\alpha,\alpha).$$

2.2.1 Αριθμός διατάξεων n στοιχείων ανά m

Αριθμός διατάξεων $P(n,m)$ ή A_n^m
n στοιχείων ανά m

$$P(n,m) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}_{m \text{ όροι}}$$
$$= \frac{n!}{(n-m)!}$$

όπου $n!$ (n **παραγοντικό**) ισούται με

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n, \text{ όταν } n \geq 1$$

και

$$0! = 1$$

Απόδειξη. Έστω E ένα σύνολο με n στοιχεία. Κάθε διάταξη των n στοιχείων του E ανα m είναι μια m-αδα $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ με $a_i \in E$ για κάθε $i \in [m]$.

Για το a_1 υπάρχουν n επιλογές. ($a_1 \in E$))
Για το a_2 υπάρχουν $n-1$ επιλογές. ($a_2 \in E \setminus \{a_1\}$)
Για το a_3 υπάρχουν $n-2$ επιλογές. ($a_2 \in E \setminus \{a_1, a_2\}$)
$\vdots$
Για το a_i υπάρχουν $n-i+1$ επιλογές. ($a_i \in E \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}$)
$\vdots$
Για το a_m υπάρχουν $n-m+1$ επιλογές. ($a_m \in E \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$)
Άρα, από τον κανόνα του γινομένου, συνολικά υπάρχουν

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)}_{m \text{ όροι}}$$

διαφορετικές διατάξεις. $\square$

Παράδειγμα 7. $P(15,4) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = \dfrac{15!}{11!} = 32700.$

2.2.2 Αριθμός μεταθέσεων n στοιχείων

Αριθμός μεταθέσεων n στοιχείων

$$P_n = n!$$

Παράδειγμα 8. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

2.2.3 Αριθμός επαναληπτικών διατάξεων n στοιχεών ανά m

Αριθμός επαναληπτικών διατάξεων
n στοιχείων ανά m

$$U(n,m) = n^m$$

2.2.4 Αναγωγική εξίσωση διατάξεων

Αναγωγική εξίσωση διατάξεων

$$P(n,m) = P(n-1,m) + mP(n-1,m-1)$$

όπου $P(n,0) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 9. *Δεδομένου ότι*

$$P(5,3) = 60 \text{ και } P(5,2) = 20$$

τότε

$$P(6,3) = P(5,3) + 3P(5,2) = 120$$

Παράδειγμα 10. *Από μια κληρωτίδα που περιέχει 100 λαχνούς αριθμημένους από το 1 μέχρι το 100 κληρώνονται διαδοχικά 5 λαχνοί, χωρίς μετα από κάθε κλήρωση να επανατοποθετούνται στη κληρωτίδα. Ο πρώτος λαχνός που κληρώνεται κερδίζει 10.000 ευρώ, ο δεύτερος 5.000 ευρώ, ο τρίτος 3.000 ευρώ, ο τέταρτος 2.000 ευρώ και ο πέμπτος 1.000 ευρώ. Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων της κλήρωσης.*

Λύση. Για τον υπολογισμό των δυνατών αποτελεσμάτων παρατηρούμε ότι η σειρά με την οποία εξάγονται οι αριθμοί είναι σημαντική λόγω του διαφορετικού ποσού που κερδίζεται σε κάθε κλήρωση. Έτσι ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με τον αριθμό των διατάξεων των 100 ανά 5 δηλαδή

$$\begin{aligned} P(100,5) &= \frac{100!}{(100-5)!} \\ &= 96 \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \\ &= 9034502400 \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 11. *Πόσους τετραψήφιους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

(i) όταν όλα τα ψηφία τους είναι διαφορετικά.

(ii) όταν τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται.

Επειδή στην κατασκευή των αριθμών αυτών παίζει ρόλο η σειρά των ψηφίων τους, πρόκειται για διατάξεις στο (i) και για επαναληπτικές διατάξεις στο (ii) των 7 ανά 4. Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε:

(i) $P(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 840$ *φυσικούς αριθμούς με διαφορετικά ψηφία.*

(ii) $U(7,4) = 7^4 = 2401$ *φυσικούς αριθμούς με ψηφία που μπορεί να επαναλαμβάνονται.*

(iii) όταν πρέπει να είναι περιττοί και τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται.

Επειδή θέλουμε οι αριθμοί που κατασκευάζουμε να είναι περιττοί θα υπάρχουν 4 διαφορετικές επιλογές για το τελευταίο ψηφίο τους (1 ή 3 ή 5 ή 7).

Για τα υπόλοιπα 3 ψηφία τους υπάρχουν 7 επιλογές (διότι τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται). Έτσι εδώ μπορούμε να κατασκευάσουμε $4 \cdot 7^3 = 1372$ *τέτοιους αριθμούς.*

(iv) *όταν το άθροισμα του δεύτερου και τέταρτου ψηφίου τους είναι ίσο με 9 και τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά.*

Έστω $xyzw$ *ένας τέτοιος αριθμός. Πρέπει να ισχύει* $y + w = 9$ *οπότε υπάρχουν 6 επιλογές για το ζευγάρι* (y, w):

$$(2,7), (7,2), (3,6), (6,3), (4,5) \text{ και } (5,4)$$

Αφού έχουμε διαλέξει το ζευγάρι (y, w) *το ζευγάρι* (x, y) *θα επιλέγεται μεταξύ των διατάξεων του συνόλου* $[7] \setminus \{y, w\}$, *δηλαδή θα επιλέγεται με* $P(5, 2)$ *τρόπους.*

Άρα σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, μπορούμε να κατασκευάσουμε $6 \cdot P(5,2) = 6\frac{5!}{(5-2)!} = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ *διαφορετικούς αριθμούς.*

2.3 Συνδυασμοί ή Υποσύνολα

Έστω ένα σύνολο E με $|E| = n$.

Κάθε σύνολο που αποτελείται από m στοιχεία του E ονομάζεται **συνδυασμός των n στοιχείων ανά m** (m-combination of n elements).

Αν τα στοιχεία ενός συνδυασμού είναι διαφορετικά τότε αυτός ονομάζεται **απλός συνδυασμός** (ή **συνδυασμός**) ενώ αν τα στοιχεία του δεν είναι κατ᾽ ανάγκη διαφορετικά τότε αυτός ονομάζεται **επαναληπτικός συνδυασμός** ή **συνδυασμός με επανάληψη**.

Κάθε απλός συνδυασμός των n στοιχείων του E ανά m είναι ένα υποσύνολο του E με m στοιχεία.

Η διαφορά συνδυασμών και διατάξεων είναι ότι στους συνδυασμούς δεν παίζει ρόλο η σειρά των στοιχείων.

Παράδειγμα 12. *Αν $n = 5$ και $m = 2$, έστω $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$.*

Τότε οι συνδυασμοί των 5 ανά 2 είναι :

$$\{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\delta\}, \{\alpha,\varepsilon\}, \{\beta,\gamma\},$$

$$\{\beta,\delta\}, \{\beta,\varepsilon\}, \{\gamma,\delta\}, \{\gamma,\varepsilon\}, \{\delta,\varepsilon\}$$

ενώ οι επαναληπτικοί συνδυασμοί των 5 ανά 2 είναι :

$$\alpha\alpha, \beta\beta, \gamma\gamma, \delta\delta, \varepsilon\varepsilon,$$

$$\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \alpha\varepsilon, \beta\gamma,$$

$$\beta\delta, \beta\varepsilon, \gamma\delta, \gamma\varepsilon, \delta\varepsilon$$

2.3.1 Αριθμός συνδυασμών n στοιχείων ανά m

Αριθμός συνδυασμών $\binom{n}{m}$ ή $C(n,m)$ ή C_n^m
n στοιχείων ανά m

$$\binom{n}{m} = \frac{P(n,m)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Απόδειξη. Έστω E ένα σύνολο με n στοιχεία και έστω $C(n,m)$ ο αριθμός των συνδυασμών των n στοιχείων του E ανά m.

Θεωρούμε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (Δ, Σ) όπου

- Δ είναι μια διάταξη των n στοιχείων του E ανά m
- Σ είναι ένας συνδυασμός των n στοιχείων του E ανά m
- με την ιδιότητα ότι τα Δ και Σ περιέχουν τα ίδια στοιχεία του E.

Μπορούμε να μετρήσουμε τα ζεύγη (Δ, Σ) με δύο διαφορετικούς τρόπους:
1ος τρόπος: Για την διάταξη Δ υπάρχουν $P(n,m)$ τρόποι επιλογής. Με δεδομένη την διάταξη Δ υπάρχει μόνο 1 τρόπος επιλογής του Σ· ο Σ αποτελείται από τα στοιχεία της διάταξης Δ. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου, υπάρχουν $P(n,m)\cdot 1$ ζεύγη (Δ, Σ).
2ος τρόπος: Για τον συνδυασμό Σ υπάρχουν (εξ ορισμού) $C(n,m)$ τρόποι επιλογής. Με δεδομένο τον Σ υπάρχουν $m!$ τρόποι επιλογής της διάταξης Δ· η διάταξη Δ είναι μια μετάθεση των m στοιχείων του Σ. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου, υπάρχουν $C(n,m)\cdot m!$ ζεύγη (Δ, Σ).

Επομένως,

$$P(n,m)\cdot 1 = C(n,m)\cdot m! \Leftrightarrow$$

$$C(n,m) = \frac{P(n,m)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} = \binom{n}{m}$$

□

Παράδειγμα 13. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10.$

Παράδειγμα 14. *Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών τυχερών εξάδων που μπορούν να κληρωθούν στο παιχνίδι "Λόττο".*

Λύση. Κάθε τυχερή εξάδα αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο έξι στοιχείων από το σύνολο $[49] = \{1, 2, \ldots, 49\}$. (Δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία κληρώνονται οι αριθμοί.) Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών των 49 στοιχείων ανά 6, δηλαδή ισούται με $\binom{49}{6} = 13983816$. □

Παρατήρηση

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Συνδυαστική απόδειξη. Έστω E ένα σύνολο με n στοιχεία.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : E \to E$ με $f(A) = \overline{A} = E \setminus A$, για κάθε $A \subseteq E$.

Η απεικόνιση f είναι $1-1$. Πράγματι, έστω $A_1, A_2 \in E$ με $f(A_1) = f(A_2)$. Τότε, είναι $f(A_1) = f(A_2) \Leftrightarrow \overline{A_1} = \overline{A_2} \Leftrightarrow \overline{\overline{A_1}} = \overline{\overline{A_2}} \Leftrightarrow A_1 = A_2$.

Η f έχει την ιδιότητα ότι αν A είναι ένας συνδυασμός των n στοιχείων του E ανά m τότε $f(A) = E \setminus A$ είναι ένας συνδυασμός των n στοιχείων του E ανά $n - m$, και αντιστρόφως.

Επειδή η f είναι 1-1 σε κάθε συνδυασμό των n στοιχείων του E ανά m αντιστοιχεί ένας και μοναδικός συνδυασμός των n στοιχείων του E ανά $n-m$, δηλαδή τα δύο σύνολα συνδυασμών έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, οπότε $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. □

Παράδειγμα 15. *Έστω* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n = 5$ *και* $m = 2$,

$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$
12	*345*
13	*245*
14	*235*
15	*234*
23	*145*
24	*135*
25	*134*
34	*125*
35	*124*
45	*123*

2.3.2 Αναγωγικές εξισώσεις συνδυασμών

Τρίγωνο του Pascal

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

όπου $m \leq n$ με $\binom{n}{0} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\binom{n}{m} = 0$ αν $m > n$.

Κατακόρυφη αναγωγική εξίσωση

$$\binom{n}{m} = \binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} + \cdots + \binom{n-1}{m-1} = \sum_{\nu=m}^{n} \binom{\nu-1}{m-1}$$

Οριζόντια αναγωγική εξίσωση

$$\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{n+1}{0} + (-1)^{m-1} \binom{n+1}{1} + \cdots + (-1)^{m-m} \binom{n+1}{m}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{m-\nu} \binom{n+1}{\nu}$$

Οι αριθμοί $\binom{n}{m}$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	**1**							
1	**1**	**1**						
2	**1**	**2**	**1**					
3	**1**	**3**	**3**	**1**				
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**			
5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**		
6	**1**	**6**	**15**	**20**	**15**	**6**	**1**	
7	**1**	**7**	**21**	**35**	**35**	**21**	**7**	**1**

$\mathbf{20 = 10 + 10}$ (Τρίγωνο Pascal)

$\mathbf{20 = 1 + 3 + 6 + 10}$ (Κατακόρυφη αναγωγική σχέση)

$\mathbf{20 = 35 - 21 + 7 - 1}$ (Οριζόντια αναγωγική σχέση)

Παράδειγμα 16. *Κατά πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια τετραμελής Πανεπιστημιακή επιτροπή από 4 φοιτητές, 3 λέκτορες και 2 καθηγητές*

(i) Αν όλοι είναι εξίσου εκλέξιμοι.

(ii) Αν η επιτροπή δεν περιέχει κανένα φοιτητή.

(iii) Αν η επιτροπή πρεπει να περιέχει 1 καθηγητή, 1 λέκτορα και 2 φοιτητές.

Λύση. Επειδή στο σχηματισμό της επιτροπής τα μέλη της έχουν ισότιμο ρόλο, πρόκειται για συνδυασμούς.

Έτσι

(i) Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών των $4 + 3 + 2 = 9$ ατόμων ανα 4, δηλαδή

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

(ii) Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των συνδυασμών των $3+2 = 5$ (εξαιρούνται οι φοιτητές) ανά 4, δηλαδή

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$$

(iii) Για κάθε καθηγητή που θα εκλεγεί υπάρχουν $\binom{2}{1} = 2$ τρόποι, για τον λέκτορα $\binom{3}{1} = 3$ τρόποι, ενώ για τους 2 φοιτητές $\binom{4}{2} = 6$ τρόποι. Έτσι, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$. □

2.3.3 Αριθμός επαναληπτικών συνδυασμών n στοιχείων ανά m

Αριθμός επαναληπτικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά m

$$E(n,m) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n+m-1}{m}$$

Παράδειγμα 17. *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 όμοιες μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά. (Κάθε κουτί έχει απεριόριστη χωρητικότητα.)*

Λύση. Επιλέγουμε 10 φορές με επανάληψη τα 4 διαφορετικά κουτιά. Άρα, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με $\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10} = 286$. □

2.3.4 Αριθμός μεταθέσεων k ειδών στοιχείων

Αριθμός μεταθέσεων k ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ στοιχεία αντίστοιχα.

$$M(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

όπου $n = n_1 + n_2 \cdots n_k$.

Παράδειγμα 18. *Πόσες είναι οι μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης :* $M\ A\ \Theta\ H\ M\ A\ T\ I\ K\ A$

Λύση. Το πλήθος των μεταθέσεων των γραμμάτων της δοσμένης λέξης ισούται με τον αριθμό των μεταθέσεων 7 ειδών (όσων δηλαδή είναι τα διαφορετικά γράμματά της) δηλαδή,

$$M(2,3,1,1,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!1!1!1!1!1!} = 302400$$ □

Παράδειγμα 19. *Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορούν να διαταχθούν 16 όμοιες μπάλες εκ των οποίων 3 είναι λευκές, 4 είναι κόκκινες, 5 είναι πράσινες και 4 είναι κίτρινες.*

Λύση. Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μεταθέσεων 4 ειδών με 3, 4, 5 και 4 στοιχεία αντίστοιχα, οπότε έχουμε

$$\frac{16!}{3!4!5!4!} = 50450400$$

διαφορετικούς τρόπους. □

2.4 Ακέραιες λύσεις γραμμικής εξίσωσης

Ακέραιες Λύσεις Γραμμικής Εξίσωσης

Ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων x_i, $i \in [n]$ της γραμμικής εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \tag{2.1}$$

όπου $m, n \in \mathbb{N}^*$ είναι ίσος με $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n+m-1}{m}$.

Απόδειξη. Έστω $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο με n στοιχεία. Σε κάθε επαναληπτικό συνδυασμό των n στοιχείων του E ανά m αντιστοιχεί μια μοναδική λύση της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$, όπου x_i είναι ο αριθμός των φορών που επιλέγεται το στοιχείο a_i στον επαναληπτικό συνδυασμό. □

Παράδειγμα 20. *Ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης* $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ *ισούται με* $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right] = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

Πράγματι, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι εξής:

$0+0+5$	$0+1+4$	$0+2+3$	$0+3+2$	$0+4+1$	$0+5+0$
$1+0+4$	$1+1+3$	$1+2+2$	$1+3+1$	$1+4+0$	$2+0+3$
$2+1+2$	$2+2+1$	$2+3+0$	$3+0+2$	$3+1+1$	$3+2+0$
$4+0+1$	$4+1+0$	$5+0+0$			

Παράδειγμα 21. *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 όμοιες μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά.*

Λύση. Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των *μη αρνητικών* ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4 είναι ο αριθμός από μπάλες που τοποθετούνται σε κάθε κουτί. Άρα, υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$$

τρόποι τοποθέτησης. □

Παράδειγμα 22. *Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 10 όμοιες μπάλες σε 4 διαφορετικά κουτιά, έτσι ώστε κανένα κουτί να μην μείνει άδειο.*

Λύση. Ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4 είναι ο αριθμός από μπάλες που τοποθετούνται σε κάθε κουτί, με τον περιορισμό ότι $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$.

Αν τεθεί

$$y_1 = x_1 - 1,\ y_2 = x_2 - 1,\ y_3 = x_3 - 1,\ y_4 = x_4 - 1$$

τότε $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ και

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + (x_3 - 1) + (x_4 - 1) = 10 - 4 = 6$$

οπότε κάθε ακέραια λύση της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

με $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 1$ αντιστοιχεί σε μία και μοναδική μη αρνητική ακέραια λύση της εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6,$$

και αντιστρόφως.

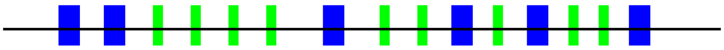
Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \binom{4 + 6 - 1}{6} = \binom{9}{6}. \qquad \square$$

2.5 Συμπληρωματικές λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1. *Να υπολογισθεί ο αριθμός των τρόπων που n ανδρόγυνα μπορούν να καθίσουν σε ένα ευθύγραμμο τραπέζι έτσι ώστε σε k καθορισμένα ανδρόγυνα οι σύζυγοι να κάθονται ο ένας δίπλα στον άλλο.*

Λύση.



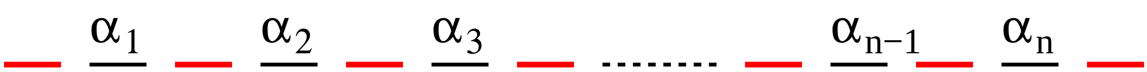
Το πλήθος των είναι k και το πλήθος των είναι $2n-2k$

Θεωρούμε ότι κάθε ένα από τα k καθορισμένα ανδρόγυνα είναι ένα αδιαίρετο στοιχείο οπότε το πλήθος των στοιχείων που πρέπει να τοποθετήσουμε στον ευθύγραμμο τραπέζι είναι ίσο με με $2n-k$ και επομένως θα υπάρχουν $(2n-k)!$ τρόποι τοποθέτησης. Σε κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους τοποθέτησης υπάρχουν δύο επιλογές τοποθέτησης καθενός από τα k καθορισμένα ζευγάρια (δηλαδή ο άνδρας να προηγείται ή να έπεται της γυναίκας). Άρα ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{k\ \text{φορές}}\,(2n-k)! = 2^k(2n-k)! \qquad \square$$

Άσκηση 2. *Να υπολογισθεί ο αριθμός των διαφόρων τρόπων που μπορούν να καθίσουν σε μια σειρά n αγόρια και k κορίτσια, $k \le n+1$, έτσι ώστε να μην υπάρχουν δυο κορίτσια που να κάθονται το ένα δίπλα στο άλλο.*

Λύση Καταρχήν τοποθετούμε τα αγόρια. Ο αριθμός τοποθέτησης των αγοριών είναι ίσος με με τον αριθμό των μεταθέσεων των n αγοριών δηλαδή $n!$.

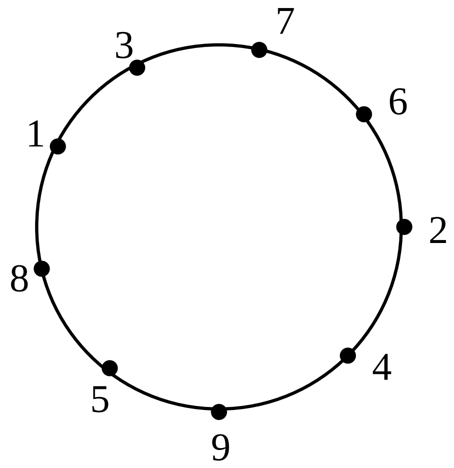


Για κάθε μετάθεση $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του συνόλου των αγοριών υπάρχουν $n+1$ επιτρεπτές θέσεις για τα κορίτσια. Έτσι ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να τοποθετηθούν τα k κορίτσια, για τη μετάθεση αυτή των αγοριών, ισούται με τον αριθμό των διατάξεων των $n+1$ ανά k δηλαδή $P(n+1,k)$.

Άρα, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή ο ζητούμενος αριθμός θα είναι ίσος με

$$n!P(n+1,k) = \frac{n!(n+1)!}{(n+1-k)!}$$

Άσκηση 3. *Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα στρογγυλό τραπέζι με 9 όμοιες θέσεις 9 άτομα.*



Λύση. Σε κάθε τρόπο τοποθέτησης των 9 ατόμων στο τραπέζι αντιστοιχούν 9 μεταθέσεις του συνόλου [9] προκύπτουν με κυκλική εναλλαγή των στοιχείων τους. Έτσι για παράδειγμα για τον τρόπο τοποθέτησης του παραπάνω σχήματος προκύπτουν οι μεταθέσεις :
$(1, 3, 7, 6, 2, 4, 9, 5, 8)$, $(3, 7, 6, 2, 4, 9, 5, 8, 1)$, $(7, 6, 2, 4, 9, 5, 8, 1, 3)$,
$(6, 2, 4, 9, 5, 8, 1, 3, 7)$, $(2, 4, 9, 5, 8, 1, 3, 7, 6)$, $(4, 9, 5, 8, 1, 3, 7, 6, 2)$,
$(9, 5, 8, 1, 3, 7, 6, 2, 4)$, $(5, 8, 1, 3, 7, 6, 2, 4, 9)$, $(8, 1, 3, 7, 6, 2, 4, 9, 1)$.

Κατόπιν τούτου, ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης των 9 ατόμων στο τραπέζι ισούται με τον αριθμό των μεταθέσεων του συνόλου [9] δια 9, δηλαδή ισούται με $\frac{9!}{9} = 8! = 40320$. $\square$.

Άσκηση 4. *Να βρεθεί ο αριθμός των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης*

$$x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 16.$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι για κάθε λύση της εξίσωσης ισχύει ότι $0 \leq x_4 \leq 3$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις για την τιμή του x_4.

Αν $x_4 = 0$, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 16,$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{3 \atop 16}\right] = \binom{18}{16}$.

Αν $x_4 = 1$, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11,$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{3 \atop 11} \right] = \binom{13}{11}$.

Αν $x_4 = 2$, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{3 \atop 6} \right] = \binom{8}{6}$.

Τέλος, αν $x_4 = 3$, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με τον αριθμό των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

δηλαδή είναι ίσος με $\left[{3 \atop 1} \right] = \binom{3}{1}$.

Αρα, ο συνολικός αριθμός των λύσεων της εξίσωσης ισούται με $\binom{18}{2} + \binom{13}{2} + \binom{8}{2} + \binom{3}{2}$. $\square$

Ασκήσεις προς επίλυση

1. (Δυαδικές λέξεις) Πόσες είναι οι δυαδικές λέξεις μήκους n;

2. (Πενταψήφιοι αριθμοί) Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

   (i) αν πρέπει να έχουν τα ψηφία τους διαφορετικά,
   (ii) αν τα ψηφία τους μπορεί να επαναλαμβάνονται,
   (iii) αν πρέπει να είναι άρτιοι αριθμοί και τα ψηφία τους να είναι διαφορετικά
   (iv) αν το άθροισμα του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου τους είναι ίσο με 4 και τα ψηφία τους μπορούν να επαναλαμβάνονται.

3. (Σιδηρόδρομος) Πόσες είναι οι μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης

   Σ Ι Δ Η Ρ Ο Δ Ρ Ο Μ Ο Σ

4. (Εφαρμογή) Πόσες λέξεις μπορούν να κατασκευασθούν χρησιμοποιώντας όλα τα γράμματα της λέξης Ε Φ Α Ρ Μ Ο Γ Η και πόσες από αυτές έχουν τα γράμματα Α και Ρ διαδοχικά.

5. (Μπάλες) Κατά πόσους τρόπους 4 λευκές, 5 κίτρινες και 9 μαύρες μπάλες μπορούν να διαταχθούν

   (i) χωρίς περιορισμό
   (ii) αν κάθε διάταξή τους αρχίζει με λευκή και τελειώνει με μαύρη μπάλα.

6. (Ομάδες φοιτητών) Με πόσους τρόπους μπορούν να χωρισθούν 20 φοιτητές σε 3 ομάδες των 10, 6, και 4 ατόμων αντίστοιχα.

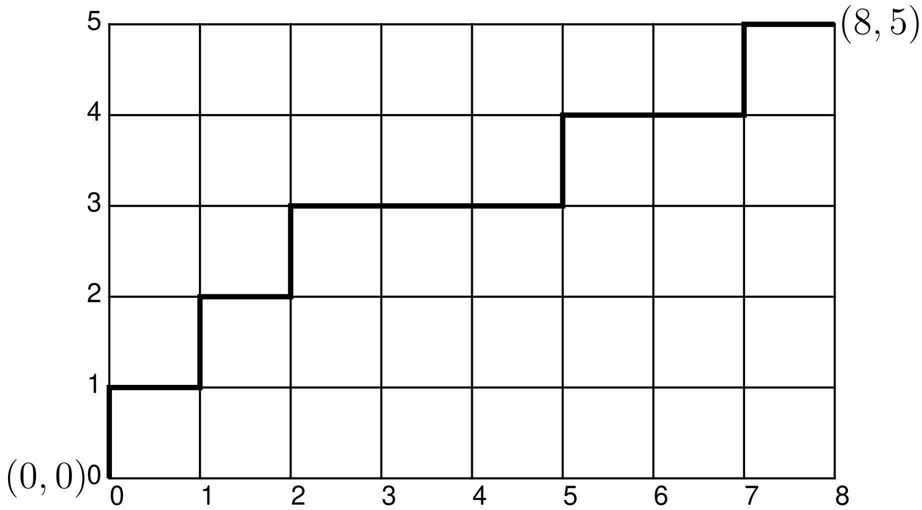
7. (Επιτροπές καθηγητών) Από 21 καθηγητές εκ των οποίων 8 είναι μαθηματικοί, 6 φυσικοί και 7 χημικοί θέλουμε να σχηματίσουμε μια επιτροπή από 5 καθηγητές στους οποίους τουλάχιστον ένας πρέπει να είναι φυσικός, για να πάρουν μέρος σε ένα συνέδριο. Πόσες επιτροπές μπορούν να σχηματισθούν.

8. (Τριμελή συμβούλια) Κατά πόσους τρόπους ένα τριμελές συμβούλιο μπορεί να σχηματισθεί από 4 αντρόγυνα,

   (i) αν όλοι είναι εξίσου εκλέξιμοι,
   (ii) αν το συμβούλιο πρέπει να περιλαμβάνει δύο γυναίκες και ένα άντρα,
   (iii) αν δεν επιτρέπεται δύο σύζυγοι να περευρίσκονται στο συμβούλιο.

9. (Ασανσέρ) Πέντε άτομα μπαίνουν σε ασανσέρ στο ισόγειο ενός κτιρίου με 4 ορόφους. Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν στους ορόφους αν μας ενδιαφέρει μόνο ο αριθμός των ατόμων που βγήκαν σε κάθε όροφο;

10. (** Μονοπάτια) Να βρεθεί ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων να φτάσουμε από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο $(8,5)$ χρησιμοποιώντας τους δρόμους της παρακάτω πόλης δεδομένου ότι επιτρέπεται να κινούμαστε μόνο προς τα δεξιά ή προς τα πάνω.



Λύση: Κάθε μονοπάτι που ενώνει τα σημεία $(0,0)$ και $(8,5)$ αποτελείται από ακριβώς $8+5=13$ βήματα εκ των οποίων 8 είναι οριζόντια H και 5 είναι κατακόρυφα V.

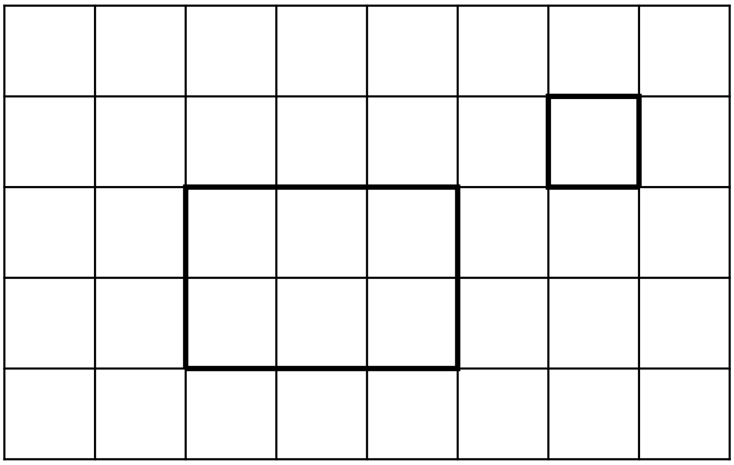
Αυτό που διακρίνει ένα μονοπάτι από ένα άλλο είναι οι θέσεις αυτών των 13 βημάτων. Συγκεκριμένα, σε κάθε επιλογή των 8 θέσεων από τις 13 διαθέσιμες για τα οριζόντια βήματα H αντιστοιχεί ένα μοναδικό μονοπάτι που ενώνει τα σημεία $(0,0)$ και $(8,5)$.

Στο μονοπάτι του σχήματος, έχουμε επιλέξει τις θέσεις 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11 και 13 για τα οριζόντια βήματα.

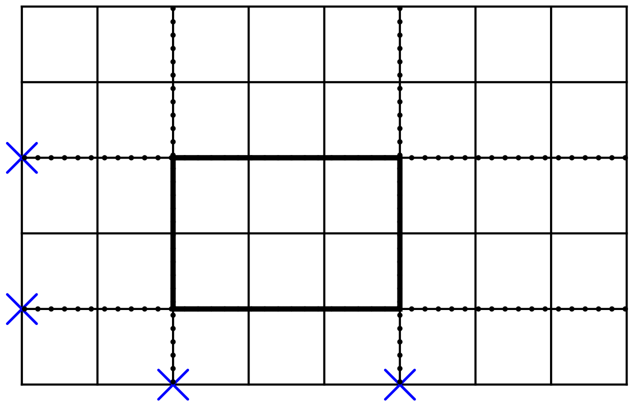
$$\begin{array}{ccccccccccccc} V & H & V & H & V & H & H & H & V & H & H & V & H \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array}$$

Υπάρχουν $\binom{13}{8}$ τέτοιες επιλογές, άρα υπάρχουν $\binom{13}{8}$ τέτοια μονοπάτια.

11. (** Ορθογώνια) Να βρεθεί ο αριθμός των ορθογωνίων με κορυφές τα σημεία και πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα μιας 5×8 σκακιέρας.



Λύση: Κάθε ορθογώνιο προσδιορίζεται μονοσήμαντα επιλέγοντας 2 σημεία στην κάτω πλευρά της σκακιέρας και 2 σημεία στην αριστερή πλευρά της σκακιέρας.



Υπάρχουν $\binom{8+1}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 σημεία στη κάτω πλευρά.
Υπάρχουν $\binom{5+1}{2}$ τρόποι για να επιλέξουμε 2 σημεία στην αριστερή πλευρά.
Από την πολλαπλασιαστική αρχή υπάρχουν $\binom{9}{2}\binom{6}{2}$ επιλογές.

2.6 Παράρτημα: Αποδείξεις για τους βασικούς τύπους

Αριθμός επαναληπτικών συνδυασμών

$$E(n,m) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n+m-1}{m}$$

Συνδυαστική απόδειξη: Θεωρούμε τα σύνολα

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

και

$$T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}\}$$

Έστω

- $E_m(E)$ το σύνολο των **επαναληπτικών συνδυασμών** των n στοιχείων του E ανά m

  και

- $\Sigma_m(T)$ το σύνολο των (απλών) **συνδυασμών** των $n+m-1$ στοιχείων του T ανά m.

Θα κατασκευασθεί μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ τους.
Παράδειγμα για $n = 8$ και $m = 5$

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$$

$$T = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$$

Έστω σ ένας επαναληπτικός συνδυασμός του E, π.χ.

$$\sigma = x_2x_7x_2x_5x_7$$

Επειδή στους συνδυασμούς δεν παίζει ρόλο η σειρά μπορούμε να γράφουμε:

$$\sigma = x_2x_2x_5x_7x_7$$

Τότε

$$\sigma' = x_2x_3x_7x_{10}x_{11}$$

είναι ένας συνδυασμός του T.

Η απεικόνιση $\sigma \to \sigma'$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

Κατασκευή μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης από το $E_m(E)$ στο $\Sigma_m(T)$

όπου $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ και $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}\}$

Τα στοιχεία του $E_m(E)$ μπορούν να γραφούν υπό την μορφή :

$$\sigma = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \text{ όπου } i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq n.$$

Ορίζουμε

$$\sigma' = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_m}$$

όπου $j_k = i_k + k - 1$, για κάθε $k \in [m]$. (Δηλαδή ''δείκτης'' + ''σειρά'' − 1).

Προφανώς για κάθε $k \in [m]$ ισχύουν:

$$j_k \leq n + m - 1$$

και

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_m,$$

δηλαδή τα στοιχεία του σ' είναι διακεκριμένα και επομένως $\sigma' \in \Sigma_m(T)$.

Η απεικόνιση $\sigma \to \sigma'$ είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των συνόλων $E_m(E)$ και $\Sigma_m(T)$, οπότε είναι

$$|E_m(E)| = |\Sigma_m(T)| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \binom{n+m-1}{m}$$

Αριθμός μεταθέσεων k ειδών στοιχείων με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ στοιχεία αντίστοιχα.

$$M(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} \text{ όπου } n = n_1 + n_2 \cdots n_k.$$

Απόδειξη: Κάθε μετάθεση σ, k ειδών που n_1 συμπίπτουν με a_1, n_2 συμπίπτουν με a_2, ..., n_k συμπίπτουν με a_k μπορεί να κατασκευασθεί ως εξής:

Αρχικά τοποθετούμε τα n_1 το πλήθος a_1 σε n_1 από τις n θέσεις

$$\sigma \quad \_\ \_\ \underline{\alpha_1}\ \_\ \_\ \underline{\alpha_1}\ \_\ \_\ \underline{\alpha_1}\ \_\ \_\ \_\ \_$$

Τούτο γίνεται με $\binom{n}{n_1}$ τρόπους.

Έπειτα τοποθετούμε τα n_2 το πλήθος a_2 σε n_2 από τις $n - n_1$ θέσεις που περίσσεψαν

$$\sigma \quad \_\ \underline{\alpha_2}\ \underline{\alpha_1}\ \underline{\alpha_2}\ \_\ \underline{\alpha_1}\ \_\ \_\ \underline{\alpha_1}\ \underline{\alpha_2}\ \_\ \underline{\alpha_2}\ \_$$

Αυτό γίνεται με $\binom{n-n_1}{n_2}$ τρόπους.

Έπειτα τοποθετούμε τα n_3 το πλήθος a_3 με $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ τρόπους.

Άρα τελικά για να κατασκευάσουμε όλες τις μεταθέσεις αυτές των k ειδών υπάρχουν

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

τρόποι. Έτσι,

$$\begin{aligned} M(n_1,n_2,\ldots,n_k) &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \\ &\quad\cdots\frac{n_k!}{n_k!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \end{aligned}$$