ΠΜΣ "ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ"

(ΠΛΗ2, 7^{ος} κύκλος, 1^{ο} εξάμηνο, 2024)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κ. ΜΑΝΕΣ - Ι. ΤΑΣΟΥΛΑΣ

Σημειώσεις διαλέξεων 8

Κεφάλαιο 7

Γλώσσες - Αυτόματα

7.1 Τυπικές γλώσσες

7.1.1 Ορισμοί

Αλφάβητο είναι ένα μη κενό, πεπερασμένο σύνολο συμβόλων $\mathcal{E}$.

Παραδείγματα

1. Το ελληνικό αλφάβητο $\mathcal{E}_1 = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \ldots, \Omega\}$.
2. Το λατινικό αλφάβητο $\mathcal{E}_2 = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{Z}\}$.
3. Το δυαδικό αλφάβητο $\mathcal{E}_3 = \{0, 1\}$.
4. Το αλφάβητο της λογικής $\mathcal{E}_4 = \{a, b, c, \ldots, z, (,), \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$.

Τα στοιχεία ενός αλφαβήτου ονομάζονται **γράμματα**. Κάθε πεπερασμένη ακολουθία γραμμάτων ονομάζεται **λέξη**.

Παραδείγματα

1. Για το $\mathcal{E}_1$, λέξεις είναι οι ΝΙΚΟΣ, ΑΑΑΒΑΩ, Β, ΤΡΑΠΕΖ, κ.λπ.
2. Για το $\mathcal{E}_2$, λέξεις είναι οι BOAT, B, CCCCQ, κ.λπ.
3. Για το $\mathcal{E}_3$, λέξεις είναι οι 10010, 11, 1010, κ.λπ.
4. Για το $\mathcal{E}_4$, λέξεις είναι οι $(a \rightarrow b)$, $(a \vee b) \wedge (c \vee d)$, $a \vee (\neg a)$, κ.λπ.

Ορίζουμε επίσης μια λέξη χωρίς γράμματα, την **κενή λέξη** $\square$ (ή ϵ).

Ο αριθμός των γραμμάτων μιας λέξης m λέγεται **μήκος** ή **βαθμός** της λέξης και συμβολίζεται με $l(m)$.

Έτσι για την πρώτη λέξη καθενός από τα τέσσερα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε $l(m) = 5, 4, 5$ και 5 αντίστοιχα.

Η λέξη που προκύπτει από την αντιστροφή της σειράς των γραμμάτων μιας λέξης m ονομάζεται **κατοπτρική εικόνα** της m και συμβολίζεται με $\widetilde{m}$.

Παραδείγματος χάριν για τις 4 πρώτες λέξεις καθενός από τα 4 προηγούμενα παραδείγματα έχουμε $\widetilde{m} =$ ΣΟΚΙΝ, ΤΑΟΒ, 01001 και $)b \to a($ αντίστοιχα.

Μια λέξη m για την οποία $\widetilde{m} = m$ ονομάζεται **συμμετρική**.

Παραδείγματα ΑΝΝΑ, 1001001, ΝΟΜΙΜΟΝ, κ.λπ.

Το σύνολο όλων των λέξεων ενός αλφαβήτου $\mathcal{E}$ συμβολίζεται με $\mathcal{E}^*$.

Παραδείγματα

1. Για το αλφάβητο $\mathcal{E}_1$ παίρνουμε ως $\mathcal{E}_1^*$ το σύνολο όλων των λέξεων που χρησιμοποιούν οσαδήποτε, οποιαδήποτε και με οποιαδήποτε σειρά γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου (πεπερασμένα σε πλήθος) καθώς επίσης και την $\square$.

2. Για το αλφάβητο $\mathcal{E}_3$ έχουμε $\mathcal{E}_3^* = \{\square, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \ldots\}$.

Κάθε διατεταγμένη οικογένεια λέξεων του $\mathcal{E}^*$ που περιέχει τουλάχιστον μια φορά την $\square$, λέγεται **φράση**.

Παράδειγμα: ΕΙΜΑΙ$\square$ΜΙΑ$\square$ΦΡΑΣΗ.

Ορίζουμε μια εσωτερική πράξη στο $\mathcal{E}^*$ ως εξής: Για κάθε $m_1, m_2 \in \mathcal{E}^*$ παίρνουμε την $m = m_1 m_2$ που προκύπτει από τα γράμματα της m_1 ακολουθούμενα από τα γράμματα της m_2. Η πράξη αυτή λέγεται **ζεύξη**.

Παραδείγματα

Αν $m_1 = 1011$ και $m_2 = 11$ τότε $m_1 m_2 = 101111$ και $m_2 m_1 = 111011$.

Αν $m_1 =$ ΑΝΤΙ και $m_2 =$ ΓΡΑΦΩ τότε $m_1 m_2 =$ ΑΝΤΙΓΡΑΦΩ.

Προφανώς ισχύει η προσεταιριστικότητα αλλά όχι η αντιμεταθετικότητα, όπως φαίνεται και από το πρώτο παράδειγμα. Επίσης, υπάρχει ουδέτερο στοιχείο (η λέξη $\square$, αφού $m\square = \square m = m$).

Συχνά γράφουμε m^n αντί $\underbrace{mm \cdots m}_{n \text{ φορές}}$.

Η αλγεβρική δομή $\mathcal{E}^*$ με την πράξη της ζεύξης λέγεται **ελεύθερο μονοειδές** (με γεννήτορες τα στοιχεία του $\mathcal{E}$).

Κάθε υποσύνολο L του $\mathcal{E}^*$ ονομάζεται **τυπική γλώσσα του $\mathcal{E}^*$**.

Παραδείγματα

1. $\mathcal{E}$ το ελληνικό αλφάβητο και L όλες οι λέξεις της ελληνικής γλώσσας.
2. $\mathcal{E} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ και L όλοι οι αριθμοί x με $100 \leq x \leq 355$.

Συμπλήρωμα μιας τυπικής γλώσσας $L \subseteq \mathcal{E}^*$ ονομάζεται το σύνολο $\overline{L} = \{m : m \in \mathcal{E}^* \text{ και } m \notin L\}$.

Παράδειγμα: Αν $\mathcal{E} = \{0, 1\}$ και L είναι όλα τα στοιχεία του $\mathcal{E}^*$ που τελειώνουν σε 0, τότε $\overline{L}$ είναι όλα τα στοιχεία του $\mathcal{E}^*$ που τελειώνουν σε 1, καθώς και η $\square$.

Προφανώς, ισχύει ότι $\overline{\overline{L}} = L$. Το $\overline{\mathcal{E}^*}$ δεν περιέχει καμία λέξη. Συμβολίζεται με $\emptyset$ και λέγεται ***κενή γλώσσα***.

Ένωση δύο γλωσσών $L_1, L_2 \subseteq E^*$ ονομάζεται το σύνολο $L_1 \cup L_2 = \{m : m \in L_1 \text{ ή/και } m \in L_2\}$.

Τομή δύο γλωσσών $L_1, L_2 \subseteq E^*$ ονομάζεται το σύνολο $L_1 \cap L_2 = \{m : m \in L_1 \text{ και } m \in L_2\}$.

Γινόμενο δύο γλωσσών $L_1, L_2 \subseteq E^*$ ονομάζεται το σύνολο $L_1 L_2 = \{m : m = m_1 m_2 \text{ όπου } m_1 \in L_1 \text{ και } m_2 \in L_2\}$.

Παράδειγμα: Αν $\mathcal{E} = \{0, 1\}$ και $L_1 = \{\square, 0, 01, 10\}$, $L_2 = \{01, 10, 11\}$ τότε

$$L_1 \cup L_2 = \{\square, 0, 01, 10, 11\},$$

$$L_1 \cap L_2 = \{01\},$$

$$L_1 L_2 = \{01, 10, 11, 001, 010, 011, 0101, 0110, 0111, 1001, 1010, 1011\},$$

$$L_2 L_1 = \{01, 010, 0101, 0110, 10, 100, 1001, 1010, 11, 110, 1101, 1110\}.$$

7.1.2 Διατάξεις

Με τη βοήθεια της ζεύξης, μπορεί να ορισθεί μια ολική διάταξη στο $\mathcal{E}^*$. Για να γίνει αυτό, απαιτείται ένα αλφάβητο $\mathcal{E}$ ολικά διατεταγμένο από τη σχέση '$<$' ($x < y$ όταν το γράμμα x προηγείται του γράμματος y στο $\mathcal{E}$).

Η διάταξη αυτή, που είναι γνωστή ως **αλφαβητική** διάταξη του $\mathcal{E}$, επεκτείνεται και στο σύνολο $\mathcal{E}^*$ ορίζοντας τη **λεξικογραφική** του διάταξη '$\prec$' ως εξής:

Για δύο λέξεις m_1, m_2 του $\mathcal{E}^*$,

$$m_1 \prec m_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 = m_1 m_3, \text{ όπου } m_3 \in \mathcal{E}^* \text{ με } m_3 \neq \Box, \text{ ή} \\ m_1 = m a m_3 \text{ και } m_2 = m b m_4, \text{ όπου } m, m_3, m_4 \in \mathcal{E}^* \text{ και } a, b \in \mathcal{E} \text{ με } a < b. \end{cases}$$

Παραδείγματα

1. Αν $m_1 = aabb$ και $m_2 = aabbab$, τότε $m_1 \prec m_2$, διότι $m_2 = m_1 m_3$, όπου $m_3 = ab \neq \Box$.

2. Αν $m_1 = \text{THEN}$ και $m_2 = \text{THIS}$, τότε $m_1 \prec m_2$, διότι

$$m_1 = m\text{E}m_3 \quad \text{και} \quad m_2 = m\text{I}m_4,$$

όπου $m = \text{TH}$, $m_3 = \text{N}$, $m_4 = \text{S}$ και $\text{E} < \text{I}$.

3. Αν $m_1 = \text{ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ}$ και $m_2 = \text{ΕΛΠΙΔΑ}$, τότε $m_1 \prec m_2$, διότι

$$m_1 = m\text{E}m_3 \quad \text{και} \quad m_2 = m\Pi m_4,$$

όπου $m = \text{ΕΛ}$, $m_3 = \text{ΥΘΕΡΙΑ}$, $m_4 = \text{ΙΔΑ}$ και $\text{E} < \Pi$.

7.1.3 Αντικατάσταση

Σύστημα σχέσεων του Thue είναι ένα σύστημα κανόνων αντικαταστάσεων στο $\mathcal{E}^*$, δηλαδή η παραδοχή ότι κάποιες λέξεις είναι ισοδύναμες (και άρα η μια μπορεί να αντικαθιστά την άλλη όταν τις συναντάμε μέσα σε άλλες λέξεις).

Γράφουμε

$$m_i \sim m_i'$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ γι᾽ αυτές τις συνθήκες.

Δύο λέξεις λέγονται **γειτονικές** αν η μια προκύπτει από την άλλη με μια μόνο αντικατάσταση. Αν η μια προκύπτει από την άλλη μέσω περισσότερων διαδοχικών αντικαταστάσεων, τότε οι λέξεις λέγονται **ισοδύναμες** και γράφουμε $m_1 \approx m_2$.

Παραδείγματα

1. Θεωρώντας το σύστημα των σχέσεων του Thue:

   $$ab \sim ba, aba \sim b, bab \sim a,$$

   τότε οι λέξεις $m_1 = aabbacca$, $m_2 = acca$ είναι ισοδύναμες. Πραγματικά,

   $$\begin{aligned} m_1 &\approx a\underline{ab}bacca \\ &\approx ab\underline{aba}cca \\ &\approx \underline{ab}bcca \\ &\approx \underline{bab}cca \\ &\approx acca \approx m_2. \end{aligned}$$

2. Θεωρώντας το σύστημα των σχέσεων του Thue:

   $$\text{ω} \sim \text{ο},\ \text{αι} \sim \text{ε},\ \text{ει} \sim \text{ι},$$

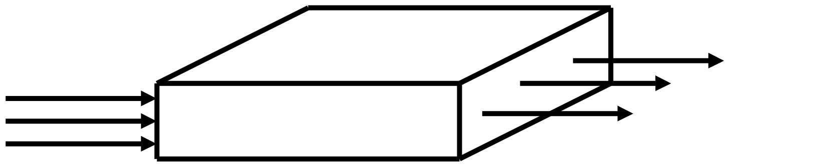
   έχουμε την ισοδυναμία

   $$\text{Πειραι}\underline{\text{ω}}\text{ς} \approx \text{Πειρ}\underline{\text{αι}}\text{ος} \approx \text{Π}\underline{\text{ει}}\text{ρεος} \approx \text{Πιρεος}.$$

Πρόταση 7. *Η σχέση $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

7.2 D-αυτόματα

Ένα κουτί με διαύλους εισόδου και εξόδου:



Αυτόματα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (θέσεων) (Finite state automata, πεπερασμένα αυτόματα).

Το σύνολο των καταστάσεων καθώς και η διαδικασία που επιτρέπει τη μετάβαση από τη μια κατάσταση στην άλλη (με τη βοήθεια ‘‘σημάτων’’) είναι τα βασικά στοιχεία ενός αυτόματου.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα D-αυτόματα:

Κάθε πεντάδα $a = (S, \mathcal{E}, T, s_0, f)$ όπου

S: ένα πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων.

$\mathcal{E}$: ένα αλφάβητο (το αλφάβητο εισόδου).

$T \subseteq S$: το σύνολο των τελικών καταστάσεων.

$s_0 \in S$: η αρχική κατάσταση.

$f : S \times \mathcal{E} \to S$ (η συνάρτηση μετάβασης).

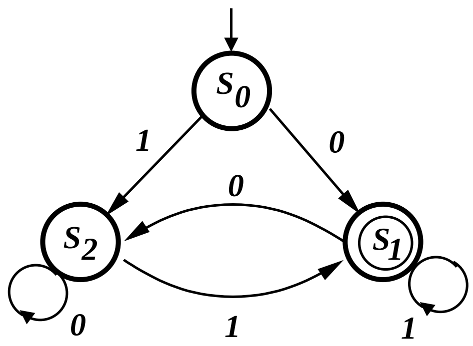
ονομάζεται **(πεπερασμένο) D-αυτόματο (deterministic finite state automaton)**. Η συνάρτηση μετάβασης f, εκφράζει τον ‘‘εσωτερικό μηχανισμό’’ του D-αυτόματου, και **σε κάθε ζεύγος του** $S \times \mathcal{E}$ αντιστοιχεί **ακριβώς ένα στοιχείο του** S.

Σε κάθε D-αυτόματο αντιστοιχεί ένα προσανατολισμένο p-γράφημα με κόστος, με κορυφές τις καταστάσεις του αυτόματου, τόξα τα διατεταγμένα ζεύγη που προκύπτουν από τη συνάρτηση μετάβασης και κόστος κάθε τόξου την αντίστοιχη τιμή του $\mathcal{E}$. Στην κορυφή της αρχικής κατάστασης s_0 υπάρχει ένα τόξο εισόδου, ενώ για τις κορυφές των τελικών καταστάσεων χρησιμοποιούνται διπλοί κύκλοι, αντί για τον ένα που χρησιμοποιείται για τις υπόλοιπες κορυφές.

Παραδείγματα

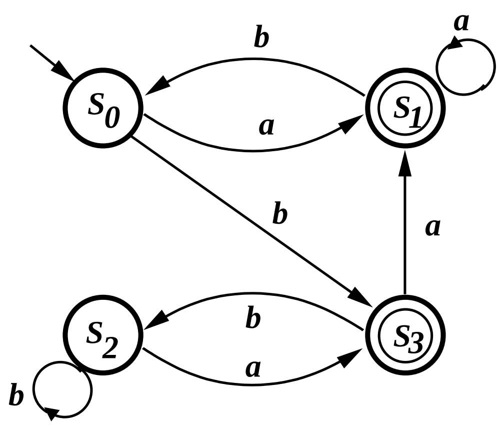
1. $S = \{s_0, s_1, s_2\}$, $\mathcal{E} = \{0, 1\}$, $T = \{s_1\}$ και $f : S \times \mathcal{E} \to S$ με $f(s_0, 0) = s_1$, $f(s_0, 1) = s_2$, $f(s_1, 0) = s_2$, $f(s_1, 1) = s_1$, $f(s_2, 0) = s_2$ και $f(s_2, 1) = s_1$.

   Το αντίστοιχο γράφημα (που περιγράφει αυτό το D-αυτόματο) είναι το εξής:

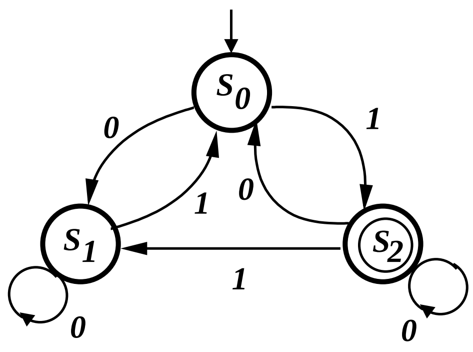


2. $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $\mathcal{E} = \{a, b\}$, $T = \{s_1, s_3\}$ και $f : S \times \mathcal{E} \to S$ με $f(s_0, a) = s_1$, $f(s_0, b) = s_3$, $f(s_1, a) = s_1$, $f(s_1, b) = s_0$, $f(s_2, a) = s_3$, $f(s_2, b) = s_2$, $f(s_3, a) = s_1$, $f(s_3, b) = s_2$.

   Το αντίστοιχο γράφημα (που περιγράφει αυτό το D-αυτόματο) είναι το εξής:



3. Το αυτόματο που περιγράφει το επόμενο γράφημα **δεν είναι** ντετερμινιστικό (αφού η $f(s_2, 0)$ δεν είναι μοναδικά καθορισμένη).



7.3 Λέξεις και αυτόματα

Για να εξετάσουμε αν ένα D-αυτόματο ''δέχεται'' (αναγνωρίζει) μια λέξη, ορίζουμε πρώτα μια καινούργια συνάρτηση $f^* : S \times \mathcal{E}^* \to S$ ως εξής:

$$f^*(s_i, \Box) = s_i, \ \ \forall s_i \in S$$

$$f^*(s_i, m_1m_2) = f(f^*(s_i, m_1), m_2), \ \ \forall s_i \in S, m_1 \in \mathcal{E}^*, m_2 \in \mathcal{E}.$$

Μια λέξη m **αναγνωρίζεται** από ένα D-αυτόματο, όταν $f^*(s_0, m) \in T$. (Δηλαδή πρέπει, αν ξεκινήσουμε από το s_0 και προχωρήσουμε ''βήμα-βήμα'', ακολουθώντας τα ''γράμματα'' της λέξης m, να καταλήξουμε σε κάποιο ''τελικό'' στοιχείο, δηλαδή σε κάποιο στοιχείο του T).

Παραδείγματα

1. Το D-αυτόματο του παραδείγματος 1 αναγνωρίζει τη λέξη $m = 1001101$, αφού

$$\begin{aligned}
&f^*(s_0, 1) = f^*(s_0, \Box 1) = f(f^*(s_0, \Box), 1) = f(s_0, 1) = s_2,\\
&f^*(s_0, 10) = f(f^*(s_0, 1), 0) = f(s_2, 0) = s_2,\\
&f^*(s_0, 100) = f(f^*(s_0, 10), 0) = f(s_2, 0) = s_2,\\
&f^*(s_0, 1001) = f(f^*(s_0, 100), 1) = f(s_2, 1) = s_1,\\
&f^*(s_0, 10011) = f(f^*(s_0, 1001), 1) = f(s_1, 1) = s_1,\\
&f^*(s_0, 100110) = f(f^*(s_0, 10011), 0) = f(s_1, 0) = s_2,\\
&f^*(s_0, m) = f^*(s_0, 1001101) = f(f^*(s_0, 100110), 1) = f(s_2, 1) = s_1 \in T.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Πρακτικός τρόπος: Ξεκινάμε από το s_0 και ακολουθούμε τα βήματα της $m = 1001101$

$$s_0 \xrightarrow{1} s_2 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{1} s_1 \in T.$$

2. Το ίδιο D-αυτόματο **δεν** αναγνωρίζει τη λέξη $w = 11110010$ διότι

$$s_0 \xrightarrow{1} s_2 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{0} s_2 \xrightarrow{1} s_1 \xrightarrow{0} s_2 \notin T.$$

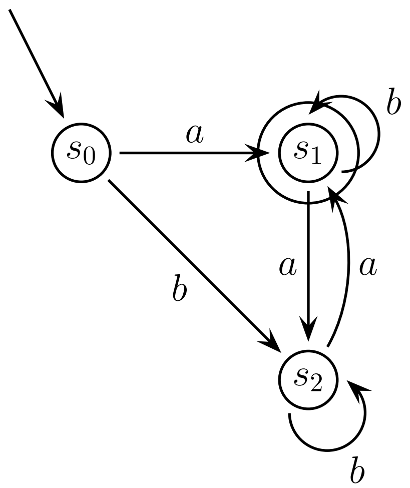
3. Το D-αυτόματο του παραδείγματος 2 αναγνωρίζει τη λέξη $m = abbbbabaa$ διότι

$$s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{b} s_0 \xrightarrow{b} s_3 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{a} s_3 \xrightarrow{b} s_2 \xrightarrow{a} s_3 \xrightarrow{a} s_1 \in T.$$

Ένα D-αυτόματο **αναγνωρίζει** μια γλώσσα L (ή, ισοδύναμα μια γλώσσα L **αναγνωρίζεται** από ένα D-αυτόματο), αν το D-αυτόματο αναγνωρίζει όλες τις λέξεις της L και μόνον αυτές.

Παράδειγμα

Το παρακάτω D-αυτόματο αναγνωρίζει τη γλώσσα του $\{a, b\}^*$ η οποία αποτελείται από τις λέξεις στις οποίες το a έχει περιττό αριθμό εμφανίσεων.



7.4 Ασκήσεις

1. Να συγκριθούν οι λέξεις $m_1 = aabaca$ και $m_2 = abc$ του $\mathcal{E}^*$, που έχει αλφάβητο $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$ και σύστημα σχέσεων του Thue:

$$ab \sim ba, ac \sim ca, aaa \sim \Box.$$

   Απάντηση: Είναι ισοδύναμες.

2. Να ορισθεί το σύνολο των λέξεων, μήκους 4, που αρχίζουν από a όταν $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$.

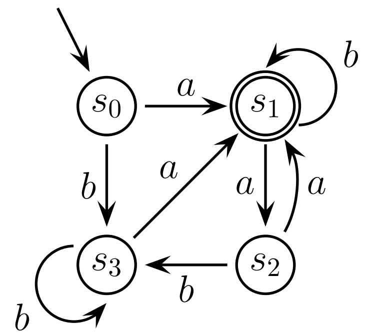
   Απάντηση: $\{aaaa, aaab, aaac, aaba, aabb, aabc, aaca, aacb, aacc, abaa, abab, abac, abba, abbb, abbc, abca, abcb, abcc, acaa, acab, acac, acba, acbb, acbc, acca, accb, accc\}$

3. Να ορισθεί το σύνολο των λέξεων, μήκους μικρότερου ή ίσου του 4, στις οποίες το a έχει περιττό αριθμό εμφανίσεων όταν $\mathcal{E} = \{a, b\}$.

4. Να ορισθεί το σύνολο των λέξεων, μήκους μικρότερου ή ίσου του 4, στις οποίες δεν εμφανίζονται τρία διαδοχικά b όταν $\mathcal{E} = \{a, b\}$.

5. Να βρεθεί ένα D-αυτόματο με $\mathcal{E} = \{a, b\}$ και $|S| = 4$, που να αναγνωρίζει τη γλώσσα η οποία αποτελείται από τις λέξεις στις οποίες το a έχει περιττό αριθμό εμφανίσεων.

   Απάντηση: Ένα τέτοιο D-αυτόματο είναι το παρακάτω:

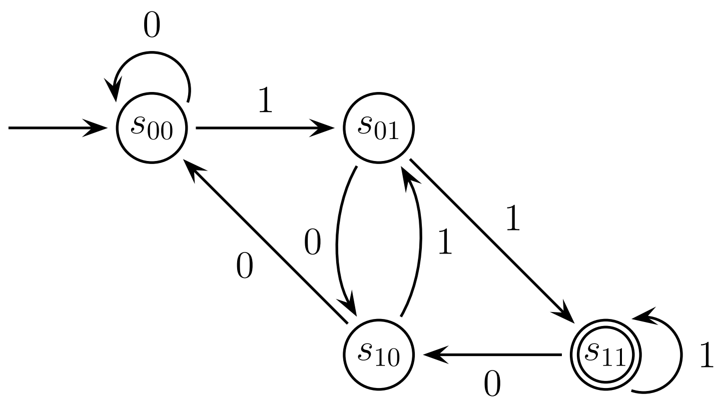


6. Να παρασταθεί με γράφημα το D-αυτόματο για το οποίο

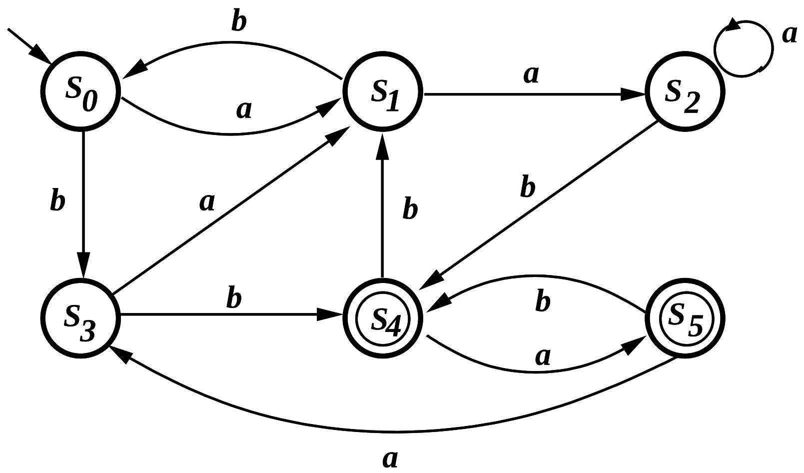
$$S = \{s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{11}\}, \mathcal{E} = \{0, 1\}, s_0 = s_{00}, T = \{s_{11}\}$$

και f τέτοια ώστε $f(s_{ij}, k) = s_{jk}$.

Απάντηση:



7. Να εξετασθεί αν το D-αυτόματο



αναγνωρίζει τις παρακάτω λέξεις: $w_1 = abbaabbab$, $w_2 = bbaabbaab$, $w_3 = babababa$.

Απάντηση: Το αυτόματο αναγνωρίζει τις w_1, w_2 αλλά όχι την w_3.

8. (i) Να δοθεί το γράφημα που περιγράφει το D-αυτόματο $(S, \mathcal{E}, T, s_0, f)$ όπου

$$S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}, \mathcal{E} = \{a, b\}, T = \{s_2, s_4\} \text{ και } f : S \times \mathcal{E} \to S$$

με

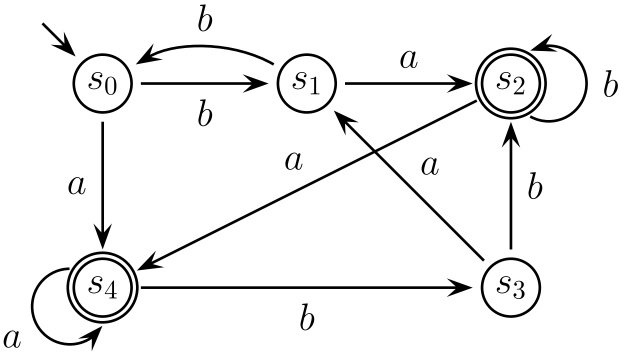
$$\begin{array}{ll} f(s_0, a) = s_4 & f(s_0, b) = s_1 \\ f(s_1, a) = s_2 & f(s_1, b) = s_0 \\ f(s_2, a) = s_4 & f(s_2, b) = s_2 \\ f(s_3, a) = s_1 & f(s_3, b) = s_2 \\ f(s_4, a) = s_4 & f(s_4, b) = s_3 \end{array}$$

(ii) Να εξετασθεί αν το αυτόματο αυτό αναγνωρίζει τις λέξεις: $w_1 = abababab$, $w_2 = baaabbabaaab$ και $w_3 = baabbaabaa$.

(iii) Έστω u μια λέξη που αποτελείται από m σε πλήθος a και v μια λέξη που αποτελείται από n σε πλήθος b $(m, n \in \mathbb{N}^*)$. Να δειχθεί ότι το παραπάνω D-αυτόματο αναγνωρίζει τη λέξη $w = vu$. Κάτω από ποιες προϋποθέσεις αναγνωρίζει τη λέξη $w' = uv$;

Απάντηση:

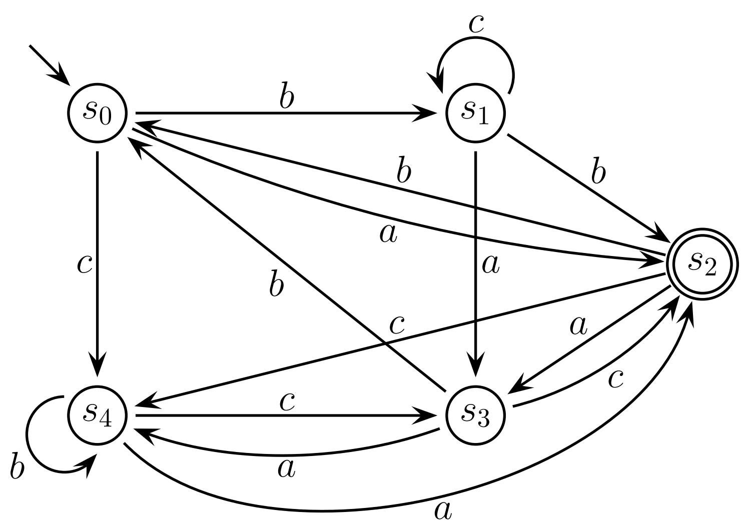
(i)



(ii) $f^*(w_1) = s_0 \notin T$ (άρα η w_1 δεν αναγνωρίζεται).
$f^*(w_2) = s_3 \notin T$ (άρα η w_2 δεν αναγνωρίζεται).
$f^*(w_3) = s_2 \in T$ (άρα η w_3 αναγνωρίζεται).

(iii) Αν ο n είναι άρτιος τότε $f^*(v) = s_0$, οπότε $f^*(w) = s_4 \in T$. Αν ο n είναι περιττός τότε $f^*(v) = s_1$, οπότε αν $m = 1$, τότε $f^*(w) = s_2 \in T$, ενώ αν $m \geq 2$ τότε $f^*(w) = s_4 \in T$. Αφού λοιπόν σε κάθε περίπτωση $f^*(w) \in T$, τότε η w αναγνωρίζεται από το αυτόματο. Εξάλλου, για κάθε m, $f^*(u) = s_4$, αν $n = 1$, τότε $f^*(w') = s_3 \notin T$, ενώ για κάθε $n \geq 2$, $f^*(w') = s_2 \in T$. Άρα το αυτόματο αναγνωρίζει την w' για κάθε m, n, με $n \neq 1$.

9. (i) Να ορισθεί αναλυτικά η συνάρτηση f του D-αυτόματου $(S, \mathcal{E}, T, s_0, f)$ το οποίο περιγράφεται από το επόμενο γράφημα:

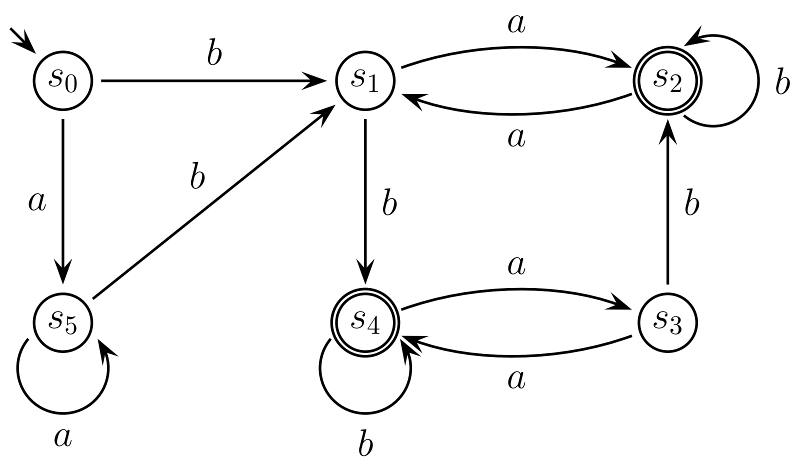


(ii) Να εξετασθεί αν το παραπάνω D-αυτόματο αναγνωρίζει τις λέξεις:

$$w_1 = abcabcabc, \quad w_2 = aaabbbccc, \quad w_3 = baccabbabcc.$$

(iii) Να δοθούν όλες οι δυνατές τιμές των $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε το παραπάνω αυτόματο να αναγνωρίζει τη λέξη $w = a^3 b^\mu c^\nu$.

10. Να ορισθούν αναλυτικά τα σύνολα $S, \mathcal{E}, T$ και η συνάρτηση f του D-αυτόματου $(S, \mathcal{E}, T, s_0, f)$ που περιγράφεται από το επόμενο γράφημα:



Επίσης, να εξετασθεί αν το αυτόματο αυτό αναγνωρίζει τις λέξεις: $w_1 = baaabbabbba$ και $w_2 = aaaabbaaaaba$.

Τέλος, να εξηγηθεί γιατί το αυτόματο αυτό δεν αναγνωρίζει οποιαδήποτε ζεύξη $m_1 m_2$, με $m_2 = baba$.