ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΚΑΤΗΓΟΡΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Πρωτοβάθμια Γλώσσα

Λόγω της περιορισμένης εκφραστικότητας της γλώσσας του Προτασιακού Λογισμού, εισάγουμε επιπλέον σύμβολα δημιουργώντας έτσι μια πιο πλούσια τυπική γλώσσα, που καλείται Πρωτοβάθμια Γλώσσα κι αποτελείται από τα παρακάτω σύμβολα:

Λογικά σύμβολα:

1. Οι σύνδεσμοι $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
2. Οι παρενθέσεις $($, $)$
3. Οι μεταβλητές (το πολύ αριθμήσιμες σε πλήθος) $x_1, x_2, \ldots$ (αντικαθιστούν τα άτομα του Προτασιακού Λογισμού)
4. Η ισότητα $\approx$
5. Οι ποσοδείκτες $\forall$ (για κάθε) και $\exists$ (υπάρχει)

Μη λογικά σύμβολα:

1. Κατηγορήματα (ή σχέσεις) P_i, όπου $i \in I$
2. Συναρτήσεις f_j, όπου $j \in J$
3. Σταθερές c_k, όπου $k \in K$

Τα σύνολα δεικτών I, J, K είναι το πολύ αριθμήσιμα.

Κατηγορήματα

Είναι εκφράσεις που περιγράφουν ιδιότητες αντικειμένων ή και σχέσεις μεταξύ τους.
Πιο αυστηρά, ένα κατηγόρημα P με n μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$, αντιστοιχίζεται σε μια τιμή αληθείας που συμβολίζεται με $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ όταν οι μεταβλητές πάρουν συγκεκριμένες τιμές (σταθερές) $(c_1, \ldots, c_n)$.

Παραδείγματα

- Αν Π το σύνολο των περιττών, τότε $\Pi(x) \Leftrightarrow x$ περιττός
- Αν $P = \{(x, y) : x^2 - y > 5\}$, τότε $P(x, y) \Leftrightarrow x^2 - y > 5$

Για μερικά κατηγορήματα χρησιμοποιούνται ειδικά σύμβολα, όπως $=, <, >, \in$.

Παράδειγμα

Στην έκφραση $(x < 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (x \cdot y > 0)$, τα x, y είναι μεταβλητές, τα $<, >$ είναι κατηγορήματα και η πράξη $\cdot$ είναι συνάρτηση. Τα υπόλοιπα σύμβολα είναι λογικά.

Παραδείγματα Πρωτοβάθμιων Γλωσσών

Γενικά, μια Πρωτοβάθμια Γλώσσα συμβολίζεται ως

$$L =< (P_i)_{i\in I}; (f_j)_{j\in J}; (c_k)_{k\in K} >$$

δηλαδή αναφέρονται μόνο τα μη λογικά σύμβολα (τα λογικά σύμβολα είναι κοινά για όλες).

Παραδείγματα

- Η γλώσσα της ισότητας $L =<;;>$
- Η γλώσσα της Θεωρίας Συνόλων $L =<\in;;>$
- Η γλώσσα της αριθμητικής των Φυσικών $L =<; +, \cdot, s; 0 >$, όπου $s(0) = 1, s(s(0)) = 2, \ldots$
- Η γλώσσα της Άλγεβρας Boole $L =<; +, \cdot, \bar{}\ ; 0, 1 >$

Εκφράσεις

Έστω L Πρωτοβάθμια γλώσσα.

Ορισμός

*Κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων ονομάζεται **έκφραση** της γλώσσας L.*

Οι **ορθά σχηματισμένες** εκφράσεις της L είναι

- οι όροι (ή ονόματα) και
- οι τύποι

Όροι

Ο ορισμός των όρων της L είναι επαγωγικός:

Ορισμός

Όροι της L είναι

- *οι μεταβλητές και οι σταθερές και*
- *κάθε έκφραση $f_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, όπου f_j είναι (n-μελής) συνάρτηση της L και $t_1, t_2, \ldots, t_n$, όροι που έχουν ήδη ορισθεί.*

Το σύνολο των όρων της L συμβολίζεται με $T(L)$.

Όροι

Παραδείγματα

Στη γλώσσα $L =<; +, \cdot, s; 0>$, το $s(0)$ είναι όρος και αντιστοιχεί στο 1, το $s(s(0))$ είναι όρος και αντιστοιχεί στο 2 κ.ο.κ.
Αν τα t_1, t_2 είναι όροι, τότε είναι και τα

$$t_1 + t_2, \qquad t_1 \cdot t_2.$$

Δεν είναι όρος (γιατί;) η έκφραση $s(x_1) \approx s(s(x_2))$.

Τύποι

Ο ορισμός των τύπων της L είναι επίσης επαγωγικός:

Ορισμός

Τύποι της L είναι

- *κάθε έκφραση $P_i(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, όπου P_i είναι (n-μελές) κατηγόρημα της L και $t_1, t_2, \ldots, t_n$ όροι της L,*
- *κάθε έκφραση $t \approx s$, όπου t, s όροι της L,*
- *κάθε έκφραση της μορφής $\neg\phi$ ή $\phi \Box \psi$, όπου ϕ, ψ τύποι της L,*
- *κάθε έκφραση της μορφής $(\forall x)\phi$ ή $(\exists x)\phi$, όπου ϕ τύπος της L και x μεταβλητή της L.*

Οι δύο πρώτες περιπτώσεις αντιστοιχούν στους **ατομικούς** τύπους.
Το σύνολο των τύπων της L συμβολίζεται με $F(L)$.

Τύποι

Παραδείγματα

Οι εκφράσεις

$$\neg(\exists x_i)(x_i \approx c_j)$$

$$(\forall x_1)((x_1 \approx f_k(c_1, c_2)) \to P_i(x_1, c_3))$$

είναι τύποι.
Δεν είναι τύπος (γιατί;) η έκφραση

$$P_i(x_1, x_2) \to ((\exists x_k)(\neg x_k))$$

Τύποι

Άσκηση

Να εξετασθεί ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι τύποι:

1. $(\exists x_1)(x_1 \approx c_1)$
2. $(x_1 \approx x_3) \rightarrow (\forall x_1)(x_1 \vee x_2)$
3. $(\forall x_1)\,(P(x_1, x_2) \vee ((\forall x_2)R(x_1, x_2) \vee (\forall x_1)P(x_1, x_2)))$

Εμβέλεια ποσοδείκτη

Στους τύπους $(\forall x)\phi$ και $(\exists x)\phi$, ο τύπος ϕ ονομάζεται **εμβέλεια** του αντίστοιχου ποσοδείκτη. Συνήθως χρησιμοποιούμε παρενθέσεις για να αποσαφηνίσουμε την εμβέλεια ενός ποσοδείκτη, αλλιώς ως εμβέλειά του θεωρείται ο ελάχιστος τύπος που ξεκινά αμέσως μετά τον ποσοδείκτη.

Παραδείγματα

Η εμβέλεια των $\forall x_1$ και $\exists x_2$ στην έκφραση

$$\forall x_1(x_1 > 0 \rightarrow \exists x_2(0 < x_2 \wedge x_2 \cdot x_1 = 1))$$

είναι αντίστοιχα οι τύποι

$$x_1 > 0 \rightarrow \exists x_2(0 < x_2 \wedge x_2 \cdot x_1 = 1)$$

και

$$(0 < x_2 \wedge x_2 \cdot x_1 = 1)$$

Ελεύθερες και δεσμευμένες μεταβλητές σε τύπους

Ορισμός

- *Κάθε εμφάνιση της μεταβλητής x σε έναν τύπο ονομάζεται* ***δεσμευμένη*** *όταν είναι της μορφής $\forall x$ ή $\exists x$ ή αν ανήκει στην εμβέλεια των ποσοδεικτών αυτών. Σε κάθε άλλη περίπτωση, η εμφάνιση ονομάζεται* ***ελεύθερη****.*
- *Η μεταβλητή x λέγεται* ***ελεύθερη*** *στον τύπο ϕ, αν έχει τουλάχιστον μια ελεύθερη εμφάνιση στον τύπο, αλλιώς λέγεται* ***δεσμευμένη****.*
- *Ο τύπος ϕ ονομάζεται* ***πρόταση*** *αν δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές.*
- *Το σύνολο των προτάσεων συμβολίζεται με $S(L)$.*
- *Οι τύποι με ελεύθερες μεταβλητές ονομάζονται* ***ανοικτοί****, ενώ οι προτάσεις ονομάζονται* ***κλειστοί*** *τύποι.*

Ελεύθερες και δεσμευμένες μεταβλητές σε τύπους

Παράδειγμα

Στον τύπο

$$((\forall x)P(x,y)) \vee ((\exists y)P(x,y))$$

οι μεταβλητές x, y είναι ελεύθερες, διότι έχουν από μία ελεύθερη και μία δεσμευμένη εμφάνιση. Επομένως, ο τύπος αυτός δεν είναι πρόταση.

Παράδειγμα

Ο τύπος

$$(\forall x_1)(\exists x_2)((x_1 < x_2) \vee (x_2 < x_1))$$

είναι πρόταση, ενώ ο τύπος

$$((\forall x)P(x)) \to ((\forall y)(x \approx y))$$

είναι ανοικτός (γιατί;).

Τύποι

Άσκηση

Να βρεθούν οι ελεύθερες και οι δεσμευμένες μεταβλητές στους παρακάτω τύπους:

1. $(\forall x)(\exists y(y \leq x) \vee (x \leq y))$
2. $(\forall x)((\forall y)(\forall z)P(x, y) \vee R(y, z) \vee S(z, x)))$

Ανοικτοί και κλειστοί όροι

Ορισμός

Ένας όρος που περιέχει μεταβλητές ονομάζεται ανοικτός, αλλιώς ονομάζεται κλειστός.

Οι μεταβλητές των όρων θεωρούνται ελεύθερες.

Παράδειγμα

Αν x μεταβλητή, a, b σταθερές και f συνάρτηση, τότε

- ο όρος $x + a$ είναι ανοικτός, ενώ
- ο όρος $f(a) + f(b)$ είναι κλειστός.

Επαγωγικός ορισμός

Όλες οι έννοιες που ορίστηκαν επαγωγικά για τις προτάσεις του Προτασιακού Λογισμού, π.χ. $\mathrm{sub}(\phi), r(\phi)$, κτλ, μπορούν να οριστούν όμοια και για τους τύπους μιας Πρωτοβάθμιας γλώσσας L.

Η βασική ιδέα είναι ότι ορίζουμε την έννοια πρώτα για τους όρους, στη συνέχεια την επεκτείνουμε στους ατομικούς τύπους και τέλος σε όλους τους τύπους

Επαγωγικός ορισμός

Συμβολίζουμε με F_0 το σύνολο των ατομικών τύπων της L.
Αν ορίσουμε μια απεικόνιση $f : F_0 \to V$ από το F_0 στο σύνολο V και αν ορίσουμε τις απεικονίσεις

$$G_\neg : V \to V, \quad G_\Box : V \times V \to V, \quad G_\exists, G_\forall : V \times \mathbb{N} \to V,$$

τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\overline{f} : F(L) \to V$, τέτοια ώστε για κάθε $\phi, \psi \in F(L)$ και για κάθε μεταβλητή x_i, $i \in \mathbb{N}^*$, της L

- $\overline{f}(\phi) = f(\phi)$, αν $\phi \in F_0$,
- $\overline{f}(\neg\phi) = G_\neg(\overline{f}(\phi))$,
- $\overline{f}(\phi\Box\psi) = G_\Box(\overline{f}(\phi), \overline{f}(\psi))$,
- $\overline{f}((\exists x_i)\phi) = G_\exists(\overline{f}(\phi), i)$,
- $\overline{f}((\forall x_i)\phi) = G_\forall(\overline{f}(\phi), i)$.

Επαγωγικός ορισμός - Παράδειγμα

Συμβολίζουμε με $FV(t)$ το σύνολο των (ελεύθερων) μεταβλητών του όρου t και με $FV(\phi)$ το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών του τύπου ϕ.

Ο επαγωγικός τους ορισμός είναι ο εξής:

Ορισμός του FV για όρους:

- $FV(x_i) = \{x_i\}$,
- $FV(c_j) = \emptyset$,
- $FV(f(t_1, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \cdots FV(t_n)$,

Ορισμός του FV για τύπους:

- $FV(P(t_1, \dots, t_n)) = FV(t_1) \cup \cdots FV(t_n)$,
- $FV(t \approx s) = FV(t) \cup FV(s)$,
- $FV(\neg\phi) = FV(\phi)$,
- $FV(\phi \Box \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$,
- $FV((\forall x_i)\phi) = FV((\exists x_i)\phi) = FV(\phi) \setminus \{x_i\}$,

Έστω A μια ιδιότητα της μεταγλώσσας που αναφέρεται στους τύπους της L. Γράφουμε $A(\phi)$ για να δηλώσουμε ότι ο τύπος ϕ ικανοποιεί την A.
Προκειμένου να αποδείξουμε επαγωγικά την $A(\phi)$, αρκεί να αποδείξουμε τα εξής:

1. $A(\phi)$, για κάθε ατομικό τύπο ϕ.
2. $A(\phi) \Rightarrow A(\neg\phi)$, για κάθε τύπο ϕ.
3. $A(\phi) \Rightarrow A(\neg\phi)$, για κάθε τύπο ϕ.
4. $A(\phi)$ και $A(\psi) \Rightarrow A(\phi \Box \psi)$, για κάθε ζεύγος τύπων ϕ, ψ.
5. $A(\phi) \Rightarrow A((\forall x)\phi)$ και $A((\exists x)\phi)$, για κάθε τύπο ϕ και για κάθε μεταβλητή x.

Αντικατάσταση

Συμβολίζουμε με $\phi(x)$ έναν τύπο ϕ με ελεύθερη μεταβλητή την x, για να τονίσουμε ότι οι μεταβλητή αυτή είναι ελεύθερη. Συμβολίζουμε με $\phi(x)|_{x=t}$ ή πιο απλά με $\phi(t)$ την **αντικατάσταση** της x στον ϕ με τον όρο t. Μπορούμε να φανταστούμε την $\phi(t)$ σαν μια ειδική περίπτωση της $\phi(x)$, οπότε αν γνωρίζουμε ότι ισχύει η $\phi(x)$ για κάθε x, είναι εύλογο να συμπεράνουμε ότι θα ισχύει και η $\phi(t)$, δηλαδή, να διατυπώσουμε ένα γενικό κανόνα

$$(\forall x)\phi(x) \to \phi(t).$$

Στην πραγματικότητα, το συμπέρασμα αυτό μπορεί να μην ισχύει σε κάποιες περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα:

Αντικατάσταση

Παράδειγμα

Αν $\phi(x) : (\exists y)\neg(y \approx x)$ και $t : y$, τότε

$$\phi(t) : (\exists y)\neg(y \approx y).$$

Η $\phi(x)$ προφανώς ισχύει όταν τα x, y παίρνουν τιμές σε κάποιο σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία, όμως η $\phi(t)$ δεν ισχύει ποτέ.
Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι η ελεύθερη εμφάνιση της x στην $\phi(x)$ αντικαθίσταται από μια εμφάνιση μεταβλητής του t η οποία είναι δεσμευμένη, διότι βρίσκεται στην εμβέλεια του ποσοδείκτη $\exists y$.

Κατόπιν τούτων, οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

Αντικατάσταση

Ορισμός

Λέμε ότι η ελεύθερη μεταβλητή x του τύπου $\phi(x)$ είναι ***αντικαταστάσιμη*** *από τον όρο t, όταν κάθε ελεύθερη εμφάνιση της x (στην $\phi(x)$) αντικαθίσταται μόνο από ελεύθερες εμφανίσεις (στην $\phi(t)$) των μεταβλητών της t.*

Παράδειγμα

Για τον τύπο

$$\phi(x) : ((\exists y)R(x, y)) \wedge ((\exists z)Q(x, z))$$

και τους όρους $t : f(w, u)$ και $s : g(y, x)$, η μεταβλητή x είναι αντικαταστάσιμη από τον t αλλά όχι από τον s.

Αντικατάσταση - Επαγωγικός ορισμός

Η αντικατάσταση μπορεί να ορισθεί επαγωγικά ως εξής:

Ορισμός

Λέμε ότι η ελεύθερη μεταβλητή x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον τύπο $\phi(x)$ ανν ο ϕ

- *είναι ατομικός τύπος ή*
- *είναι της μορφής $\neg\psi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ ή*
- *είναι της μορφής $\psi\Box\chi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ και στον χ ή*
- *είναι της μορφής $(\forall y)\psi$ ή $(\exists y)\psi$ και η x είναι αντικαταστάσιμη από τον t στον ψ και και η y δεν εμφανίζεται στον t.*

Αντικατάσταση

Άσκηση

Να εξετασθεί σε ποιούς από τους παρακάτω τύπους η x είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο $t : z + y$:

1. $(\forall y)(y \leq z) \vee (x \leq y)$
2. $(\forall y)((y \leq z) \vee (x \leq y))$

Ασκήσεις

1. Αν $P(n)$: ''ο n είναι πρώτος'' και $D(d, n)$: ''ο d διαιρεί τον n'', να εκφραστεί στην ελληνική γλώσσα η ακόλουθη έκφραση:

   $$(\exists n)(n > 1 \wedge \neg P(n) \wedge (\forall d)(d > 1 \wedge d < n \wedge D(d, n) \rightarrow P(d)))$$

   Στη συνέχεια, να δοθεί μια τιμή για το n, η οποία επιβεβαιώνει τον παραπάνω ισχυρισμό.
2. Αν $R(x)$: ''ο x είναι δρομέας'' και $T(x, d)$: ''ο x τρέχει τη μέρα d'', να εκφραστούν στην Πρωτοβάθμια γλώσσα οι ακόλουθες προτάσεις:
   - Κάθε δρομέας τρέχει τουλάχιστον μια μέρα.
   - Υπάρχει μέρα κατά την οποία τρέχουν όλοι οι δρομείς.