

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το γνωστικό πεδίο των Σημάτων και Συστημάτων αναπτύσσεται με γρήγορο και αδιάκοπο ρυθμό επί μια σειρά δεκαετιών και πλέον αποτελεί ένα αντικείμενο υποδομής σε προπτυχιακά πανεπιστημιακά προγράμματα σπουδών διαφόρων κατευθύνσεων, συμπεριλαμβανομένων των κατευθύνσεων των μηχανικών και των θετικών επιστημών, αλλά και των οικονομικών, κοινωνικών και πολιτικών επιστημών. Βεβαίως, οι σύγχρονες τεχνολογίες της Πληροφορικής επωφελούνται και αυτές από εφαρμογές της θεωρίας των Σημάτων και Συστημάτων. Σήμερα, το γνωστικό αντικείμενο των Σημάτων και Συστημάτων, καθώς και οι εφαρμογές του στις σύγχρονες τεχνολογίες Πληροφορικής, είναι εξαιρετικά ευρύ και πολυποίκιλο και μια προσπάθεια πλήρους καταγραφής του αποτελεί ένα φιλόδοξο και επίπονο έργο. Παράλληλα, η αυστηρή ανάπτυξη της θεωρίας των Σημάτων και Συστημάτων απαιτεί και μια μαθηματική ωριμότητα που σπάνια συναντάει κανείς στο επίπεδο των πρώτων ετών προπτυχιακών θετικών σπουδών. Για τους λόγους αυτούς, δεν είναι γνωστή η παιδαγωγικά βέλτιστη μέθοδος προσέγγισης του αντικειμένου και συναφή εγχειρίδια διαφέρουν ως προς τη δομή και την οργάνωση της ύλης.

Το παρόν βιβλίο έχει συγγραφεί με σκοπό να εξοικειώσει από νωρίς προπτυχιακούς φοιτητές Τμημάτων Πληροφορικής ελληνικών Πανεπιστημίων με τις βασικές αρχές και κάποιες εφαρμογές της σύγχρονης θεωρίας των Σημάτων και Συστημάτων και να θέσει τα θεμέλια για τη διδασκαλία εξειδικευμένων τεχνολογικών μαθημάτων σε προχωρημένα εξάμηνα του προγράμματος σπουδών, όπως Αναγνώρισης Προτύπου, Δικτύων Υπολογιστών, Ανάλυσης Εικόνας, Τεχνητής Όρασης, Συστημάτων Πολυμέσων, Επεξεργασίας Φωνής, κ.ο.κ. Για το λόγο αυτό, επιλέχθηκαν για παρουσίαση κεφάλαια τα οποία προαπαιτούν μόνο γνώσεις που έχουν ήδη αποκτήσει οι φοιτητές κατά το πρώτο έτος των σπουδών τους. Πιο συγκεκριμένα, για την επιτυχή μελέτη του βιβλίου προαπαιτούνται γνώσεις απειροστικού λογισμού, γραμμικής άλγεβρας και πιθανοθεωρίας, αλλά και προγραμματισμού ηλεκτρονικών υπολογιστών, στο βαθμό που αυτές καλύπτονται κατά

το πρώτο και δεύτερο εξάμηνο σπουδών του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς ή άλλων ομοειδών Τμημάτων. Παράλληλα, έχει δοθεί έμφαση στην κατά πλάτος και όχι σε βάθος ανάπτυξη της θεωρίας ώστε να παρουσιαστούν κατά το δυνατό περισσότερες πλευρές του αντικειμένου των Σημάτων και Συστημάτων. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτό οδήγησε σε αναγκαστική θυσία της μαθηματικής αυστηρότητας. Για παράδειγμα, η συνάρτηση δέλτα συνεχούς χρόνου “ορίζεται” ως το όριο μιας ακολουθίας συνήθων συναρτήσεων. Με τον τρόπο αυτό, αποφεύγεται η σκόπελος της μαθηματικής θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων και ο αναγνώστης αποκτά την ευχέρεια να κατανοεί και να χειρίζεται ορθά έννοιες των Σημάτων και Συστημάτων χωρίς να προαπαιτείται μελέτη της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων. Κάθε κεφάλαιο συμπληρώνεται με εφαρμογές της θεωρίας σε τεχνολογίες της σύγχρονης Πληροφορικής έτσι ώστε να δημιουργούνται στον αναγνώστη ερεθίσματα και παραπομπές για μελέτη και άλλων γνωστικών αντικειμένων της σύγχρονης Επιστήμης των Υπολογιστών. Με τον τρόπο αυτό, γίνεται περισσότερο κατανοητή η θέση των Σημάτων και Συστημάτων σε ένα τυπικό πρόγραμμα σύγχρονων σπουδών Πληροφορικής.

Για την καλύτερη παρουσίαση του περιεχομένου του, το βιβλίο οργανώθηκε σε δώδεκα κεφάλαια και τέσσερα παραρτήματα. Τα κεφάλαια αναφέρονται σε Εισαγωγικές Έννοιες των Σημάτων και Συστημάτων, Μετασχηματισμούς Σημάτων, Δειγματοληψία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου, Γραμμικά και Μη Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα Volterra, Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα, Μορφολογικές Αναπαραστάσεις Σημάτων και Συστημάτων, Βασικές Έννοιες Συστημάτων Επικοινωνίας, Συστήματα Ψηφιακών Επικοινωνιών, Συστήματα Ασαφούς Λογικής, Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα και Συστήματα Εξελικτικού Υπολογισμού. Παράλληλα, το πρώτο παράρτημα του βιβλίου περιέχει μια αντιπροσωπευτική συλλογή θεωρητικών ασκήσεων σε θέματα Σημάτων και Συστημάτων, ενώ το δεύτερο παρουσιάζει αρκετά λεπτομερειακά το υπολογιστικό πακέτο MATLAB, ένα πακέτο που παρέχει τη δυνατότητα εύκολης και γρήγορης υλοποίησης των μεθοδολογιών που αναπτύσσονται στο βιβλίο.

Στο τρίτο παράρτημα παρουσιάζονται αντιπροσωπευτικές υπολογιστικές εργασίες πάνω στην ύλη των Σημάτων και Συστημάτων. Τέλος, το τέταρτο παράρτημα περιέχει μια αντιπροσωπευτική ελληνική και ξένη βιβλιογραφία σε θέματα θεωρίας και εφαρμογών Σημάτων και Συστημάτων.

Κάποιες πλευρές των Σημάτων και Συστημάτων δεν καλύπτονται στο βιβλίο αυτό. Για παράδειγμα, επικεντρωνόμαστε περισσότερο στην **ανάλυση σημάτων (συστημάτων) (signals (system) analysis)** και δεν ασχολούμαστε καθόλου με το ευρύ αντικείμενο του **σχεδιασμού σημάτων (συστημάτων) (signals (system) design)** καθόσον αυτό ξεφεύγει από τους στόχους του παρόντος βιβλίου. Για τον ίδιο λόγο δεν ασχολούμαστε με θέματα **αυτομάτου ελέγχου (automatic control)** συστημάτων.

Από τη θέση αυτή, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε θερμά τους κκ. Κ. Γκυρτή (διδάκτορα), Α. Θεοδόση (υποψηφία διδάκτορα), Α.-Ε. Οικονόμου και Α. Δοντά (απόφοιτους) του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς και Γ. Δεβελέκο (υποψήφιο διδάκτορα) του Πανεπιστημίου του Miami για την αμέριστη προσφορά της βοήθειάς τους στη δακτυλογράφηση του κειμένου, τη σχεδίαση των σχημάτων του βιβλίου και το λεπτομερή έλεγχο του τελικού κειμένου. Θα θέλαμε ακόμα να ευχαριστήσουμε όλους τους φοιτητές του Τμήματος Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πειραιώς οι οποίοι, με τον ενθουσιασμό τους, μας παρότρυναν να μετατρέψουμε τις αρχικές σημειώσεις σε ένα πλήρες βιβλίο.

Οι συγγραφείς

Περιεχόμενα

I Θεωρητικά Κεφάλαια Σημάτων και Συστημάτων	17
1 Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα	19
1.1 Έννοια του σήματος	19
1.1.1 Μονοδιάστατα σήματα	21
1.1.2 Δισδιάστατα και πολυδιάστατα σήματα	25
1.1.3 Συνάρτηση δέλτα συνεχούς χρόνου	29
1.1.4 Δέλτα του Kronecker	31
1.2 Έννοια του συστήματος	33
1.2.1 Βασικές ιδιότητες συστημάτων	35
2 Μετασχηματισμοί Σημάτων	37
2.1 Ο μετασχηματισμός Fourier	37
2.1.1 Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier	37
2.1.2 Η σειρά Fourier	39
2.1.3 Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier	40
2.1.4 Ταχείς αλγόριθμοι διακριτού μετασχηματισμού Fourier	43
2.1.5 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier	51
2.1.6 Ο μετασχηματισμός Fourier σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις	53
2.2 Ορθομοναδιαίοι μετασχηματισμοί	54
2.3 Αναπτύγματα σειρών κυματιδίου	57

3	Δειγματοληψία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου	63
3.1	Περιοδική δειγματοληψία	65
3.1.1	Το θεώρημα δειγματοληψίας	65
3.1.2	Γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις	66
3.2	Τυχαία ή μη περιοδική δειγματοληψία	66
3.2.1	Ανελίξεις τυχαίων σημείων	67
3.2.2	Αθροιστική τυχαία δειγματοληψία	68
3.3	Κβάντωση σημάτων	71
3.3.1	Σφάλμα κβάντωσης	72
4	Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα	75
4.1	Η ιδιότητα της γραμμικότητας	75
4.2	Κρουστική απόκριση και συνέλιξη	75
4.2.1	Κρουστική απόκριση	76
4.2.2	Συνέλιξη	77
4.3	Αιτιατότητα και ευστάθεια	78
4.4	Αρμονική απόκριση και συνάρτηση μεταφοράς	78
5	Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα Volterra	81
5.1	Ομογενή συστήματα Volterra τάξης n	81
5.1.1	Κρουστική απόκριση	84
5.1.2	Αιτιατότητα και ευστάθεια	84
5.1.3	Αρμονική απόκριση και συνάρτηση μεταφοράς	85
5.2	Μη ομογενή (πολυωνυμικά) συστήματα Volterra τάξης n	85
5.3	Θεωρήματα προσέγγισης μη γραμμικών συστημάτων	86
5.3.1	Αναλυτική θεωρία	86
5.3.2	Πολυωνυμική θεωρία	87
6	Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα	89
6.1	Γενικά	89
6.2	Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης	91
6.3	Επαναληπτικές απεικονίσεις	93
6.3.1	Η γραμμική απεικόνιση	94

<i>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</i>	11
6.3.2 Ορισμός και μετασχηματισμοί της λογιστικής απεικόνισης	96
6.3.3 Τα σημεία προσήλωσης της λογιστικής απεικόνισης και η ευστάθειά τους	97
6.3.4 Η διαδρομή προς το χάος μέσα από διπλασιασμούς της περιόδου και οι σταθερές του Feigenbaum	100
6.3.5 Χάος και παράδοξοι προσελκυστές	102
6.3.6 Το κρίσιμο σημείο και οι επαναλήψεις του	103
6.4 Κυτταρώδη αυτόματα	104
7 Μορφολογικά Σήματα και Συστήματα	113
7.1 Γενικά	113
7.2 Βασικές μορφολογικές πράξεις	115
7.3 Αναπαράσταση σημάτων με σημειοσύνολα	117
7.4 Αναπαράσταση συστημάτων με μορφολογικά φίλτρα	120
8 Συστήματα Επικοινωνίας	123
8.1 Εισαγωγή	123
8.2 Αναλογικά και Ψηφιακά Συστήματα Επικοινωνίας	125
8.3 Διαμόρφωση	130
8.3.1 Διαμόρφωση συνεχούς κύματος	131
8.3.2 Διαμόρφωση Παλμών	133
8.3.3 Γιατί διαμορφώνουμε;	135
8.4 Αναλογική Διαμόρφωση Εύρους	136
8.4.1 Διαμόρφωση εύρους DSB/SC	136
8.4.2 Διαμόρφωση AM (DSB/LC:Double Sideband Large Carrier)	145
8.4.3 Διαμόρφωση εύρους με μονή πλευρική ζώνη (SSB: Single Sideband)	152
8.4.4 Διαμόρφωση VSB (Vestigial SideBand)	154
8.5 Διαμόρφωση Γωνίας	156
8.5.1 Διαμόρφωση Συχνότητας (FM: Frequency Modulation)	156

8.5.2	Διαμόρφωση Φάσης (PM: Phase Modulation)	157
8.5.3	Διαμόρφωση FM στενής ζώνης (NBFM: Narrow Band FM)	158
8.5.4	Διαμόρφωση FM ευρείας ζώνης	158
8.5.5	Διαμόρφωση σήματος WBFM	162
8.5.6	Αποδιαμόρφωση σημάτων FM	165
8.6	Διαμόρφωση Εύρους Παλμών	166
8.7	Συμπεριφορά συστημάτων παρουσία θορύβου	170
8.8	Πολύπλεξη (Multiplexing)	171
8.8.1	Πολύπλεξη με διαίρεση συχνότητας FDM: Frequency Division Multiplexing	172
8.8.2	Πολύπλεξη με διαίρεση χρόνου (TDM: Time Division Multiplexing)	173
8.8.3	Πολύπλεξη με Διαίρεση Κώδικα (CDMA)	175
9	Συστήματα Ψηφιακών Επικοινωνιών	177
9.1	Παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM: Pulse Code Modulation)	178
9.1.1	Ομοιόμορφη - Μη ομοιόμορφη κβάντωση	181
9.2	Μετάδοση δυαδικών ψηφίων	184
9.3	Το θεώρημα των Shannon-Hartley	186
9.4	Ανίχνευση δυαδικών σημάτων	188
9.4.1	Παραδείγματα επίδοσης ψηφιακών σημάτων	191
9.4.2	Μετάδοση στη βασική ζώνη με πολλαπλά επίπεδα	194
9.4.3	Άλλες τεχνικές μείωσης εύρους ζώνης	195
9.4.4	Διαμόρφωση Δέλτα	200
9.4.5	Προσαρμοσμένη διαμόρφωση Δέλτα (Adaptive Delta Modulation, ADM)	201
9.5	Ζωνοπερατές ψηφιακές τεχνικές διαμόρφωσης	203
9.5.1	Ανίχνευση / Αποδιαμόρφωση ζωνοπερατών ψηφιακών σημάτων	207
9.5.2	Επίδοση ψηφιακών ζωνοπερατών σημάτων	215
9.5.3	Σήματα με πολλαπλά επίπεδα	217

9.5.4	Χρήση εύρους ζώνης	221
10	Συστήματα Ασαφούς Λογικής	227
10.1	Εισαγωγή στην Ασαφή Λογική	227
10.2	Εισαγωγή στα συστήματα ασαφούς λογικής	233
10.2.1	Αντικειμενική και υποκειμενική γνώση	233
10.2.2	Συστήματα Ασαφούς Λογικής (ΣΑΛ)	235
10.2.3	Κανόνες	235
10.2.4	Ασαφής Αποφαντική Μηχανή	242
10.2.5	Ασαφοποίηση	244
10.2.6	Αποσαφήνιση	245
10.3	Εφαρμογή της Ασαφούς Λογικής σε Δίκτυα Υπολογιστών	248
10.3.1	Εισαγωγικά για τα δίκτυα ATM	248
10.3.2	Προβλήματα στον έλεγχο συμφόρησης και ροής κίνησης	250
10.3.3	Έλεγχος συμφόρησης σε δίκτυα ATM χρησιμοποιώντας ένα Ασαφές Σύστημα	252
10.3.4	Αποτελέσματα	256
11	Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα	261
11.1	Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα πολλαπλών επιπέδων	264
11.2	Αναδρομικά (επαναληπτικά) τεχνητά νευρωνικά δίκτυα	266
11.3	Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων βάσης	267
11.4	Εφαρμογή των νευρωνικών δικτύων σε δίκτυα	269
11.4.1	Εισαγωγικά	270
11.4.2	Μοντέλα	272
11.4.3	Προσομοιώσεις	280
11.4.4	Συμπεράσματα	282
12	Συστήματα Εξελικτικού Υπολογισμού	285
12.1	Γενικά	285
12.2	Το πρόβλημα των υποθέσεων	289

12.3	Εξελικτικά βήματα	291
12.4	Γέννηση	296
12.5	Εφαρμογές	299
12.6	Έλεγχοι δρομολόγησης με Γενετικούς Αλγόριθμους	308
12.6.1	Αλγόριθμος ανάθεσης ροής	311
12.6.2	Συνάρτηση καταλληλότητας	315
12.6.3	Αποτελέσματα	317
12.6.4	Ιεραρχικό δίκτυο	317
12.6.5	Ισπανικό υπεραστικό PSTN	319
12.6.6	Συμπεράσματα	320
II	Παραρτήματα	323
A'	Θεωρητικές Ασκήσεις	325
B'	Το Προγραμματιστικό Περιβάλλον MATLAB	329
B'.1	Γενικά	329
B'.2	Ξεκινώντας με το MATLAB	332
B'.2.1	Μήτρες και μαγικά τετράγωνα	332
B'.2.2	Δείκτες	335
B'.2.3	Η συνάρτηση magic	338
B'.3	Εκφράσεις	339
B'.3.1	Μεταβλητές	340
B'.3.2	Αριθμοί	340
B'.3.3	Τελεστές	343
B'.4	Το παράθυρο εντολών	345
B'.4.1	Η εντολή format	346
B'.4.2	Καταπίεση της εξόδου	348
B'.4.3	Μακροσκελείς εκφράσεις	348
B'.4.4	Δουλεύοντας στην γραμμή εντολών	348
B'.5	Γραφικά	349
B'.5.1	Κατασκευή ενός σχεδιαγράμματος	350
B'.5.2	Παράθυρα σχεδίασης	351
B'.5.3	Προσθήκη σχεδίων σε υπαρκτό γράφημα	351

B'.5.4	Τμηματικά σχεδιαγράμματα	352
B'.5.5	Φανταστικά και μιγαδικά δεδομένα	353
B'.5.6	Έλεγχος των αξόνων	354
B'.5.7	Επιγραφές και τίτλοι αξόνων	355
Γ'	Υπολογιστικές Ασκήσεις	357
Γ'.1	Δειγματοληψία και αναδίπλωση σήματος	357
Γ'.2	Μετασχηματισμοί Fourier	358
Γ'.3	Δημιουργία μουσικού κομματιού	358
Γ'.4	Συμπίεση εικόνας με χρήση μετασχηματισμών	360
Γ'.5	Θόλωση και αποθόλωση εικόνας	361
Γ'.6	Το σύστημα ψηφιακών επικοινωνιών BPSK	362
Γ'.7	Προσέγγιση συναρτήσεων από τεχνητό νευρωνικό δί- κτυο	362
Δ'	Βιβλιογραφία	363
Δ'.1	Ελληνική	363
Δ'.2	Ξένα	363

Μέρος Ι

Θεωρητικά Κεφάλαια Σημάτων και Συστημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα Σήματα και Συστήματα

1.1 Έννοια του σήματος

Ο όρος **σήμα (signal)** υποδηλώνει μια συνάρτηση που απεικονίζει μια ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές ενός συνόλου I (πεδίου ορισμού) σε μια ή περισσότερες εξαρτημένες μεταβλητές ενός συνόλου U (πεδίου τιμών). Τυπικά παραδείγματα σημάτων, με άμεσο τεχνολογικό ενδιαφέρον, αποτελούν τα επόμενα:

- Ηλεκτρικά ρεύματα ή διαφορές δυναμικού σε ηλεκτρομαγνητικά κυκλώματα ως συναρτήσεις του χρόνου.
- Μηχανικά μεγέθη, όπως συντεταγμένες θέσης και ταχύτητας δορυφόρων, αεροπλάνων και ρομποτικών βραχιόνων, ως συναρτήσεις του χρόνου.
- Φωνή, μουσική και άλλα ακουστικά σήματα ως συναρτήσεις του χρόνου.
- Δισδιάστατες εικόνες, δηλαδή απεικονίσεις της κατανομής κάποιας ιδιότητας ως συναρτήσεις δυο χωρικών συντεταγμένων.

- Σήματα video, δηλαδή ακολουθίες διαστάσεων εικόνων, κάθε μια από τις οποίες αντιστοιχεί σε διαφορετική χρονική στιγμή.
- Πολυδιάστατες εικόνες, δηλαδή απεικονίσεις της κατανομής κάποιας ιδιότητας, ως συναρτήσεις δύο ή τριών χωρικών συντεταγμένων και άλλων παραμέτρων όπως μήκους κύματος, πόλωσης, κτλ.
- Βιοϊατρικά σήματα, όπως ηλεκτροκαρδιογράφημα, ηλεκτροεγκεφαλογράφημα, κτλ.
- Οικονομικές χρονοσειρές, όπως η τιμή μιας μετοχής ως συνάρτηση του χρόνου.
- Μετεωρολογικά δεδομένα, όπως μετρήσεις της θερμοκρασίας, ύψους βροχής, ταχύτητας του ανέμου, ηλιακών κηλίδων, κτλ. ως συναρτήσεις του χρόνου και χωρικών συντεταγμένων.
- Ακολουθίες χρόνων μετάδοσης πακέτων δεδομένων, αριθμού προσπαθειών για διαβίβαση ενός πακέτου δεδομένων, κτλ. σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα.
- Ακολουθίες δυαδικών ψηφίων (πχ., το περιεχόμενο ενός ηλεκτρονικού αρχείου) που επεξεργάζεται η κεντρική επεξεργαστική μονάδα ενός ψηφιακού υπολογιστή.

Ο παραπάνω ορισμός της έννοιας του σήματος είναι ευρύς, όπως γίνεται φανερό και από τα παραδείγματα που αναφέρθηκαν. Επομένως, μια περαιτέρω ταξινόμηση των σημάτων είναι χρήσιμη. Όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές του σήματος λαμβάνουν τιμές σε ένα συνεχές (διακριτό) σύνολο, το σήμα θα ονομάζεται **σήμα συνεχούς (διακριτού) χρόνου (continuous (discrete) time signal)**. Αντίστοιχα, όταν οι τιμές του σήματος καλύπτουν ένα συνεχές (διακριτό) σύνολο, το σήμα θα ονομάζεται **αναλογικό (ψηφιακό) σήμα (analog (digital) signal)**. Επομένως, μια εικόνα αποθανατισμένη πάνω σε φωτογραφικό φιλμ αποτελεί ένα αναλογικό σήμα συνεχούς χρόνου. Αντίθετα, ένα ηλεκτρονικό αρχείο αποτελεί ένα ψηφιακό

σήμα διακριτού χρόνου. Τέλος, η ακολουθία των τιμών κλεισίματος του γενικού δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών αποτελεί ένα αναλογικό σήμα διακριτού χρόνου, ενώ το μέγεθος σε bytes του ελεύθερου χώρου στο δίσκο ενός υπολογιστή είναι ένα ψηφιακό σήμα συνεχούς χρόνου.

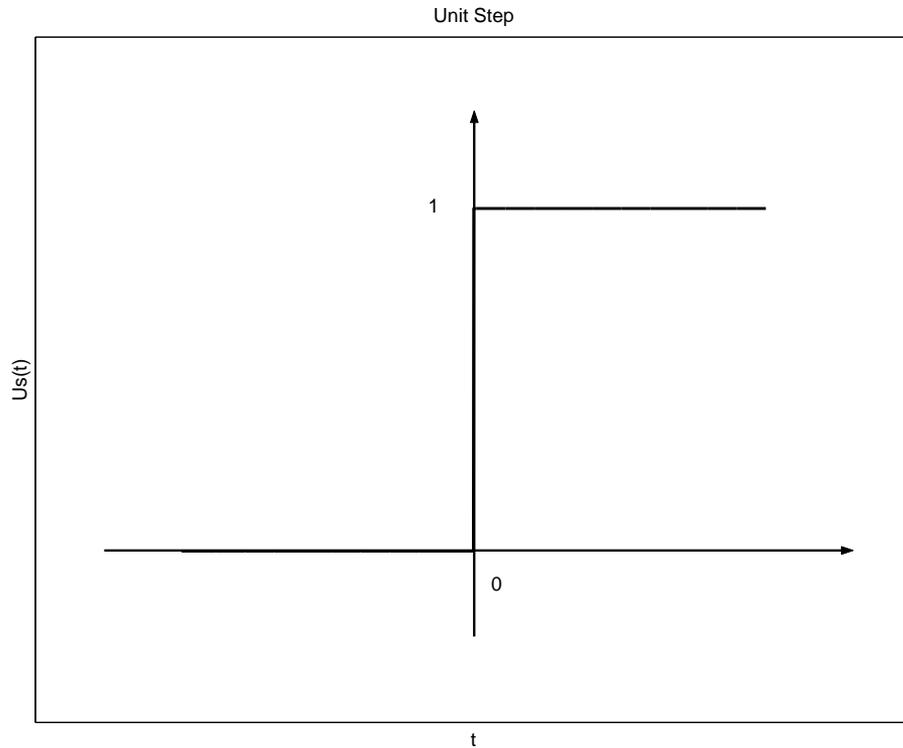
Κάτω από ορισμένες συνθήκες, ένα σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να αναπαρασταθεί επακριβώς (χωρίς απώλεια πληροφορίας) από ένα σήμα διακριτού χρόνου που αποτελείται από την ακολουθία των τιμών (δειγμάτων) του σήματος συνεχούς χρόνου σε κατάλληλες χρονικές στιγμές. Η διαδικασία δειγματοληψίας ενός σήματος συνεχούς χρόνου καθορίζεται από θεωρήματα δειγματοληψίας, τα σημαντικότερα από τα οποία εξετάστούν αργότερα.

1.1.1 Μονοδιάστατα σήματα

Ένα **μονοδιάστατο** σήμα εκφράζει τη μεταβολή μιας μεταβλητής, έστω x , σε σχέση με μια άλλη μεταβλητή, έστω t . Δηλαδή, ορίζεται ως μια συνάρτηση $x(\cdot)$ τέτοια ώστε $t \rightarrow x(t)$. Συνήθως, η ανεξάρτητη μεταβλητή t αναφέρεται στο χρόνο και λαμβάνει τιμές από το πεδίο ορισμού I του σήματος, ενώ η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $x(t)$. Οι τιμές του σήματος περιορίζονται σε κάποιο πεδίο τιμών του U .

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή ενός μονοδιάστατου σήματος μεταβάλλεται σε ένα συνεχές διάστημα, δηλαδή το πεδίο ορισμού I είναι ένα διάστημα (πιθανώς απείρου μήκους) της ευθείας \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών, τότε το σήμα ονομάζεται **σήμα συνεχούς χρόνου**. Στις πιο συνηθισμένες περιπτώσεις σημάτων συνεχούς χρόνου, $I = \mathbb{R}$ ή $I = \mathbb{R}^+$, όπου \mathbb{R}^+ είναι το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

Μερικά βασικά μονοδιάστατα σήματα συνεχούς χρόνου είναι τα ακόλουθα:



Σχήμα 1.1: Γραφική παράσταση του σήματος μοναδιαίου βήματος συνεχούς χρόνου.

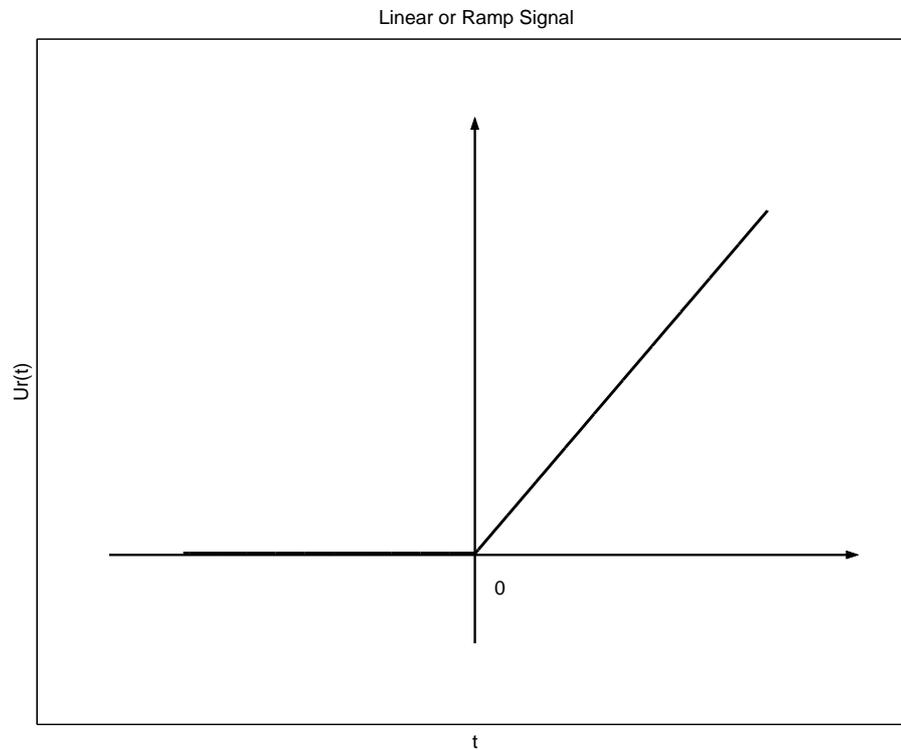
- Το **μοναδιαίο βήμα (unit step)**, που δίνεται από τη σχέση

$$u_s(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

- Το **γραμμικό σήμα (linear signal) ή σήμα ράμπας (ramp signal)**, που δίνεται από τη σχέση

$$u_r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

- Το **ημιτονοειδές σήμα (sinusoidal signal)**, που δίνεται

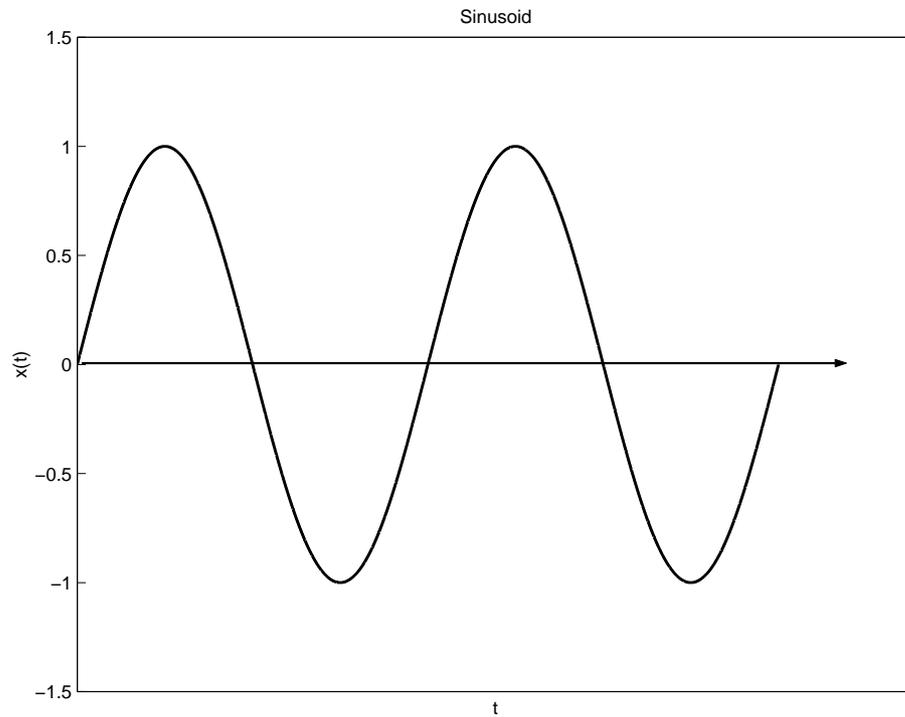


Σχήμα 1.2: Γραφική παράσταση του σήματος ράμπας συνεχούς χρόνου.

από τη σχέση

$$x(t) = \sin \omega t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή ενός μονοδιαστάτου σήματος λαμβάνει τιμές από ένα διακριτό σύνολο, δηλαδή αν το πεδίο ορισμού I είναι ένα διακριτό σύνολο, τότε αντίστοιχο σήμα λέγεται **σήμα διακριτού χρόνου (discrete-time signal)**. Οι πιο συνηθισμένες περιπτώσεις σημάτων διακριτού χρόνου συναντώνται όταν $I = \mathbb{Z}$ ή όταν $I = \mathbb{Z}^+$, όπου \mathbb{Z}^+ παριστάνει το σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων αριθμών. Ένα σήμα διακριτού χρόνου παριστάνεται ως μια ακολουθία αριθμών. Στα σήματα διακριτού χρόνου, η ανεξάρτητη μεταβλητή παριστάνεται συνήθως με n , η αντίστοιχη τιμή του σήματος



Σχήμα 1.3: Γραφική παράσταση του ημιτονοειδούς σήματος συνεχούς χρόνου.

με $x(n)$ και η χρονική εξέλιξη με $n \rightarrow x(n)$.

Μερικά βασικά σήματα διακριτού χρόνου είναι:

- Το **μοναδιαίο βήμα**, που δίνεται από τη σχέση

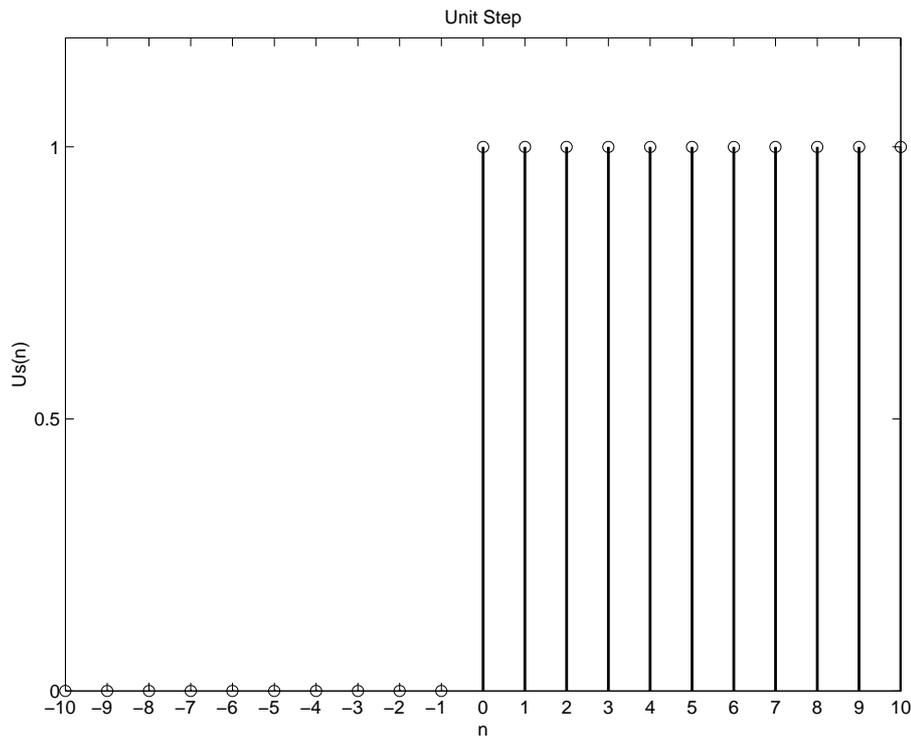
$$u_s(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

- Το **γραμμικό σήμα** ή **σήμα ράμπας**, που δίνεται από τη σχέση

$$u_r(n) = \begin{cases} n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

- Το ημιτονοειδές σήμα

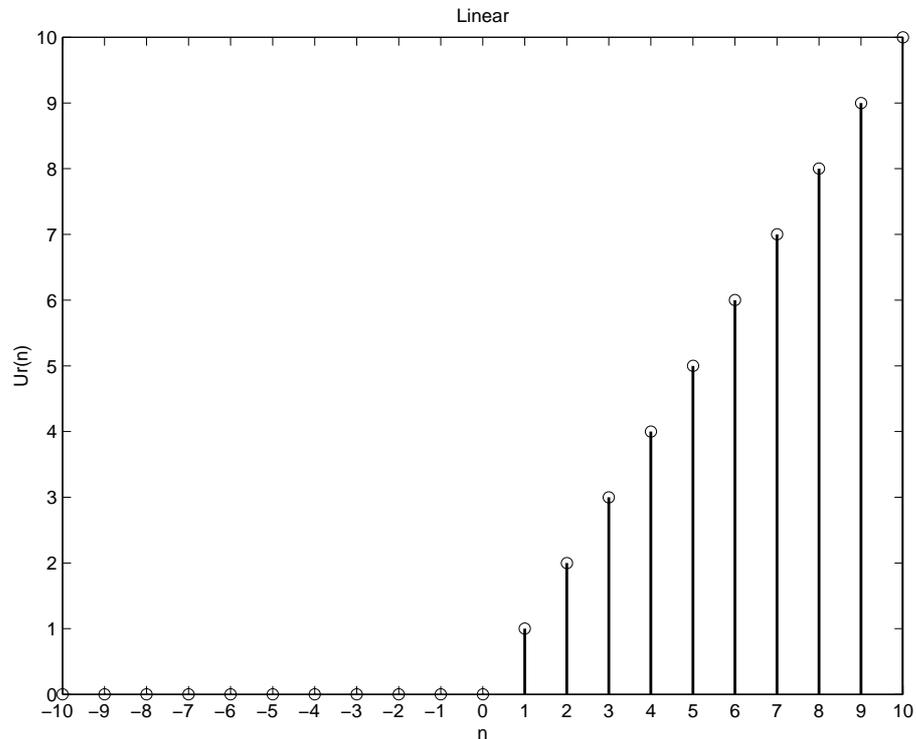
$$x(n) = \sin \omega n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Σχήμα 1.4: Γραφική παράσταση του σήματος μοναδιαίου βήματος διακριτού χρόνου.

1.1.2 Δισδιάστατα και πολυδιάστατα σήματα

Αν το πεδίο ορισμού ενός σήματος χαρακτηρίζεται από μια μεταβλητή δύο διαστάσεων, το σήμα ονομάζεται **δισδιάστατο**. Ένα δισδιάστατο σήμα εκφράζει τη μεταβολή μιας εξαρτημένης μεταβλητής f σε σχέση με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x και y . Δηλαδή, ορίζεται

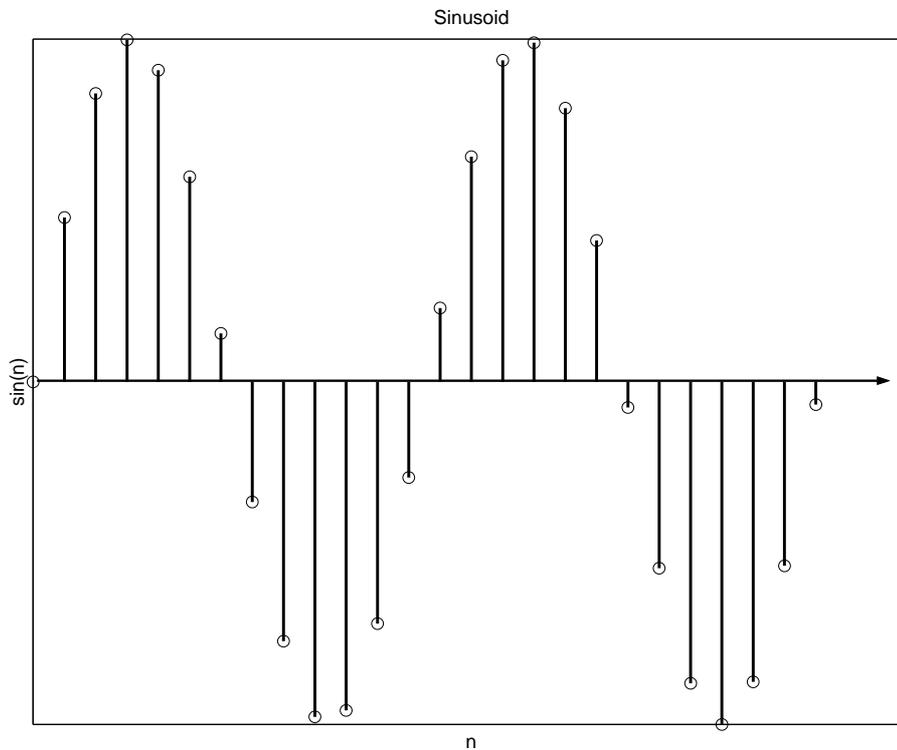


Σχήμα 1.5: Γραφική παράσταση του σήματος ράμπας διακριτού χρόνου.

ως μια συνάρτηση $f(\cdot, \cdot)$ με πεδίο ορισμού $I = I_1 \times I_2$, τέτοια ώστε $(x, y) \rightarrow f(x, y)$.

Αν στο πεδίο ορισμού I ενός δισδιάστατου σήματος οι δύο μεταβλητές x και y λαμβάνουν συνεχείς τιμές, το σήμα ονομάζεται **σήμα συνεχούς χρόνου (χώρου)**. Τότε, τα I_1 και I_2 είναι διαστήματα της ευθείας των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} . Αν τα I_1 και I_2 είναι υποσύνολα των ακεραίων \mathbb{Z} , το δισδιάστατο σήμα ονομάζεται διακριτού χρόνου.

- Το δισδιάστατο μοναδιαίο βήμα συνεχούς χρόνου (χώ-



Σχήμα 1.6: Γραφική παράσταση του ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου.

ρου) είναι

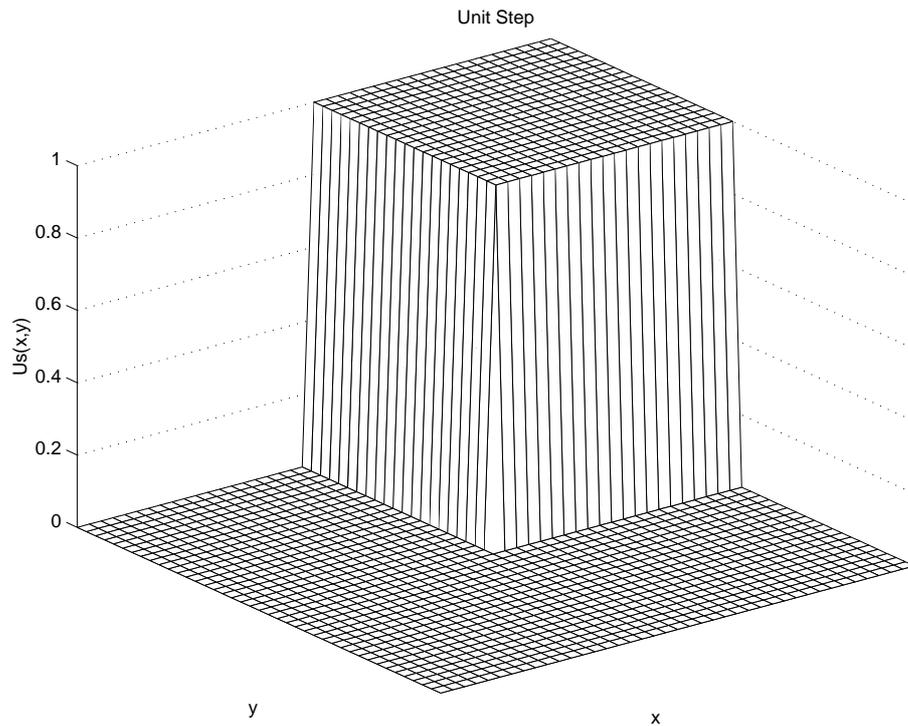
$$u_s(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \text{ και } y \geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για το σήμα αυτό ισχύει $u_s(x, y) = u_s(x)u_s(y)$.

- Το δισδιάστατο μοναδιαίο βήμα διακριτού χρόνου (χώρου) δίνεται από τον τύπο

$$u_s(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_1 = 0 \text{ και } n_2 = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ισχύει $u_s(n_1, n_2) = u_s(n_1)u_s(n_2)$.



Σχήμα 1.7: Γραφική παράσταση του δισδιάστατου σήματος μοναδιαίου βήματος συνεχούς χρόνου.

Αν το πεδίο ορισμού ενός σήματος χαρακτηρίζεται από μια μεταβλητή m διαστάσεων το σήμα ονομάζεται **πολυδιάστατο** ή **m -διάστατο**. Το πεδίο ορισμού του I έχει τη μορφή ενός καρτεσιανού γινόμενου $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m$ και, αν τα I_1, I_2, \dots, I_m είναι διαστήματα της ευθείας των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , τότε το σήμα είναι συνεχούς χρόνου. Αν τα I_1, I_2, \dots, I_m είναι υποσύνολα του συνόλου των ακεραίων \mathbb{Z} , το σήμα είναι διακριτού χρόνου.

1.1.3 Συνάρτηση δέλτα συνεχούς χρόνου

Υπάρχει μια ειδική “συνάρτηση” η οποία είναι χρήσιμη στην ανάλυση σημάτων. Η συνάρτηση αυτή δεν μπορεί να οριστεί με μαθηματική αυστηρότητα ως μία συνήθης συνάρτηση, αλλά μόνο ως μια γενικευμένη συνάρτηση. Εδώ, θα εκφραστεί ως το “όριο” μιας ακολουθίας (συνήθων) συναρτήσεων σε τρόπο ώστε να επιτευχθεί απλότητα και χρησιμότητα, χωρίς τις έννοιες της αυστηρής θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων.

Πρώτα χρειάζεται να οριστεί η συνάρτηση *rect* (**μοναδιαίος τετραγωνικός παλμός, unit square pulse**):

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού.} \end{cases}$$

Με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτής ορίζεται μια ακολουθία συναρτήσεων, η οποία δίνεται από τον τύπο $\delta_\varepsilon(t) = \varepsilon \text{rect}(\varepsilon t)$. Οι τετραγωνικοί παλμοί οι οποίοι αποτελούν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της ακολουθίας αυτής έχουν εμβαδόν ίσο με τη μονάδα. Το ύψος τους αυξάνεται καθώς $\varepsilon \rightarrow \infty$, ενώ αντίστοιχα το πλάτος τους μειώνεται. Το “όριο” αυτής της ακολουθίας συναρτήσεων είναι ένα ορθογώνιο με άπειρο ύψος και απειροστό πλάτος έτσι ώστε κατά κάποιο τρόπο το εμβαδόν του να παραμένει ίσο με τη μονάδα. Το “όριο” αυτό συμβολίζεται με $\delta(t)$. Η εξήγηση αυτή οδηγεί στον “ορισμό” της **συνάρτησης δέλτα (delta function)** ή **συνάρτησης Dirac (Dirac function)** με “τύπο”

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta_\varepsilon(t)$$

η οποία ικανοποιεί την σχέση: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Η συνάρτηση δέλτα, $\delta(\cdot)$, ονομάζεται και **κρουστική συνάρτηση συνεχούς χρόνου (continuous time impulse function)** και ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα “δειγματοληψίας”

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t') dt = x(t'),$$

όπου το $\delta(t - t')$ αποτελεί μία κρουστική συνάρτηση μετατοπισμένη στη θέση $t = t'$. Από αυτήν την ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα, μπορεί να θεωρηθεί ότι το $\delta(t - t')$ “δειγματίζει” ένα σήμα $x(\cdot)$ στο σημείο $t = t'$.

Ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) dt = 1$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0), \text{ για κάθε συνάρτηση } x(\cdot) \text{ συνεχή στο } t = 0.$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t') dt = x(t'), \text{ για κάθε συνάρτηση } x(\cdot) \text{ συνεχή στο } t = t'.$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(\alpha t) dt = \frac{1}{|\alpha|} x(0), \text{ για κάθε συνάρτηση } x(\cdot) \text{ συνεχή στο } t = 0. \text{ Άρα } \delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t).$$

$$5. \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi s t} ds.$$

$$6. \text{ Έστω } u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \text{ (βηματική συνάρτηση)}$$

Τότε ισχύει $u'(t) = \delta(t)$, όπου $u'(t)$ είναι η “παράγωγος” της $u(t)$.

Η συνάρτηση δέλτα στις δύο διαστάσεις

Η έννοια της συνάρτησης δέλτα επεκτείνεται και στις δύο διαστάσεις, όπου ορίζεται ως:

$$\delta(x, y) = \delta(x) \delta(y).$$

Η δισδιάστατη συνάρτηση δέλτα ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) dx dy = f(0, 0)$$

για κάθε συνάρτηση $f(\cdot, \cdot)$ που είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Επίσης, ικανοποιεί τις γενικεύσεις όλων των ιδιοτήτων της μονοδιάστατης συνάρτησης δέλτα.

1.1.4 Δέλτα του Kronecker

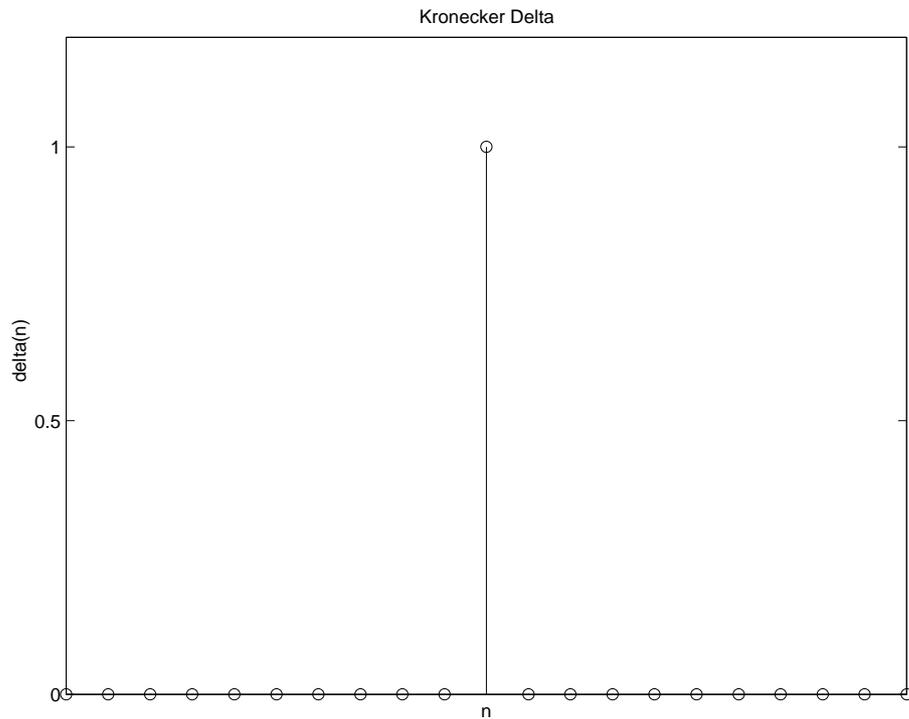
Μια ακολουθία η οποία παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση και επεξεργασία σημάτων διακριτού χρόνου είναι η **συνάρτηση δέλτα διακριτού χρόνου (discrete time delta function)**, η οποία ονομάζεται και **δέλτα του Kronecker (Kronecker delta)** και ορίζεται ως:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Η ακολουθία αυτή παίζει τον ίδιο ρόλο στα σήματα διακριτού χρόνου με αυτόν που παίζει η συνάρτηση δέλτα στα σήματα συνεχούς χρόνου και ικανοποιεί ανάλογες ιδιότητες. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση δέλτα διακριτού χρόνου δεν απαιτεί έννοιες της θεωρίας των γενικευμένων συναρτήσεων όπως η συνάρτηση δέλτα συνεχούς χρόνου. Ο προηγούμενος ορισμός είναι μαθηματικά αυστηρός.

Ιδιότητες του δέλτα του Kronecker

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1.$
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n) = x(0).$
3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(n - n') = x(n').$



Σχήμα 1.8: Γραφική παράσταση του σήματος δέλτα του Kronecker.

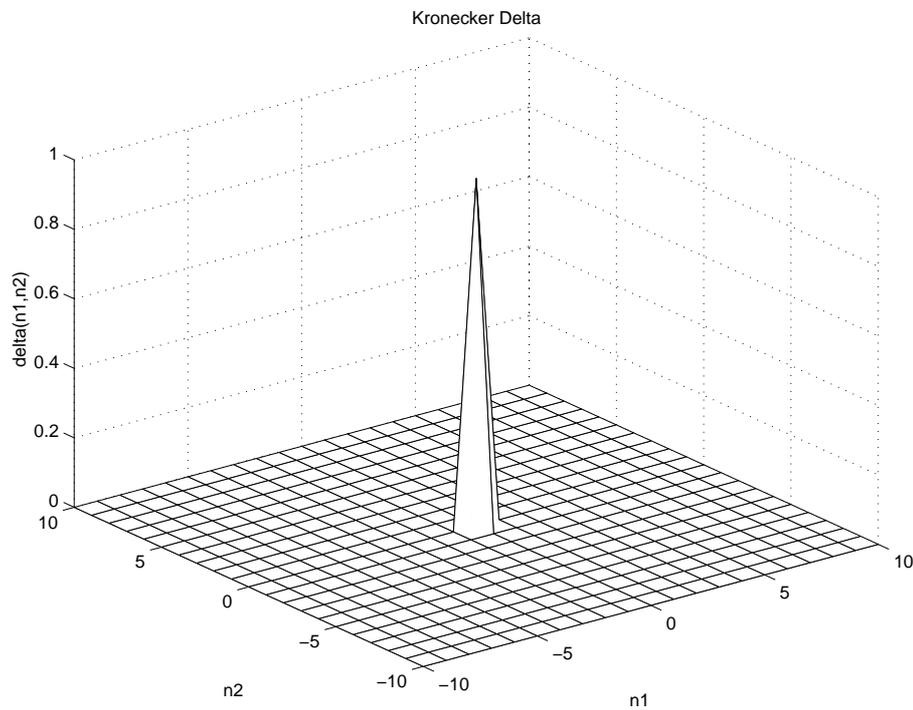
Το δέλτα του Kronecker στις δύο διαστάσεις

Η έννοια της συνάρτησης δέλτα διακριτού χρόνου επεκτείνεται στις δύο διαστάσεις, όπου δίνεται από τον τύπο:

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n_1 = 0 \text{ και } n_2 = 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Ισχύει:

$$\delta(n_1, n_2) = \delta(n_1)\delta(n_2).$$



Σχήμα 1.9: Γραφική παράσταση του διδιάστατου σήματος δέλτα του Kronecker.

1.2 Έννοια του συστήματος

Οι όροι **σύστημα (system)** ή **φίλτρο (filter)** αναφέρονται συνώνυμα σε ένα μετασχηματισμό (τελεστή) που απεικονίζει ένα ή περισσότερα σήματα (**σήματα εισόδου**) από κάποιο σύνολο σημάτων I σε ένα ή περισσότερα σήματα (**σήματα εξόδου**) από ένα σύνολο σημάτων U . ένα σύστημα, επομένως, θα συμβολίζεται ως $y = S(u)$, όπου $u(y)$ είναι το σήμα εισόδου (εξόδου) και S συμβολίζει το μετασχηματισμό που αντιστοιχεί στο σύστημα. Τυπικά παραδείγματα συστημάτων, με άμεσο τεχνολογικό ενδιαφέρον, αποτελούν τα επόμενα:

- Ηλεκτρονικοί ενισχυτές, οι οποίοι δέχονται ένα σήμα εισόδου

με τη μορφή χρονομεταβλητού ηλεκτρικού ρεύματος ή διαφοράς δυναμικού και παράγουν στην έξοδο το “ενισχυμένο” σήμα. Ο βαθμός ενίσχυσης ελέγχεται από ένα δεύτερο σήμα εισόδου στον ενισχυτή.

- Τελεστικοί ηλεκτρονικοί ενισχυτές, οι οποίοι εκτελούν τυπικές μαθηματικές λειτουργίες (άθροιση δύο σημάτων, σύγκριση δύο σημάτων, ολοκλήρωση και παραγωγή ενός σήματος, κτλ.) σε ένα ή περισσότερα σήματα εισόδου.
- Μηχανολογικά συστήματα, όπως δορυφόροι, αεροπλάνα, αυτοκίνητα και ρομποτικοί βραχίονες.
- Ανθρώπινο σύστημα παραγωγής φωνής, μουσικά όργανα, κτλ.
- Φίλτρα δισδιάστατων εικόνων.
- Σύστημα μετατροπής σήματος video σε χρονομεταβλητή δισδιάστατη τηλεοπτική εικόνα.
- Συστήματα επεξεργασίας βιοϊατρικών σημάτων.
- Συστήματα επεξεργασίας και ανάλυσης οικονομικών χρονοσειρών.
- Συστήματα επεξεργασίας και ανάλυσης μετεωρολογικών δεδομένων.
- Πρωτόκολλα διαβίβασης πακέτων δεδομένων σε ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο.
- Προγράμματα που εκτελεί η κεντρική επεξεργαστική μονάδα ενός ψηφιακού υπολογιστή.

Από τα προηγούμενα, γίνεται φανερό ότι τα συστήματα διακρίνονται σε συστήματα μιας ή πολλών εισόδων και μιας ή πολλών εξόδων. Επίσης, σε αναλογία με την ταξινόμηση των σημάτων, τα συστήματα διακρίνονται σε συνεχούς ή διακριτού χρόνου. Άλλες σημαντικές

ιδιότητες και η αντίστοιχη ταξινόμηση των συστημάτων εξετάζονται στη συνέχεια.

1.2.1 Βασικές ιδιότητες συστημάτων

ένα σύστημα θα ονομάζεται **αιτιατό (causal)** όταν το σήμα εξόδου τη χρονική στιγμή t εξαρτάται μόνο από τις τιμές του σήματος εισόδου σε χρονικές στιγμές που προηγούνται της στιγμής t . Πιο αυστηρά, το σύστημα S είναι αιτιατό αν και μόνο αν για κάθε χρονική στιγμή t και για κάθε ζευγάρι σημάτων u, v για το οποίο $u(\tau) = v(\tau)$ για κάθε $\tau < t$, ισχύει $S(u)(t) = S(v)(t)$.

ένα σύστημα θα ονομάζεται **χρονικά αναλλοίωτο (time invariant)** όταν μια χρονική μετατόπιση του σήματος εισόδου προκαλεί την ίδια χρονική μετατόπιση στο σήμα εξόδου. Πιο αυστηρά, θέτοντας $u_\tau(t) = u(t - \tau)$, το σύστημα S είναι χρονικά αναλλοίωτο αν και μόνο αν $S(u_\tau)(t) = S(u)(t - \tau)$, για κάθε σήμα εισόδου u , κάθε μετατόπιση τ και κάθε χρονική στιγμή t . ένα χρονικά αναλλοίωτο σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα **συναρτησιακό (functional)**. Πραγματικά, ορίζοντας το συναρτησιακό $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}$ με $\sigma(u) = S(u)(0)$, βλέπουμε ότι η τιμή του σήματος εξόδου του συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t μπορεί να εκφραστεί με βάση τη σχέση $S(u)(t) = S(u_t)(0) = \sigma(u_t)$. Αυτή η ένα-προς-ένα αντιστοιχία χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων και συναρτησιακών σε ορισμένες περιπτώσεις διευκολύνει την ανάλυση.

ένα σύστημα θα ονομάζεται **ευσταθές με την έννοια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου (bounded input-bounded output stable)** αν το σύστημα απεικονίζει κάθε φραγμένο σήμα εισόδου σε φραγμένο σήμα εξόδου. Πιο αυστηρά, το σύστημα S είναι ευσταθές με την έννοια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου αν για κάθε σήμα εισόδου u για το οποίο υπάρχει μια σταθερά $m(u)$ τέτοια ώστε $|u(t)| < m(u)$ για κάθε t , υπάρχει αντίστοιχη σταθερά $M(u)$ τέτοια ώστε $|S(u)(t)| < M(u)$ για κάθε t .

ένα σύστημα είναι **συνεχές (continuous)** όταν παραπλήσια σήματα εισόδου απεικονίζονται σε παραπλήσια σήματα εξόδου. Ο αυ-

στηρός ορισμός της έννοιας της συνέχειας ενός συστήματος απαιτεί τον ορισμό μετρικών d_U και d_I στους χώρους (σύνολα) U και I των σημάτων εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα. Το σύστημα S είναι συνεχές αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $d_I(S(u), S(v)) < \varepsilon$ όταν $d_U(u, v) < \delta$. Στη γενική περίπτωση, το δ είναι συνάρτηση τόσο του ε , όσο και των σημάτων u και v . Στη περίπτωση που το δ εξαρτάται μόνο από το ε , το σύστημα θα ονομάζεται **ομοιόμορφα συνεχές (uniformly continuous)**.

Η έννοια του συστήματος με φθίνουσα μνήμη (**fading memory system**) είναι μια πιο περιοριστική μορφή της έννοιας του συνεχούς συστήματος. ένα σύστημα έχει φθίνουσα μνήμη όταν σήματα εισόδου τα οποία είναι παραπλήσια στο παρόν και στο εγγύς παρελθόν απεικονίζονται από το σύστημα σε παραπλήσια σήματα εξόδου ακόμα και αν στο μακρινό παρελθόν δεν είναι παραπλήσια. Πιο αυστηρά, ένα σύστημα έχει φθίνουσα μνήμη όταν υπάρχει μια φθίνουσα συνάρτηση $w : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ με $w(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $d_I(S(u), S(v)) < \varepsilon$ όταν $d_U(u_w, v_w) < \delta$, όπου $u_w(t) = u(t)w(-t)$ και $v_w(t) = v(t)w(-t)$.

Κεφάλαιο 2

Μετασχηματισμοί Σημάτων

2.1 Ο μετασχηματισμός Fourier

2.1.1 Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένα ισχυρό εργαλείο για ανάλυση σημάτων και συστημάτων. Επιτρέπει την ποσοτική περιγραφή της δειγματοληψίας σημάτων συνεχούς χρόνου, της λειτουργίας τεχνολογικών προϊόντων που περιλαμβάνουν συνδεσμολογίες συνελικτικών φίλτρων και του θορύβου. Θα αναπτύξουμε τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για μονοδιάστατα και Δισδιάστατα σήματα, τόσο συνεχούς όσο και διακριτού χρόνου.

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που, στη γενική περίπτωση, απεικονίζει μια μιγαδική συνάρτηση n μεταβλητών σε μια άλλη μιγαδική συνάρτηση n μεταβλητών. Ο μετασχηματισμός Fourier ενός μονοδιάστατου συνεχούς σήματος συνεχούς χρόνου $f(t)$ ορίζεται ως ένα νέο συνεχές σήμα συνεχούς χρόνου $F(s)$ με βάση τη σχέση

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i2\pi st} ds$$

όπου $i = \sqrt{-1}$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του σήματος $F(s)$ ορίζεται ως

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{-i2\pi st} ds.$$

Η μόνη διαφορά ανάμεσα στον ευθύ και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier βρίσκεται στο πρόσημο του εκθέτη στο μιγαδικό εκθετικό.

Η σχέση ανάμεσα στον ευθύ και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier δίνεται από τον τύπο αντιστροφής

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(t)\}\}, \text{ δηλαδή } f(t) = \{\mathcal{F}^{-1}\{F(s)\}.$$

Τα σήματα $f(t)$ και $F(s)$ ονομάζονται **ζεύγη μετασχηματισμού Fourier** και η μεταξύ τους αντιστοιχία είναι ένα-προς-ένα. Ο Πίνακας 2.1, στον οποίο $\text{sinc}(\xi) \equiv \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}$ παρουσιάζει μερικά χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμών Fourier.

	$f(t)$	$F(s)$
Παλμός Gauss	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi s^2}$
Τετραγωνικός παλμός	$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$2 \operatorname{sinc}(2s) = \frac{\sin(2\pi s)}{\pi s}$
Τριγωνικός παλμός	$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - t , & t \leq 1, \\ 0, & t > 1 \end{cases}$	$(\operatorname{sinc})^2(s) = \frac{\sin^2(\pi s)}{(\pi s)^2}$
Φθίνον εκθετικό	$e^{\alpha t }, \alpha < 0$	$\frac{-2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 s^2}$
Συνάρτηση δέλτα	$\delta(t)$	1
Μοναδιαίο βήμα	$u_s(t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s) + \frac{i}{\pi s}]$
Ημιτονοειδές σήμα	$\sin(2\pi s_0 t)$	$-\frac{i}{2}[\delta(s + s_0) - \delta(s - s_0)]$
Μιγαδικό εκθετικό	$e^{i2\pi s_0 t}$	$\delta(s - s_0)$

Πίνακας 2.1: Παραδείγματα ζευγών μετασχηματισμού Fourier

2.1.2 Η σειρά Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier απλοποιείται σε **σειρά** Fourier αν το σήμα $f(t)$ έχει τιμή μηδέν ή επαναλαμβάνεται περιοδικά εκτός ενός διαστήματος $[-T/2, T/2]$. Στην περίπτωση αυτή, ορίζεται η σειρά

$$F(n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\frac{2\pi n t}{T}} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα αντιστοιχίζει στο σήμα $f(t)$ μια άπειρη ακολουθία μιγαδικών συντελεστών F_n . Η αντιστοίχιση αυτή μπορεί

να αντιστραφεί με βάση τον τύπο

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{-i\frac{2\pi n t}{T}}.$$

Ο τύπος αντιστροφής ανακατασκευάζει το σήμα $f(t)$ ως υπέρθεση (άθροισμα) μιγαδικών εκθετικών διαφόρων συχνοτήτων, τα οποία εμφανίζονται με (γενικά μιγαδικά) πλάτη F_n .

Ανάλογα, η σειρά Fourier μπορεί να εκφραστεί και ως

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right),$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Σε αυτή τη σειρά, το σήμα $f(t)$ ανακατασκευάζεται ως υπέρθεση δύο σειρών πραγματικών σημάτων, τα οποία εμφανίζονται με πραγματικά πλάτη α_n και β_n , αντίστοιχα.

2.1.3 Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Θεωρούμε το σήμα διακριτού χρόνου

$$f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

με διάρκεια N δειγμάτων. Ορίζουμε τον ευθύ διακριτό μετασχηματισμό Fourier του σήματος $\{f_n, n = 1, 2, \dots, N - 1\}$ ως

$$F_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{i2\pi \frac{mn}{N}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

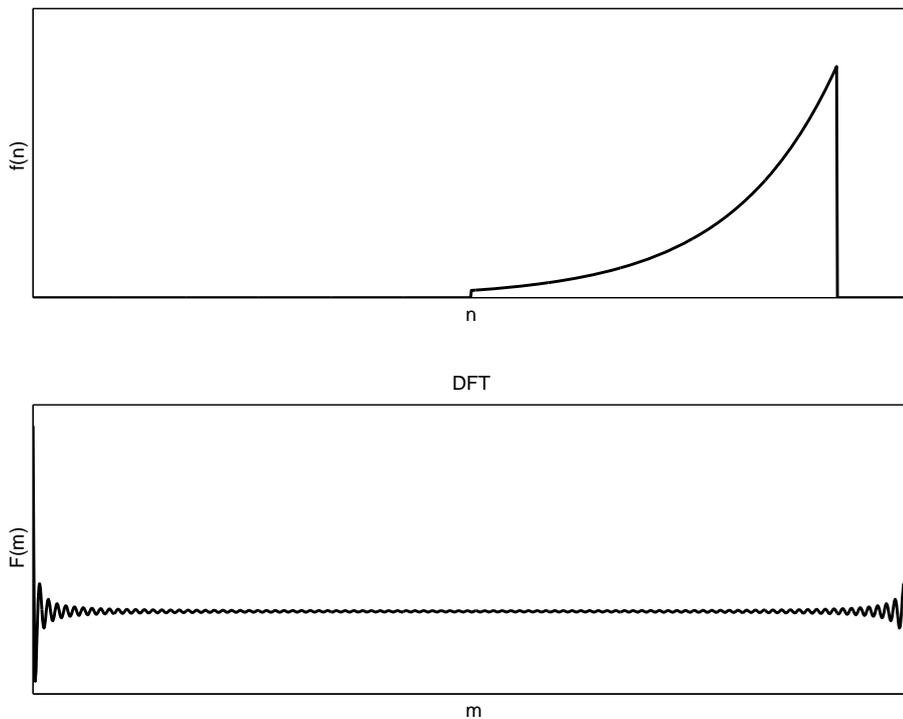
και τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier του σήματος $\{F_m, m = 0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ ως

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F_m e^{-i2\pi \frac{mn}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Ισχύει

$$g_n = f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Ένα ζεύγος σήματος-αντίστοιχου διακριτού μετασχηματισμού Fourier εμφανίζεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: ένα σήμα και ο αντίστοιχος διακριτός μετασχηματισμός Fourier.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μπορεί να θεωρηθεί ως μια

προσέγγιση του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier. Πραγματικά:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i2\pi st} dt.$$

Επομένως:

$$F\left(\frac{m}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i2\pi \frac{m}{T}t} dt,$$

όπου T είναι το μήκος του διαστήματος του πεδίου ορισμού όπου το σήμα είναι σημαντικά διαφορετικό από το μηδέν. Υποθέτουμε ότι με αρκετά μεγάλο αριθμό δειγμάτων N ισχύει $T = N\Delta t$ καθώς και η προσέγγιση

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i2\pi \frac{m}{T}t} dt &\approx \Delta t \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(n\Delta t)e^{i2\pi \frac{mn\Delta t}{T}} \\ &= \Delta t \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f(n\Delta t)e^{i2\pi \frac{mn}{N}}. \end{aligned}$$

Αφού το σήμα έχει μηδενική τιμή εκτός ενός διαστήματος μήκους T , μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το σήμα επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο T και, αντίστοιχα, τα δείγματά του επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο N . Επομένως, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i2\pi \frac{m}{T}t} dt \approx \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)e^{i2\pi \frac{mn}{N}},$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} F_m &\equiv F\left(\frac{m}{T}\right) \\ &\approx \Delta t \Delta \text{MF} \{f_n = f(n\Delta t), \quad n = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2}\}. \end{aligned}$$

Για να ισχύει η προσέγγιση, θα πρέπει το Δt να είναι αρκετά μικρό και το N αρκετά μεγάλο, ώστε να καλύπτεται το σήμα συνεχούς χρόνου

με αρκετά καλή διακριτική ικανότητα και σε όλη τη διάρκειά του. Το θεώρημα δειγματοληψίας θα ποσοτικοποιήσει τη σχέση αυτή.

2.1.4 Ταχείς αλγόριθμοι διακριτού μετασχηματισμού Fourier

Για τον υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ενός σήματος N δειγμάτων, η υπολογιστική πολυπλοκότητα εφαρμογής του ορισμού είναι της τάξης του N^2 και επομένως αρκετά σημαντική. Ευτυχώς, υπάρχουν αλγόριθμοι που έχουν πολυπλοκότητα μόνο της τάξης του $N \log_2 N$. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι γνωστοί ως ταχείς μετασχηματισμοί Fourier και παρουσιάζουν την ταχύτερη συμπεριφορά όταν το N είναι δύναμη του δύο. Για $N = 1024$, το υπολογιστικό κέρδος $\frac{N^2}{N \log_2 N} \approx 100$. Το υπολογιστικό κέρδος αυξάνεται όσο μεγαλώνει ο αριθμός N των δειγμάτων.

Η βασική ιδέα πίσω από τους ταχείς μετασχηματισμούς Fourier βρίσκεται στο ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier μπορεί να εκφραστεί ως πολλαπλασιασμός πινάκων:

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{W}} \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}, \text{ όπου } \underline{\underline{W}} = [W_{nm}] = \left[e^{i \frac{2\pi nm}{N}} \right]$$

Όμοια:

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \underline{\underline{W}}^\dagger \begin{bmatrix} F_0 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{bmatrix} \text{ με } \underline{\underline{W}}^\dagger = \underline{\underline{W}}^{*T} = \underline{\underline{W}}^*.$$

Οι πίνακες $\underline{\underline{W}}$ και $\underline{\underline{W}}^\dagger$ έχουν πολλές συμμετρίες και, όταν $N = 2^p$, μπορούν να παραγοντοποιηθούν σε p πίνακες τάξης $N \times N$ που περιέχουν επαναλαμβανόμενες τιμές, μηδενικά και μονάδες. Αυτή η ιδιαίτερη δομή των πινάκων $\underline{\underline{W}}$ και $\underline{\underline{W}}^\dagger$ επιτρέπει τη λειτουργία ταχέων αλγορίθμων.

Ταχύς μετασχηματισμός Fourier με αποδεκάτιση χρόνου

Έστω $x(n)$ ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας, όπου $0 \leq n \leq N - 1$ και N είναι άρτιος. Αν $x_1(n)$ και $x_2(n)$ είναι τα σήματα που αποτελούνται από τις άρτιες και τις περιττές τιμές του $x(n)$ αντίστοιχα ισχύει:

$$x_1(n) = x(2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

$$x_2(n) = x(2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Τότε λέγεται ότι τα σήματα $x_1(n)$ και $x_2(n)$ λαμβάνονται με **αποδεκάτιση (decimation) του σήματος $x(n)$ με το 2**. Και τα δύο σήματα έχουν διάρκεια $\frac{N}{2}$. Ορίζοντας $\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$, ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του $x(n)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$X(k) = \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} x(n)\omega_N^{nk} + \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots} x(n)\omega_N^{nk},$$

ή

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\omega_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\omega_N^{2(n+1)k}. \quad (2.1)$$

Επειδή $\omega_N^2 = e^{-i\frac{2\pi}{N}2} = \omega_{N/2}$, η εξίσωση (2.1) γίνεται:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n)\omega_{N/2}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(n)\omega_{N/2}^{nk},$$

οπότε

$$X(k) = X_1(k) + \omega_N^k X_2(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.2)$$

Με τη χρήση της εξίσωσης (2.2), οι πρώτες $\frac{N}{2}$ τιμές του διακριτού μετασχηματισμού Fourier μπορούν να υπολογιστούν από το διακριτό μετασχηματισμό Fourier των $\frac{N}{2}$ αποδεκατισθέντων σημάτων $x_1(n)$

και $x_2(n)$. Λόγω της περιοδικότητας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ισχύει:

$$X_1(k + \frac{N}{2}) = X_1(k), \quad X_2(k + \frac{N}{2}) = X_2(k). \quad (2.3)$$

Επίσης, επειδή $\omega_N^{\frac{N}{2}} = e^{-i\pi} = -1$, ισχύει

$$\omega_N^{k + \frac{N}{2}} = \omega_N^k \omega_N^{\frac{N}{2}} = -\omega_N^k. \quad (2.4)$$

Από τις εξισώσεις (2.2), (2.4) και (2.3) συνάγονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$X(k) = X_1(k) + \omega_N^k X_2(k), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (2.5)$$

$$X(k + \frac{N}{2}) = X_1(k) - \omega_N^k X_2(k), \quad 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1. \quad (2.6)$$

Για τον υπολογισμό του $X(k)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η **δομή της πεταλούδας (butterfly structure)** που φαίνεται στο Σχήμα (2.2).

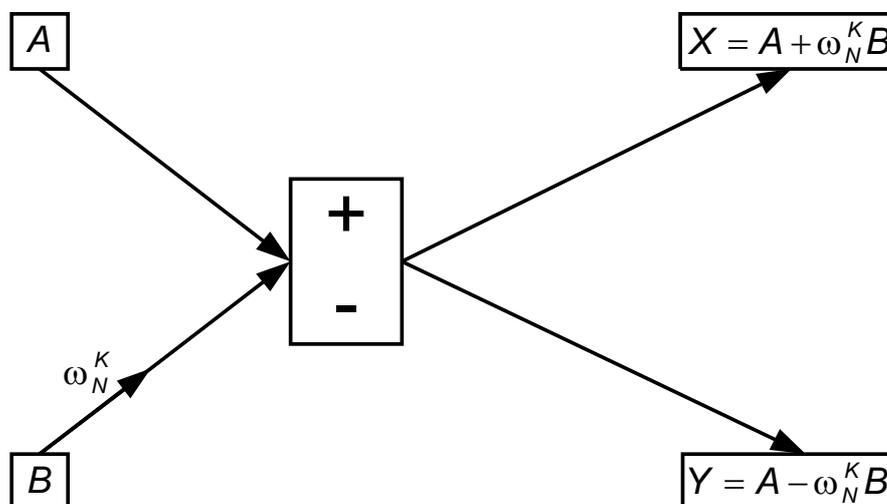
Με τη δομή αυτή συνδυάζονται οι μετασχηματισμοί $X_1(k)$ και $X_2(k)$ έτσι ώστε οι δύο αριθμοί A και B να μετασχηματίζονται στους X και Y σύμφωνα με τον κανόνα:

$$X = A + \omega_N^k B$$

$$Y = A - \omega_N^k B.$$

Στη δομή της πεταλούδας χρησιμοποιείται ένας πολλαπλασιαστής και ένας αθροιστής.

Όπως φαίνεται και από τις σχέσεις (2.5)–(2.6), για τον υπολογισμό του $X(k)$ από το $X_1(k)$ και το $X_2(k)$ χρησιμοποιούνται $\frac{N}{2}$ πεταλούδες κάθε μια από τις οποίες απαιτεί έναν πολλαπλασιασμό. Στην πράξη, μερικές από αυτές δεν εκτελούν πολλαπλασιασμό, όπως για παράδειγμα στο Σχήμα (2.3) η πεταλούδα που αντιστοιχεί στον παράγοντα $-\omega_{16}^0 = 1$. Έτσι, η πολυπλοκότητά της δεν υπερβαίνει τις $\frac{N}{2}$ πράξεις (πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις). Αν οι διακριτοί



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση του διαγράμματος της πεταλούδας στο ΔMFAX.

μετασχηματισμοί Fourier $X_1(k)$ και $X_2(k)$ υπολογισθούν κατευθείαν από τις εξισώσεις αυτές, απαιτείται ένα σύνολο πράξεων που δεν υπερβαίνει το $2(N/2)^2 + N/2 = N^2 + N/2$. Οπότε, με τη χρήση των εξισώσεων (2.5)–(2.6) επιτυγχάνεται ελάττωση κατά περίπου 50% των υπολογισμών σε σχέση με τον απευθείας υπολογισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier από τον ορισμό του.

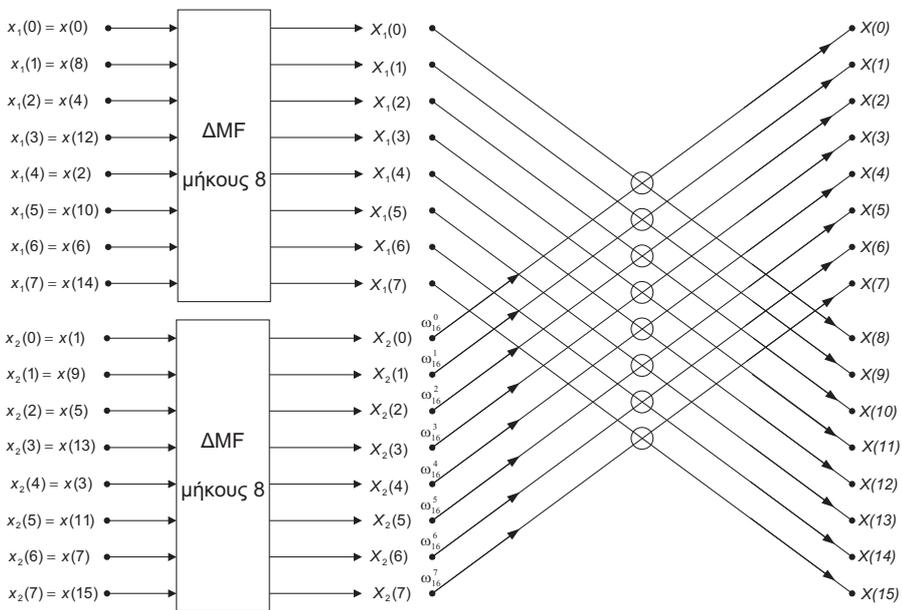
Η ελάττωση της πολυπλοκότητας είναι περισσότερο σημαντική όταν ο N είναι δύναμη του 2 ($N = 2^p$), οπότε η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται. Έτσι στην περίπτωση $N = 2^p$, ο υπολογισμός καθενός από τα $X_1(k)$ και $X_2(k)$ μπορεί να γίνει αναδρομικά από τη δομή πεταλούδας που χρησιμοποιεί διακριτό μετασχηματισμό Fourier $N/4$ σημείων, δύο για το καθένα. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, μετά από $p - 1$ βήματα δημιουργούνται $N/2$ διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier, καθένας από τους οποίους αποτελείται από 2 σημεία.

Ένας διακριτός μετασχηματισμός Fourier δύο (2) σημείων απο-

τελείται μόνο από έναν αθροιστή, καθώς $\omega_2^0 = 1$, $\omega_2^1 = -1$ και

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) \\ X(1) &= x(0) - x(1). \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό ολοκληρώθηκε η ανάπτυξη του βασικού **Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier με Αποδεκάτιση στο Χρόνο – ΔMFAX (Discrete Fourier Transform with Decimation in Time)**. Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζεται η περίπτωση ακολουθιών δεκαέξι (16) σημείων.



Σχήμα 2.3: Σχηματική αναπαράσταση του υπολογισμού του ΔMFAX.

Από το Σχήμα 2.3 φαίνεται ότι για να εμφανίζονται στην έξοδο οι τιμές του διακριτού μετασχηματισμού Fourier σε σειρά απαιτείται η αναδιάταξη των όρων του σήματος εισόδου. Δηλαδή, χρειάζεται

ένας τρόπος δεικτοδότησης έτσι ώστε τα δεδομένα να μετατίθενται στη μορφή:

$$(x(0), x(8), x(4), x(12), x(2), x(10), x(6), x(14), \\ x(1), x(9), x(5), x(13), x(3), x(11), x(7), x(15)).$$

Για τον ορισμό της δεικτοδότησης, οι δείκτες μετατρέπονται στη δυαδική τους μορφή και στη συνέχεια αντιστρέφονται τα ψηφία της μορφής αυτής όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2.2.

Αρχική διάταξη	Δυαδική μορφή	Αντιστραμένη δυαδική μορφή	Αναδιάταξη
0	0000	0000	0
1	0001	1000	8
2	0010	0100	4
3	0011	1100	12
4	0100	0010	2
5	0101	1010	10
6	0110	0110	6
7	0111	1110	14
8	1000	0001	1
9	1001	1001	9
10	1010	0101	5
11	1011	1101	13
12	1100	0011	3
13	1101	1011	11
14	1110	0111	7
15	1111	1111	15

Πίνακας 2.2: Πίνακας ορισμού δεικτοδότησης.

Ταχύς μετασχηματισμός Fourier με αποδεκάτιση συχνότητας

Ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα βασίζεται στην ιδέα της υποδιαίρεσης της ακολουθίας των τιμών του σήματος, σε άρτιους και περιττούς δείκτες. Στη συνέχεια, εφαρμόζεται μια διαφορετική τμηματοποίηση, όπου η μια από τις υποακολουθίες δημιουργείται από τις πρώτες $N/2$ τιμές του αρχικού σήματος, ενώ η άλλη αποτελείται από τις τελευταίες $N/2$ τιμές. Αποδεικνύεται ότι αυτή η τμηματοποίηση οδηγεί σε μια διάταξη αντιστροφής ψηφίου του διακριτού μετασχηματισμού Fourier της ακολουθίας και η λαμβανόμενη διάταξη καλείται **Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier με Αποδεκάτιση Συχνότητας – ΔΜΦΑΣ (Discrete Fourier Transform with Decimation in Frequency)**.

Για τον υπολογισμό της διάταξης αυτής ορίζονται οι ακολουθίες $x_1(n)$ και $x_2(n)$, μήκους $N/2$, ως εξής:

$$x_1(n) = x(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2.7)$$

$$x_2(n) = x\left(n + \frac{N}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1. \quad (2.8)$$

Τότε ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier γίνεται:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n)\omega_N^{nk} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n)\omega_N^{nk}, \quad (2.9)$$

ενώ με τη χρήση των εξισώσεων 2.7) και (2.8) γίνεται:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + e^{-i\pi k} x_2(n)]\omega_N^{nk}. \quad (2.10)$$

Επειδή $e^{-i\pi k} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k \text{ άρτιος} \\ -1, & \text{αν } k \text{ περιττός,} \end{cases}$ υπολογίζονται οι άρτιες και

οι περιπτές τιμές του $X(k)$ ξεχωριστά. Έτσι, η εξίσωση (2.10) δίνει:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) + x_2(n)] \omega_N^{nk} \quad (2.11)$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x_1(n) - x_2(n)] \omega_N^{nk} \omega_N^{\frac{nk}{2}}. \quad (2.12)$$

Αν

$$f(n) = x_1(n) + x_2(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

και

$$g(n) = [x_1(n) - x_2(n)] \omega_N^{nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1,$$

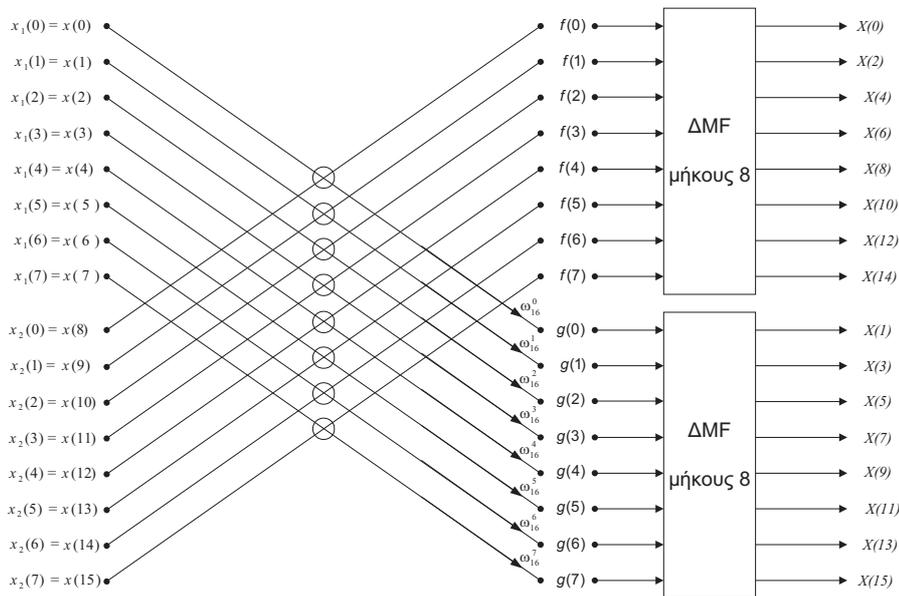
ισχύει

$$X(2k) = F(k), \quad X(2k+1) = G(k), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Επομένως, ο υπολογισμός του διακριτού μετασχηματισμού Fourier μήκους N ανάγεται στον υπολογισμό δύο διακριτών μετασχηματισμών Fourier $N/2$ σημείων. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4 για $N = 16$.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνεται η παραπάνω διαδικασία για καθεμία από τις ακολουθίες $f(n)$ και $g(n)$. Αν $N = 2^p$, ο αλγόριθμος τερματίζεται μετά από p βήματα. Στον ΔΜΦΑΣ αντιστοιχεί πεταλούδα η οποία διαφέρει από την πεταλούδα του ΔΜΦΑΧ στο ότι ο πολλαπλασιασμός με ω_N^n γίνεται μετά την αφαίρεση.

Στον αλγόριθμο του ΔΜΦΑΣ, τα δεδομένα εισάγονται σε κανονική διάταξη και στην έξοδο παράγεται μια ακολουθία σε διάταξη αντιστροφής ψηφίου. Ο ΔΜΦΑΣ και ο ΔΜΦΑΧ έχουν την ίδια πολυπλοκότητα, δηλαδή $\frac{1}{2}N \log_2 N$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς και $N \log_2 N$ μιγαδικές προσθέσεις. Ακόμη, και οι δυο αλγόριθμοι εκτελούν τους υπολογισμούς στις ίδιες θέσεις μνήμης. Αυτό σημαίνει ότι ο ίδιος πίνακας χρησιμοποιείται για την αποθήκευση τόσο των δεδομένων εισόδου, όσο και των δεδομένων εξόδου.



Σχήμα 2.4: Σχηματική αναπαράσταση του υπολογισμού του ΔΜΦΑΣ.

2.1.5 Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

1. ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ:

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{f_1\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{f_2\}$$

2. ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ:

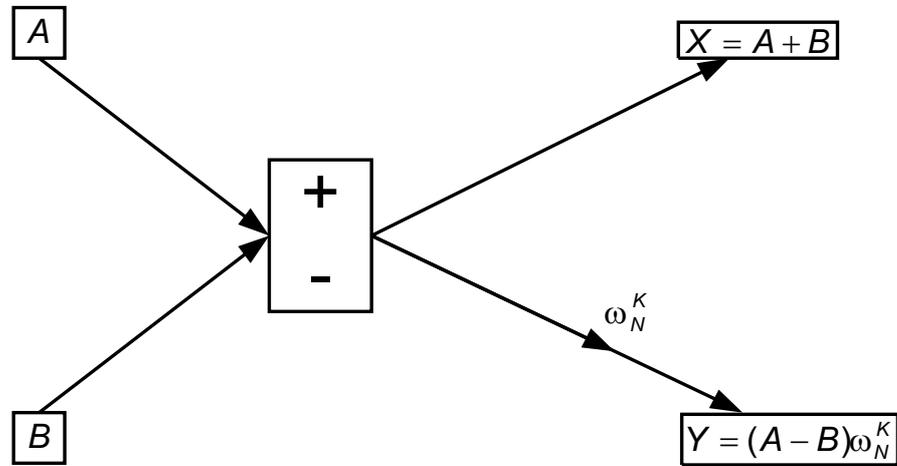
$$f(t) = f(-t) \Rightarrow F(s) = F(-s)$$

$$f(t) = -f(-t) \Rightarrow F(s) = -F(-s)$$

$$f(t) : \text{πραγματική συνάρτηση} \Rightarrow F(s) = F^*(-s)$$

3. ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ:

$$g(t) = f(t - a) \Rightarrow G(s) = e^{i2\pi a s} F(s)$$



Σχήμα 2.5: Σχηματική αναπαράσταση του διαγράμματος της πεταλούδας στο ΔΜΦΑΣ.

4. ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ:

$$g(t) = f(t)e^{-i2\pi s_0 t} \Rightarrow G(s) = F(s - s_0)$$

5. ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ:

$$g(t) = f(\alpha t) \Rightarrow G(s) = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

6. ΘΕΩΡΗΜΑ PARSEVAL (ή PLANCHEREL):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds$$

2.1.6 Ο μετασχηματισμός Fourier σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις

Για σήματα που εξαρτώνται από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, ο μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφός του ορίζονται ως εξής:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i2\pi(ux+vy)} dx dy$$

και

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{-i2\pi(ux+vy)} du dv.$$

Οι μεταβλητές u και v αντιστοιχούν σε συχνότητες κατά μήκος των αξόνων x και y , αντίστοιχα.

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier ενός διδιάστατου σήματος

$\{f_{mn}, 0 \leq m, n \leq N-1\}$ διακριτού χρόνου ορίζεται ως

$$F_{kl} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} e^{i2\pi \frac{km+ln}{N}}, \quad 0 \leq k, l \leq N-1,$$

ενώ ο αντίστροφός του ορίζεται ως

$$f_{mn} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} F_{kl} e^{-i2\pi \frac{km+ln}{N}}, \quad 0 \leq m, n \leq N-1.$$

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{f_{mn}, 0 \leq m, n \leq N-1\}$ μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή πινάκων. Πραγματικά, έστωσαν οι πίνακες

$$\underline{\underline{f}} = [f_{mn}], \quad \underline{\underline{F}} = [F_{kl}], \quad \underline{\underline{W}} = [W_{kn}] = \left[e^{i2\pi \frac{kn}{N}} \right].$$

Τότε

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{W}} \underline{\underline{f}} \underline{\underline{W}} \quad \text{και} \quad \underline{\underline{f}} = \frac{1}{N^2} \underline{\underline{W}}^{*T} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{W}}^{*T}.$$

Ο διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier έχει όλες τις ιδιότητες του μονοδιαστάτου μετασχηματισμού Fourier και επιπλέον τις επόμενες δύο:

- **Διαχωρισιμότητα (separability):**

Αν $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, τότε $F(u, v) = F_1(u)F_2(v)$.

- **Περιστροφικότητα (rotation property):**

Αν $f(x, y) = f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$, τότε $G(u, v) = F(u \cos \theta + v \sin \theta, -u \sin \theta + v \cos \theta)$.

Ο μετασχηματισμός Fourier γενικεύεται με τον ίδιο τρόπο σε περισσότερες από δύο διαστάσεις και ικανοποιεί ανάλογες ιδιότητες.

2.2 Ορθομοναδιαίοι μετασχηματισμοί

Ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, ο διακριτός συνημιτονικός μετασχηματισμός και ο μετασχηματισμός Karhunen–Loeve αποτελούν παραδείγματα (ειδικές περιπτώσεις) **ορθομοναδιαίων μετασχηματισμών (unitary transforms)**. Θα εξετάσουμε τη γενική θεωρία ορθομοναδιαίων μετασχηματισμών δισδιάστατων σημάτων. ένα ζεύγος ορθομοναδιαίων μετασχηματισμών ορίζεται από ένα ζεύγος σχέσεων

$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{k,l}(m, n) f(m, n), \quad 0 \leq k, l \leq N-1$$

$$f(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_{k,l}^*(m, n) F(k, l), \quad 0 \leq m, n \leq N-1.$$

Στις σχέσεις αυτές, $\alpha_{k,\ell}(m, n)$ είναι ο **πυρήνας του μετασχηματισμού (transformation kernel)** και ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- **Ορθοκανονικότητα (orthonormality):**

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_{k,\ell}(m, n) \alpha_{k',\ell'}^*(m, n) = \delta(k - k', \ell - \ell')$$

- **Πληρότητα (completeness):**

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} \alpha_{k,\ell}(m, n) \alpha_{k,\ell}^*(m', n') = \delta(m - m', n - n')$$

Το σήμα $\{F(k, l)\}$ αποτελεί τον ορθομοναδιαίο μετασχηματισμό του σήματος $\{f(m, n), 0 \leq (m, n) \leq N-1\}$ και ισχύουν οι επόμενες δύο βασικές ιδιότητες:

1. Η ιδιότητα της ορθοκανονικότητας εγγυάται ότι **κάθε** ανάπτυγμα της μορφής

$$f_{PQ}(m, n) = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{Q-1} F(k, l) \alpha_{k,l}^*(m, n), \quad P, Q \leq N,$$

για κάποια P, Q , θα ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα

$$\sigma_{P,Q}^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} |f(m, n) - f_{P,Q}(m, n)|^2$$

όταν οι συντελεστές $\{F(k, l)\}$ έχουν επιλεγεί σύμφωνα με το μετασχηματισμό.

2. Η ιδιότητα της πληρότητας εγγυάται ότι το σφάλμα $\sigma_{P,Q}^2$ θα γίνει μηδέν για $P = Q = N$ όταν οι συντελεστές έχουν επιλεγεί σύμφωνα με το μετασχηματισμό.

Οι ορθομοναδιαίοι μετασχηματισμοί για τους οποίους ισχύει

$$\alpha_{k,l}(m, n) = a_k(m) b_l(n)$$

ονομάζονται **διαχωρίσιμοι (separable)** και συνήθως $a_k(m) = b_k(m)$. Οι διαχωρίσιμοι ορθομοναδιαίοι μετασχηματισμοί μπορούν να τεθούν σε μορφή πολλαπλασιασμών πινάκων. Πραγματικά, αν οριστούν οι πίνακες

$$\underline{\underline{f}} = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \dots & f(N-1,N-1) \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F(0,0) & F(0,1) & \dots & F(0,N-1) \\ F(1,0) & F(1,1) & \dots & F(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(N-1,0) & F(N-1,1) & \dots & F(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

και

$$\underline{\underline{A}} = [a_k(m)], \quad \underline{\underline{B}} = [b_l(n)],$$

οι ιδιότητες της ορθοκανονικότητας και της πληρότητας απαιτούν:

$$\underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{*T} = \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{A}}^{*T}\underline{\underline{A}} \quad \text{και} \quad \underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}}^{*T} = \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{B}}^{*T}\underline{\underline{B}}.$$

Δηλαδή

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{*T} \quad \text{και} \quad \underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^{*T}.$$

Αν επιπλέον $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$, όπως συνήθως, τότε

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{f}}\underline{\underline{A}}^{*T} \quad \text{και} \quad \underline{\underline{f}} = \underline{\underline{A}}^{*T}\underline{\underline{F}}\underline{\underline{A}}.$$

Βασικές ιδιότητες διαχωρίσιμων ορθομοναδιαίων μετασχηματισμών

1. $\underline{\underline{F}}^{*T} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{f}})^{*T}$, δηλαδή πρώτα μετασχηματίζεται κάθε στήλη του πίνακα $\underline{\underline{f}}$ και το αποτέλεσμα μετασχηματίζεται κατά γραμμές για να καταλήξει στον πίνακα $\underline{\underline{F}}$.
2. Με βάση την προηγούμενη ιδιότητα, η πολυπλοκότητα ενός διαχωρίσιμου ορθομοναδιαίου μετασχηματισμού είναι $\mathcal{O}(N^3)$ αντί για $\mathcal{O}(N^4)$.
3. Οι γνωστότεροι μετασχηματισμοί εικόνων, όπως ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier, ο διακριτός συνημιτονικός μετασχηματισμός, ο μετασχηματισμός Hadamard, ο μετασχηματισμός Haar κτλ. είναι διαχωρίσιμοι ορθομοναδιαίοι μετασχηματισμοί και, επομένως, μπορούν να υλοποιηθούν με ταχείς αλγόριθμους. Μερικοί μετασχηματισμοί Karhunen-Loeve είναι επίσης διαχωρίσιμοι.

Χρήσιμες ιδιότητες ορθομοναδιαίων μετασχηματισμών

1. Διατήρηση της ενέργειας, δηλαδή

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} |f(m, n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} |F(k, \ell)|^2 .$$

2. Συμπύεση της ενέργειας, δηλαδή το φαινόμενο μόνο ένας σχετικά μικρός αριθμός από τους συντελεστές του ορθομοναδιαίου μετασχηματισμού να λαμβάνουν απόλυτη τιμή εμφανώς μεγαλύτερη από τους υπόλοιπους των οποίων η απόλυτη τιμή είναι πρακτικά μηδενική.
3. Στατιστική αποσυσχέτιση, δηλαδή το φαινόμενο οι συντελεστές του ορθομοναδιαίου μετασχηματισμού, θεωρούμενοι ως τυχαίες μεταβλητές, να είναι στατιστικώς αμοιβαία ανεξάρτητοι σε ευρείες κλάσεις σημάτων.

2.3 Αναπτύγματα σειρών κυματιδίου

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει έντονο ενδιαφέρον για νέες τεχνικές μετασχηματισμών που επικεντρώνονται κυρίως στα προβλήματα συμπίεσης εικόνων, ανίχνευσης ακμών και χαρακτηριστικών και ανάλυσης υφής. Αυτές οι τεχνικές εμφανίζονται κάτω από τίτλους, όπως πολυδιακριτική ανάλυση (**multiresolution analysis**), ανάλυση χρόνου–συχνότητας (**time–frequency analysis**), πυραμιδικοί αλγόριθμοι (**pyramid algorithms**) και μετασχηματισμοί κυματιδίου (**wavelet transforms**). Η ποικιλία των ονομασιών των μετασχηματισμών υποδηλώνει τις διαφορετικές οδούς που ακολουθήθηκαν για την ανάπτυξή τους, προτού οι ομοιότητες μεταξύ των διαφόρων προσεγγίσεων οδηγήσουν σε μια ενιαία θεωρία με το γενικό τίτλο **μετασχηματισμοί κυματιδίου**.

Ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιεί ημιτονοειδείς συναρτήσεις ως συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης. Οι συναρτήσεις αυτές

εκτείνονται ως το άπειρο και προς τις δύο κατευθύνσεις. Τα διανύσματα βάσης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι επίσης μη μηδενικά σε όλο το πεδίο ορισμού τους. Λέμε ότι τόσο οι συναρτήσεις βάσης του μετασχηματισμού Fourier όσο και τα διανύσματα βάσης του διακριτού μετασχηματισμού Fourier δεν έχουν **συμπαγές πεδίο ορισμού (compact support)**.

Συγκριτικά, τα **μεταβατικά σήματα (transient signals)** είναι μη μηδενικά μόνο κατά τη διάρκεια ενός σύντομου διαστήματος. Παρόμοια, πολλά σημαντικά χαρακτηριστικά σε εικόνες (για παράδειγμα οι ακμές τους) είναι εξαιρετικά συγκεντρωμένα σε λίγες χωρικές θέσεις. Τέτοια σήματα ή χαρακτηριστικά εικόνων δεν “μοιάζουν” με καμία από τις συναρτήσεις βάσης του μετασχηματισμού Fourier και δεν αναπαριστάνονται συμπαγώς στους συντελεστές του μετασχηματισμού, δηλαδή στο φάσμα συχνοτήτων. Κατά συνέπεια, ο μετασχηματισμός Fourier (και άλλοι παρόμοιοι παραδοσιακοί μετασχηματισμοί) δεν αποτελούν τις βέλτιστες αναπαραστάσεις για συμπίεση και ανάλυση σημάτων και εικόνων που περιέχουν μεταβατικές ή συγκεντρωμένες συνιστώσες.

Βέβαια, πρέπει να σημειωθεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να αναπαραστήσει οποιαδήποτε αναλυτική συνάρτηση, ακόμα και ένα μεταβατικό σήμα πολύ βραχείας διάρκειας, ως ένα άθροισμα ημιτονοειδών σημάτων. Αυτό όμως επιτυγχάνεται με περίπλοκη διάταξη των ημιτονοειδών συναρτήσεων σε τρόπο ώστε η (καταστροφική) συμβολή τους να δημιουργεί μια συνάρτηση που μηδενίζεται στο μεγαλύτερο μέρος ενός διαστήματος. Αυτή η προσέγγιση δεν είναι κατ' αρχήν λανθασμένη, παράγει όμως ένα περίπλοκο και συγκεχυμένο φάσμα συχνοτήτων.

Για να καταπολεμηθεί αυτό το μειονέκτημα, έχουν κατασκευασθεί διάφοροι εναλλακτικοί μετασχηματισμοί με συναρτήσεις βάσης με περιορισμένη διάρκεια. Αυτές οι συναρτήσεις βάσης μεταβάλλονται τόσο με χρονικές/χωρικές μεταβλητές όσο και με μεταβλητές συχνότητας. Αναφέρονται ως **κυματίδια (wavelets)**, ενώ οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί αναφέρονται ως **μετασχηματισμοί κυματιδίου (wavelet transforms)**.

Ο δημοφιλής μετασχηματισμός Haar αποτελεί το παλαιότερο (και ίσως το απλούστερο) παράδειγμα (διακριτού) μετασχηματισμού κυματιδίου. Γενικά, διακρίνουμε τους μετασχηματισμούς κυματιδίου σε:

- **Συνεχείς μετασχηματισμούς κυματιδίου (continuous wavelet transforms)**, που απεικονίζουν σήματα συνεχούς χρόνου σε μετασχηματισμούς συνεχών μεταβλητών.
- **Σειρές κυματιδίου (wavelet series)**, που απεικονίζουν σήματα συνεχούς χρόνου σε διακριτές ακολουθίες συντελεστών μετασχηματισμού.
- **Διακριτούς μετασχηματισμούς κυματιδίου (discrete wavelet transforms)**, που απεικονίζουν σήματα διακριτού χρόνου σε διακριτές ακολουθίες συντελεστών μετασχηματισμού.

Είναι προφανής η αντιστοιχία μεταξύ των διαφόρων μετασχηματισμών Fourier και των διαφόρων μετασχηματισμών κυματιδίου. Η ανάλυση των μετασχηματισμών κυματιδίου είναι, γενικά, λίγο πιο περίπλοκη επειδή οι συναρτήσεις βάσης δεν είναι κατ' ανάγκη ορθοκανονικές. Εμείς θα επικεντρωθούμε στην περιληπτική παρουσίαση των αναπτυγμάτων σε σειρές κυματιδίου, οι οποίες αποτελούν ίσως την απλούστερη μορφή μετασχηματισμών κυματιδίου.

Σειρές κυματιδίου

Τα αναπτύγματα σειρών κυματιδίου σχηματίζονται με τη χρήση ενός **βασικού κυματιδίου (basic wavelet)** και τη δημιουργία συναρτήσεων βάσης μέσω **δυναδικών αλλαγών κλίμακας (binary scaling)** και **δυναδικών μετατοπίσεων (dyadic translations)** του βασικού κυματιδίου. Πιο συγκεκριμένα, μια συνάρτηση $\psi(t)$ είναι ένα **ορθοκανονικό βασικό κυματίδιο (orthonormal basic wavelet)** αν το σύνολο $\{\psi_{j,k}(t)\}$ των συναρτήσεων

$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k)$, όπου $-\infty < j, k < \infty$ είναι ακέραιοι, αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του διανυσματικού χώρου $L^2(\mathbb{R})$ των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Ο ακέραιος j προσδιορίζει δυαδική αλλαγή κλίμακας (διαστολή αν $j < 0$ και συρρίκνωση αν $j > 0$), ενώ ο ακέραιος k προσδιορίζει μετατόπιση κατά $\frac{k}{2^j}$.

Προκειμένου το σύνολο των συναρτήσεων $\{\psi_{j,k}(t)\}$ να αποτελεί ορθοκανονική βάση του χώρου $L^2(\mathbb{R})$ πρέπει:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(t)\psi_{l,m}(t) dt = \delta_{j,l}\delta_{k,m}$, όπου j, k, l, m είναι ακέραιοι και $\delta_{j,l}, \delta_{k,m}$ είναι δέλτα του Kronecker

- $f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\psi_{j,k}(t)$ (*)

για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(t)$ του χώρου $L^2(\mathbb{R})$. Στην περίπτωση αυτή, πρέπει οι συντελεστές $c_{j,k}$ να δίνονται από τη σχέση

$$c_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(2^j t - k)dt \quad (**)$$

Οι εξισώσεις (*) και (**) προσδιορίζουν ένα ανάπτυγμα σειράς κυματιδίου του σήματος (συνάρτησης) $f(t)$ ως προς το κυματίδιο $\psi(t)$. Παρατηρούμε ότι το σήμα συνεχούς χρόνου $f(t)$ αναπαριστάται από μια διπλά άπειρη ακολουθία συντελεστών $c_{j,k}$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Παράδειγμα: Ο μετασχηματισμός Haar

Ο μετασχηματισμός Haar αποτελεί το παλαιότερο παράδειγμα σειράς κυματιδίου, όπου το βασικό κυματίδιο επιπλέον έχει συμπαγές πεδίο ορισμού. Πιο συγκεκριμένα, το βασικό κυματίδιο του μετασχηματι-

σμού Haar ορίζεται ως:

$$\psi_{\text{Haar}}(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & t = \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < t < 1. \end{cases}$$

Το κυματίδιο αυτό έχει συμπαγές πεδίο ορισμού $[0,1]$, αλλά το φάσμα συχνοτήτων του εκτείνεται με σημαντικές τιμές σε ευρύ διάστημα συχνοτήτων. Για το λόγο αυτό έχουν προταθεί άλλα βασικά κυματίδια που παρουσιάζουν περισσότερο περιορισμένο πεδίο ορισμού και φάσμα συχνοτήτων.

Κεφάλαιο 3

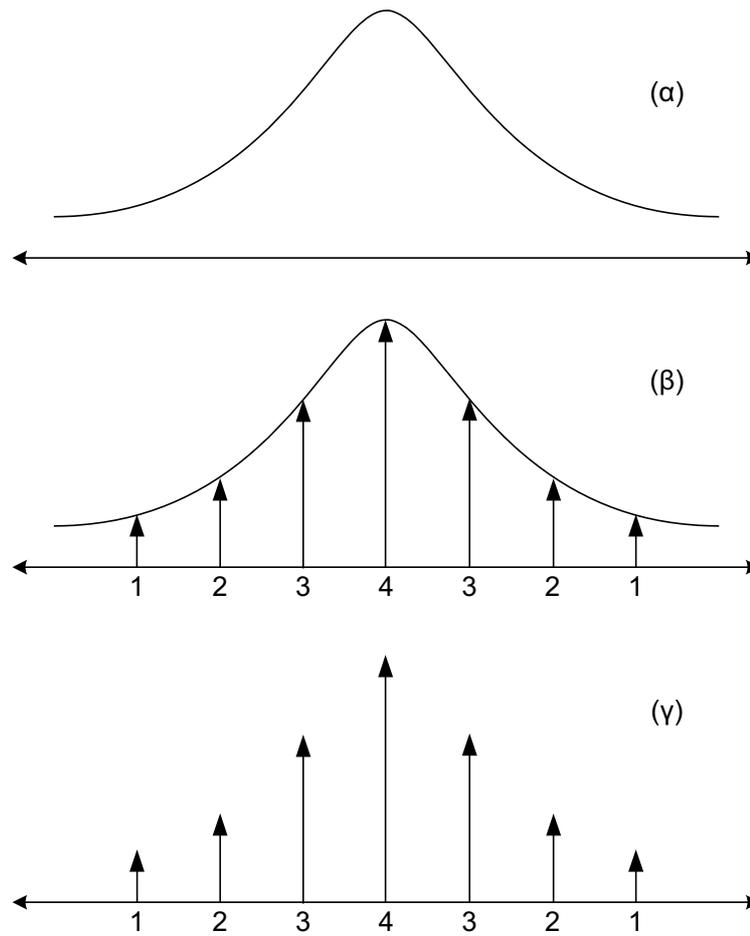
Δειγματοληψία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

Μια σημαντική κατηγορία σημάτων διακριτού χρόνου προκύπτει από τη **δειγματοληψία (sampling)** σημάτων συνεχούς χρόνου. Η διαδικασία αυτή είναι απαραίτητη όταν σήματα συνεχούς χρόνου πρόκειται να υποστούν επεξεργασία με ψηφιακά μέσα και πραγματοποιείται από ειδικές διατάξεις οι οποίες καλούνται **αναλογικο-ψηφιακοί μετατροπείς (analog-to-digital converters)**.

Όταν ένα σήμα συνεχούς χρόνου πρόκειται να ψηφιοποιηθεί και αναζητείται η άριστη τεχνική δειγματοληψίας, πρέπει να μελετηθούν προσεκτικά το φάσμα του σήματος, ο αποδεκτός μέσος ρυθμός δειγματοληψίας και ο τρόπος επεξεργασίας του σήματος.

Η διαδικασία της δειγματοληψίας πρέπει να εκτελεστεί έτσι ώστε η ακολουθία των δειγμάτων που θα προκύψει να αναπαριστάνει το αρχικό σήμα, με όσο το δυνατόν μικρότερη απώλεια πληροφορίας. Αν το φάσμα του σήματος μπορεί να περιοριστεί, όπως απαιτείται από το θεώρημα δειγματοληψίας, τότε η περιοδική δειγματοληψία εφαρμόζεται για διάφορους λόγους. Πρώτον, γιατί είναι η απλούστερη μέθοδος και μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα. Δεύτερον, γιατί οι περιοδικές ακολουθίες δειγμάτων σήματος υφίστανται εύκολα ψηφιακή επεξεργασία. Τέλος, γιατί έχουν αναπτυχθεί πολλοί ταχείς και απο-

τελεσματικοί αλγόριθμοι για την υλοποίηση αντίστοιχων ψηφιακών φίλτρων.



Σχήμα 3.1: Σχηματική αναπαράσταση της δειγματοληψίας σήματος συνεχούς χρόνου.

3.1 Περιοδική δειγματοληψία

Θεωρώντας ένα θετικό αριθμό T και ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$, λαμβάνονται δείγματα του $x(t)$ ανά T χρονικές μονάδες. Προκύπτει ένα σήμα διακριτού χρόνου $\{x_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ που δίνεται από τη σχέση $x_n = x(nT)$. Καταχρηστικά, γράφεται $x(n) = x(nT)$. Ένα σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από σήμα συνεχούς χρόνου μέσω δειγματοληψίας ονομάζεται **δειγματοποιημένο (sampled signal)**. Η ποσότητα T ονομάζεται **περίοδος δειγματοληψίας (sampling period)** και $1/T$ είναι ο **ρυθμός (sampling rate)** ή **συχνότητα δειγματοληψίας (sampling frequency)**.

Στο Σχήμα 3.1 απεικονίζεται η διακριτή αναπαράσταση ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ με δειγματοληψία των τιμών του σε ένα σύνολο σημείων. Η διακριτή αναπαράσταση μπορεί να εκφραστεί ως μια λίστα (ακολουθία) των τιμών 1,2,3,4,3,2,1. Είναι, επίσης, δυνατό να αναπαρασταθούν τα δείγματα του σήματος ως ένα απλό διάγραμμα στον πολυδιάστατο χώρο. Για παράδειγμα, το σύνολο των επτά δειγμάτων του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα διάγραμμα στον 7-διάστατο χώρο, όπου το πρώτο στοιχείο του είναι ίσο με το 1, το δεύτερο με 2, το τρίτο με 3, κ.ο.κ.

Για τη δειγματοληψία σημάτων συνεχούς χρόνου ισχύει το θεώρημα της επόμενης ενότητας που αποδίδεται στους Whittaker, Shannon και Nyquist.

3.1.1 Το θεώρημα δειγματοληψίας

Θεωρούμε το σήμα συνεχούς χρόνου $x(\cdot)$ και την ακολουθία $\{x_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ δειγμάτων του που λαμβάνονται περιοδικά με περίοδο T_s , δηλαδή $x_n = x(nT_s)$ για κάθε n . Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα δειγματοληψίας:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 (Θεώρημα Whittaker, Shannon, Nyquist):

Αν το σήμα $x(\cdot)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i2\pi st} dt$ τέτοιο ώστε $X(s) = 0$ όταν $|s| \geq s_0$ για κάποια συχνότητα s_0 και

η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος είναι τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητάς του s_0 ($\frac{1}{T_s} \geq 2s_0$), τότε η ακολουθία $\{x_n = x(nT_s), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ επαρκεί για να ανακατασκευαστεί το σήμα $x(\cdot)$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Πιο συγκεκριμένα

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin \left[\frac{\pi(t-nT_s)}{T_s} \right]}{\frac{\pi(t-nT_s)}{T_s}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \operatorname{sinc} \left(\frac{t-nT_s}{T_s} \right),$$

όπου $\operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$.

3.1.2 Γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις

Σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις, το θεώρημα δειγματοληψίας παίρνει περισσότερες από μια μορφές. Αν $x(\underline{v})$ είναι ένα d -διάστατο σήμα ($\underline{v} \in \mathbb{R}^d$), ορίζουμε ένα **σχήμα δειγματοληψίας (sampling scheme)** ως

$$x_{n_1 n_2 \dots n_d} = x(n_1 \underline{v}_1 + \dots + n_d \underline{v}_d),$$

όπου $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d$ είναι μια βάση του χώρου \mathbb{R}^d . Όταν τα διανύσματα $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_d$ αποτελούν τη συνήθη βάση, τότε έχουμε μια γενίκευση της μονοδιάστατης δειγματοληψίας. Το θεώρημα δειγματοληψίας γενικεύεται σε περισσότερες διαστάσεις, αλλά το βέλτιστο (με την έννοια του ελάχιστου απαιτούμενου αριθμού δειγμάτων ανά μονάδα όγκου) σχήμα δειγματοληψίας σε περισσότερες από μια διαστάσεις δεν είναι το ορθογώνιο.

3.2 Τυχαία ή μη περιοδική δειγματοληψία

Η εφαρμογή της τυχαίας δειγματοληψίας μπορεί να αποδειχθεί πιο ευεργετική όταν δεν είναι επιθυμητό ή όταν δεν είναι δυνατό να φιλτραριστούν τα σήματα πριν τη μετατροπή τους από συνεχούς χρόνο σε διακριτού χρόνο. Στις περιπτώσεις αυτές, η τυχαία δειγματοληψία μπορεί να μειώσει σημαντικά τα λάθη που οφείλονται στο φαινόμενο της **αναδίπλωσης (aliasing)**, το οποίο μπορεί να καταστρέψει την επεξεργασία των ψηφιακών σημάτων.

Πάντως, το σωστό αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί μόνο όταν η τυχαία δειγματοληψία πραγματοποιηθεί κατάλληλα, με κάποια από τις υπάρχουσες τεχνικές. Οι πιο αποτελεσματικές μέθοδοι είναι αυτές που χρησιμοποιούν **ανεπίξεις τυχαίων σημείων (random point processes)**.

3.2.1 Ανεπίξεις τυχαίων σημείων

Τα **στιγμιότυπα δειγματοληψίας (sampling instants)** συνήθως παριστάνονται ως σημεία στον άξονα του χρόνου. Ακολουθίες τέτοιων σημείων μπορούν να θεωρηθούν ως ανεπίξεις σημείων. Παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο γιατί οι ιδιότητες των δειγματοποιημένων σημάτων εξαρτώνται πρώτα απ' όλα από τα χαρακτηριστικά αυτών των ανεπίξεων.

Μια σχετικά μεγάλη ποικιλία ανεπίξεων τυχαίων σημείων έχει διατυπωθεί για τυχαία δειγματοληψία και έχει ερευνηθεί ένας αριθμός από αυτές για το πότε μειώνουν το φαινόμενο της αναδίπλωσης. Η θεωρία τέτοιων ανεπίξεων έχει αναπτυχθεί βαθμιαία από τους Beutler, Leneman, και Masry, αλλά παρόμοια προβλήματα έχουν επίσης μελετηθεί στα πλαίσια της **θεωρίας ανανέωσης (renewal theory)**.

Παρά όλη τη μεγάλη ποικιλία των ανεπίξεων τυχαίων σημείων που έχουν αναπτυχθεί, λίγες μόνο από αυτές είναι κατάλληλες για εφαρμογές τυχαίας δειγματοληψίας, με κυριότερες τις ακόλουθες: **περιοδική δειγματοληψία με τρέμουλο (periodic sampling with jitter)**, **συσχετισμένη αθροιστική ανέλιξη σημείων (correlated additive point process)**, **δειγματοληψία με τυχαίες παραλήψεις (sampling with random skips)** και τέλος την **αθροιστική τυχαία δειγματοληψία (additive random sampling)** η οποία παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στα επόμενα.

3.2.2 Αθροιστική τυχαία δειγματοληψία

Στην αθροιστική τυχαία δειγματοληψία, το σήμα δειγματοποιείται στις χρονικές στιγμές $t_k = t_{k-1} + \tau_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, όπου τ_k είναι η υλοποίηση μιας τυχαίας μεταβλητής. Αυτός ο τρόπος τυχαίας δειγματοληψίας προτάθηκε το 1960 από τους Shapiro και Silverman και στην αρχή βασίστηκε στην υπόθεση ότι τα διαδοχικά διαστήματα δειγματοληψίας $\{\tau_k, \tau_{k-1}\}$ ήταν στατιστικώς ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανομημένα. Τα χαρακτηριστικά των δειγμάτων αυτών ήταν η μέση τιμή μ και η τυπική απόκλιση σ , ενώ ο μέσος ρυθμός δειγματοληψίας ήταν ίσος με $\frac{1}{\mu}$.

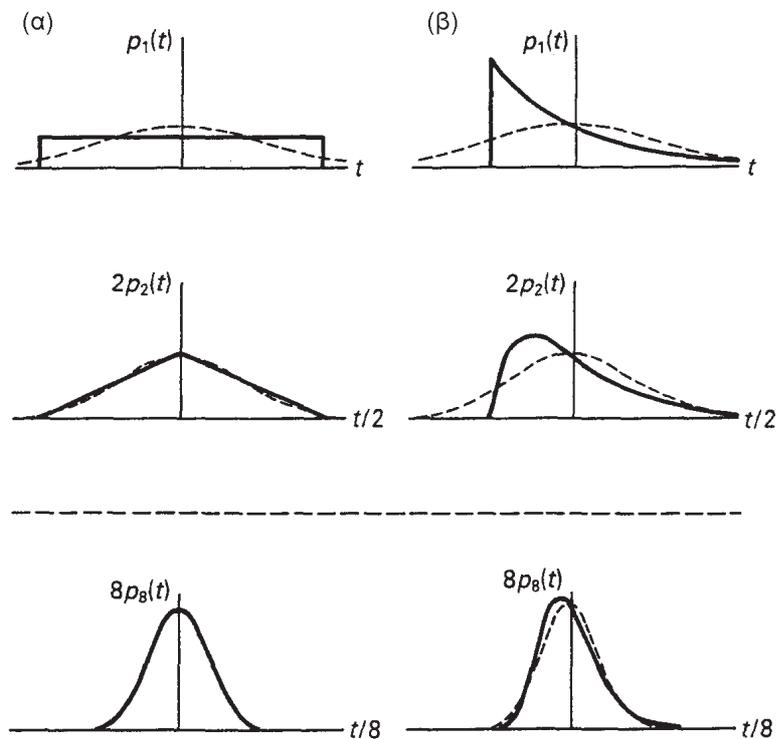
Αν θεωρηθούν τα χρονικά διαστήματα $[0, t_k] = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k$ προκύπτουν τυχαίες μεταβλητές που χαρακτηρίζονται από την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\{p_k(t)\}$. Τότε ισχύει:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_\tau(t) \\ p_2(t) &= p_1(t) * p_\tau(t) \\ &\dots\dots\dots \\ p_k(t) &= p_{k-1}(t) * p_\tau(t), \end{aligned}$$

όπου $*$ συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης, όπως αυτή ορίζεται στην ενότητα 4.2.2. Από το **κεντρικό οριακό θεώρημα της Στατιστικής (central limit theorem in statistics)** ισχύει το ακόλουθο συμπέρασμα:

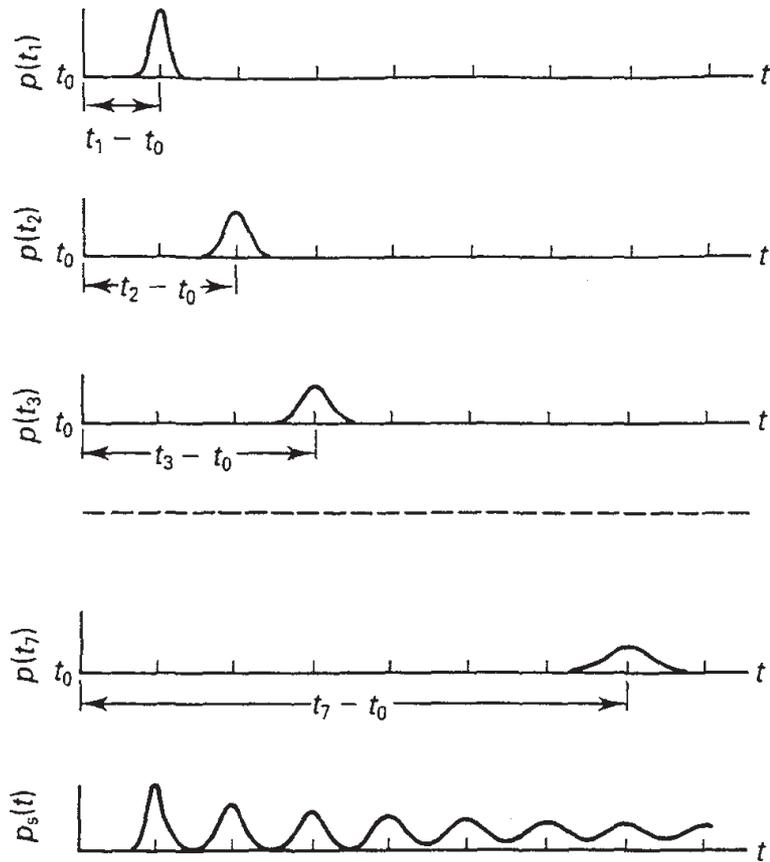
Αν η τυχαία μεταβλητή t_k παριστάνει το καθαρό άθροισμα k στατιστικώς ανεξάρτητων συνιστωσών μεταβλητών $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, τότε όποια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κι αν έχουν οι συνιστώσες αυτές, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k = t_k$ τείνει την κανονική κατανομή, καθώς το k τείνει στο άπειρο.

Επομένως, όποια μέθοδος τυχαίας αθροιστικής δειγματοληψίας και αν εφαρμοστεί, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_\tau(t)$ μπορεί να ποικίλει σημαντικά από περίπτωση σε περίπτωση χωρίς να χειροτερεύουν οι συνθήκες δειγματοληψίας, καθώς η συνάρτηση πυκνότητας $p(t)$ του δείγματος θα τείνει πάντα στη σταθερή τιμή $\frac{1}{\mu}$, όταν το t αυξάνει. Επομένως στην περίπτωση αυτή ισχύει: $p(t) = \frac{1}{\mu}$, $t \geq T_\alpha$.



Σχήμα 3.2: Εξέλιξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $p_r(t)$ όταν $p_1(t)$ είναι (α) ομοιόμορφη και (β) εκθετική.

Στο Σχήμα 3.2 εμφανίζονται οι μετασχηματισμοί των συναρτήσεων πυκνότητας $p_k(t)$, στις περιπτώσεις που η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_r(t)$ έχει (α) κανονική και (β) εκθετική κατανομή. Σημειωτέον ότι οι κλίμακες στα σχήματα είναι διαφορετικές από τη μία συνάρτηση στην άλλη. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του αθροίσματος των r χρονικών διαστημάτων συμβολίζεται με $p_r(t)$ και οι αναμενόμενες τιμές με μ_r . Και στις δύο περιπτώσεις, οι τιμές της $p_r(t)$ αλλάζουν, καθώς ο αριθμός r των διαστημάτων δειγματοληψίας που αθροίζονται αυξάνεται από το 1 στο 8.



Σχήμα 3.3: Η μέθοδος της αθροιστικής τυχαίας δειγματοληψίας.

Η μέθοδος της τυχαίας αθροιστικής δειγματοληψίας παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3. Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό, η συνάρτηση $p(t)$ τείνει να γίνει επίπεδη όταν το t υπερβαίνει κάποιες τιμές T_α . Η τιμή της T_α εξαρτάται από το $p_\tau(t)$ και προφανώς από την αποδεκτή απόκλιση του $p_\tau(t)$ από την αποδεκτή σταθερή τιμή $\frac{1}{\mu}$. Παρά το γεγονός αυτό, αυτή η περίπτωση είναι μόνο για συγχρονισμένη δειγματοληψία με $t_0 = 0$. Αν η δειγματοληψία είναι σταθερή, π.χ. όταν το t_0 είναι μια κατάλληλα κατανομημένη μεταβλητή, $p(t) = \frac{1}{\mu}$ για ολόκληρο το χρονικό διάστημα στο οποίο το σήμα δειγματοποιείται. Αυτό σημαίνει ότι σε αυτή την περίπτωση όλες οι στιγμιαίες τιμές του σήματος δειγματοποιούνται με την ίδια πιθανότητα.

3.3 Κβάντωση σημάτων

Στην ιδανική περίπτωση, η δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου παράγει ένα σήμα διακριτού χρόνου αποτελούμενο από μια ακολουθία δειγμάτων, κάθε ένα από τα οποία είναι γνωστό με άπειρη ακρίβεια. Στην πράξη, όμως, η ιδανική αυτή κατάσταση προσεγγίζεται από μια διαδικασία η οποία μετατρέπει ένα σήμα συνεχούς χρόνου σε ένα ψηφιακό σήμα, δηλαδή σε μια ακολουθία δειγμάτων πεπερασμένης ακρίβειας. Κάθε δείγμα πεπερασμένης ακρίβειας αναφέρεται ως **κβαντισμένο δείγμα (quantized sample)** και παράγεται στην έξοδο ενός **κβαντωτή (quantizer)**, δηλαδή ενός μη γραμμικού συστήματος το οποίο μετασχηματίζει (απεικονίζει) ένα δείγμα άπειρης ακρίβειας σε μια τιμή από ένα πεπερασμένο σύνολο προκαθορισμένων τιμών. Οι κβαντωτές ορίζουν ομοιόμορφα ή μη ομοιόμορφα κατανομημένα επίπεδα κβάντωσης, αλλά περισσότερο συνηθισμένοι είναι οι κβαντωτές του πρώτου τύπου. Στην ουσία, ένας κβαντωτής με ομοιόμορφα κατανομημένα επίπεδα κβάντωσης¹ στρογγυλοποιεί τις τιμές του δείγματος εισόδου στο πλησιέστερο επίπεδο κβάντωσης.

¹Ένας τέτοιος κβαντωτής αναφέρεται και ως **γραμμικός (linear) κβαντωτής**.

3.3.1 Σφάλμα κβάντωσης

Ας υποθέσουμε ότι ένας γραμμικός κβαντωτής χρησιμοποιεί $B + 1$ βιτ και, επομένως, μπορεί να αναπαραστήσει μέχρι 2^{B+1} διαφορετικά επίπεδα κβάντωσης. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι ο κβαντωτής αναπαριστάνει προσημασμένους αριθμούς με χρήση του συστήματος του συμπληρώματος του δύο. Το σύστημα αυτό είναι το πλέον συνηθισμένο στα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα και ίσως το καταλληλότερο για την ανάθεση των επιπέδων κβάντωσης. Θα θεωρήσουμε ότι το πρώτο από αριστερά (πλέον σημαντικό) βιτ χρησιμοποιείται για αναπαράσταση του προσήμου και θα υποθέσουμε ότι ανάμεσα στα δύο πρώτα από αριστερά (πλέον σημαντικά) ψηφία νοείται μια δεκαδική υποδιαστολή. Επομένως, η ακολουθία βιτ

$$a_0 a_1 \dots a_B$$

αναπαριστάνει τον κλασματικό αριθμό

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \dots a_B 2^{-B}.$$

Η σχέση ανάμεσα στις ακολουθίες βιτ $a_0 a_1 \dots a_B$ και στα επίπεδα κβάντωσης εξαρτάται από μια παράμετρο που ονομάζεται **επίπεδο πλήρους κλίμακας (full-scale level)** του κβαντωτή. Το επίπεδο πλήρους κλίμακας του κβαντωτή είναι η μέγιστη (απόλυτη) τιμή που μπορεί να λάβει το σήμα εξόδου του κβαντωτή, πέραν της οποίας επέρχεται κορεσμός και δεν είναι εφικτή η περαιτέρω αύξηση του σήματος εξόδου με αύξηση της (απόλυτης) τιμής του σήματος εισόδου. Αν X_m είναι το επίπεδο πλήρους κλίμακας του κβαντωτή και Δ είναι το βήμα μεταξύ διαδοχικών επιπέδων κβάντωσης, τότε

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}.$$

Το σφάλμα ανάμεσα στην πραγματική τιμή ενός δείγματος και την τιμή που καταγράφεται από τον κβαντωτή ονομάζεται **σφάλμα κβάντωσης (quantization error)** και μπορεί να θεωρηθεί ως θόρυβος. Για το γραμμικό κβαντωτή που μόλις περιγράψαμε, το σφάλμα κβάντωσης κάθε δείγματος λαμβάνει τιμή στο διάστημα $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$.

Για μικρό βήμα Δ , μια λογική υπόθεση είναι ότι το σφάλμα κβάντωσης για κάθε δείγμα αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$. Θα υποθέσουμε ακόμα ότι τα σφάλματα κβάντωσης διαδοχικών δειγμάτων είναι στατιστικώς ανεξάρτητα, καθώς και ότι το σφάλμα κβάντωσης κάθε δείγματος είναι στατιστικώς ανεξάρτητο από το δείγμα. Με τις υποθέσεις αυτές, το σφάλμα κβάντωσης αποτελεί ομοιόμορφα κατανομημένο λευκό θόρυβο, του οποίου η μέση τιμή είναι μηδενική και η διακύμανση λαμβάνει την τιμή

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι, για ένα γραμμικό κβαντωτή των $B + 1$ βιτ, του οποίου το επίπεδο πλήρους κλίμακας είναι X_m , η διακύμανση του θορύβου κβάντωσης είναι

$$\sigma^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}.$$

Η αντίστοιχη λογαριθμική σηματοθορυβική σχέση είναι

$$\Sigma\Theta\Sigma = 10 \log_{10}\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}\right) = 6,02B + 10,8 - 20 \log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_s}\right),$$

όπου σ_s^2 είναι η διακύμανση του σήματος.

Στα συνήθη αναλογικά σήματα (φωνής, μουσικής κτλ.), κατανομή του πλάτους εμφανίζει μια σαφή συγκέντρωση γύρω από τη μηδενική τιμή, ενώ οι ουρές της φθίνουν με ταχύ ρυθμό. Σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι εξαιρετικά απίθανες μεγάλες απόλυτες τιμές του πλάτους του σήματος. Αν υποθέσουμε ότι το πλάτος του σήματος έχει γκαουσιανή κατανομή με διακύμανση σ_s^2 , τότε μόνο ένα ποσοστό 0,064 % των δειγμάτων του σήματος θα ξεπερνά σε πλάτος την τιμή $4\sigma_s$. Επομένως, μπορούμε να αποφύγουμε τον κορεσμό του κβαντωτή για το συντριπτικό ποσοστό των δειγμάτων ενός γκαουσιανού σήματος αν θέσουμε το επίπεδο πλήρους κλίμακας του κβαντωτή στην τιμή $X_m = 4\sigma_s$.² Η αντίστοιχη λογαριθμική σηματο-

²Στην πράξη, το επίπεδο πλήρους κλίμακας του κβαντωτή X_m είναι δεδομένο

θορυβική σχέση απλοποιείται στη μορφή

$$\Sigma\Theta\Sigma = 10 \log_{10}\left(\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}\right) \approx 6B - 1,25,$$

όπου B είναι ο αριθμός των δεφίων του κβαντωτή.

και οι τιμές του σήματος προσαρμόζονται σε αυτό με τη χρήση καταλλήλων φίλτρων και ενισχυτών που προηγούνται της διαδικασίας της κβάντωσης.

Κεφάλαιο 4

Γραμμικά Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα

4.1 Η ιδιότητα της γραμμικότητας

Ένα σύστημα είναι γραμμικό όταν το σήμα εξόδου που αντιστοιχεί στο γραμμικό συνδυασμό δύο σημάτων εισόδου είναι ο ίδιος γραμμικός συνδυασμός των σημάτων εξόδου που αντιστοιχούν σε καθένα από τα σήματα εισόδου. Πιο αυστηρά, το σύστημα $S(\cdot)$ είναι γραμμικό αν και μόνο αν

$$S(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 S(u_1) + \alpha_2 S(u_2)$$

για κάθε α_1, α_2 και οποιαδήποτε σήματα εισόδου u_1, u_2 .

4.2 Κρουστική απόκριση και συνέλιξη

Όταν ένα γραμμικό σύστημα είναι και χρονικά αναλλοίωτο, τότε η περιγραφή του γίνεται πλήρως από μόνη την κρουστική του απόκριση, όπως θα δούμε στο εδάφιο αυτό.

4.2.1 Κρουστική απόκριση

Έστω $x(\cdot)$ το σήμα εισόδου ενός γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με αντίστοιχο σήμα εξόδου $y(\cdot)$. Από τον “ορισμό” της συνάρτησης δ , έχουμε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau, \text{ για κάθε } t.$$

Έστω ότι διεγείρουμε το σύστημα με σήμα εισόδου μια συνάρτηση δέλτα και αυτό αποκρίνεται με σήμα εξόδου μια συνάρτηση $h(\cdot)$. Επειδή το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο, η απόκρισή του σε διέγερση $\delta(\cdot - \tau)$ θα είναι $h(\cdot - \tau)$. Παράλληλα, επειδή είναι γραμμικό, η απόκρισή του στο σήμα εισόδου $x(\cdot)$ θα είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

όποιο και αν είναι το σήμα εισόδου $x(\cdot)$.

Η συνάρτηση $h(\cdot)$, δηλαδή η απόκριση του συστήματος σε σήμα εισόδου $\delta(\cdot)$, ονομάζεται **κρουστική απόκριση (impulse response)** του συστήματος και καθορίζει πλήρως το σύστημα με την έννοια ότι προσδιορίζει την απόκριση σε οποιοδήποτε σήμα εισόδου. Το σήμα εξόδου είναι μια υπέρθεση (με βάρη που καθορίζονται από τις τιμές του σήματος εισόδου) χρονικά μετατοπισμένων κρουστικών αποκρίσεων. Παρατηρούμε όμως ότι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

δηλαδή το σήμα εξόδου είναι υπέρθεση (με βάρη που καθορίζονται από τις τιμές της κρουστικής απόκρισης) χρονικά μετατοπισμένων σημάτων εισόδου.

4.2.2 Συνέλιξη

ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau$$

ονομάζεται **ολοκλήρωμα συνέλιξης (convolution integral)** των συναρτήσεων $x(\cdot)$ και $h(\cdot)$. Η συνάρτηση ονομάζεται συνέλιξη των συναρτήσεων $x(\cdot)$ και $h(\cdot)$ και συμβολίζεται ως $y = x * h$.

Γενίκευση σε δύο διαστάσεις

ένα δισδιάστατο γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα χαρακτηρίζεται από μια δισδιάστατη κρουστική απόκριση $h(\cdot, \cdot)$, τέτοια ώστε από σήμα εισόδου $u(\cdot, \cdot)$ το σύστημα να παράγει σήμα εξόδου $v(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y')h(x - x', y - y')dx'dy' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x - x', y - y')h(x', y')dx'dy' \end{aligned}$$

Γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα συστήματα διακριτού χρόνου

ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα διακριτού χρόνου χαρακτηρίζεται από μια κρουστική απόκριση h_n , έτσι ώστε το σήμα εξόδου y_n που αντιστοιχεί σε σήμα εισόδου x_n να δίνεται από τη συνέλιξη διακριτού χρόνου

$$y_n = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n'}h_{n-n'} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x_{n-n'}h_{n'}$$

4.3 Αιτιατότητα και ευστάθεια

Το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με κρουστική απόκριση $h(\cdot)$ είναι αιτιατό όταν και μόνο όταν $h(t) = 0$ για $t < 0$, όπως προκύπτει από τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau.$$

Το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με κρουστική απόκριση $h(\cdot)$ είναι ευσταθές με την έννοια της φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου όταν και μόνο όταν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty.$$

4.4 Αρμονική απόκριση και συνάρτηση μεταφοράς

Θεωρούμε το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $h(\cdot)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau.$$

Ως σήμα εισόδου, θεωρούμε το μιγαδικό εκθετικό σήμα $x_s(t) = e^{-i2\pi st}$ συχνότητας s . Έχουμε:

$$y_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{-i2\pi st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi s\tau}h(\tau)d\tau.$$

Αλλά $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi s\tau}h(\tau)d\tau = H(s)$ και επομένως $y_s(t) = H(s) \cdot x_s(t)$.

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Η απόκριση (σήμα εξόδου) οποιουδήποτε γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος σε σήμα εισόδου $x_s(t) = e^{-i2\pi st}$ είναι το ίδιο το σήμα εισόδου πολλαπλασιασμένο με μια (γενικά μιγαδική σταθερά) $H(s)$.
2. Η μιγαδική σταθερά $H(s)$ είναι ακριβώς η τιμή του μετασχηματισμού Fourier της χρουστικής απόκρισης $h(\cdot)$ του συστήματος για συχνότητα s .
3. Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα $x_s(t) = e^{-i2\pi st}$ αποτελούν **ιδιοσήματα** οποιουδήποτε γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με αντίστοιχη **ιδιοτιμή** $H(s)$.
- 4.

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i2\pi st} dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s)e^{-i2\pi st} ds$$

Η συνάρτηση $H(s)$ ονομάζεται **συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)** του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα οποιοδήποτε σήμα εισόδου $x(\cdot)$ με μετασχηματισμό Fourier $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i2\pi st} dt$. Έχουμε

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

και

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{i2\pi st} dt.$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi st} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) e^{i2\pi st} dt \right] d\tau \\
 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i2\pi s\tau} d\tau \right] \cdot H(s) = X(s)H(s).
 \end{aligned}$$

Δηλαδή, ο μετασχηματισμός *Fourier* $Y(\cdot)$ της απόκρισης (σήματος εξόδου) ενός γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος είναι ίσος με το γινόμενο του μετασχηματισμού *Fourier* $X(\cdot)$ του σήματος και της συνάρτησης μεταφοράς $H(\cdot)$ του συστήματος. Με άλλα λόγια, η πράξη της συνέλιξης στο πεδίο του χρόνου αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας (και αντίστροφα).

Τα προηγούμενα γενικεύονται και ισχύουν σε περισσότερες διαστάσεις καθώς και σε συστήματα διακριτού χρόνου.

Κεφάλαιο 5

Χρονικά Αναλλοίωτα Συστήματα Volterra

Τα συστήματα Volterra αποτελούν τη φυσική επέκταση σε μη γραμμικά συστήματα των συνελικτικών μοντέλων των γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων. Είδαμε ότι το σήμα εξόδου ενός συνελικτικού μοντέλου αποτελείται από την υπέρθεση (άθροισμα) χρονικά μετατοπισμένων αντιγράφων του σήματος εισόδου με βάρη που προσδιορίζονται από τις τιμές της κρουστικής απόκρισης. Αυτή η ιδέα επεκτείνεται σε μη γραμμικά συστήματα αν τα χρονικά μετατοπισμένα αντίγραφα του σήματος εισόδου πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους ανά δύο ή περισσότερα και υπερτίθενται με κατάλληλα βάρη.

5.1 Ομογενή συστήματα Volterra τάξης n

Ομογενή συστήματα Volterra μηδενικής τάξης

ένα ομογενές σύστημα Volterra μηδενικής τάξης είναι από ορισμό ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με μια σχέση $y(t) = h_0$ για κάποιο σταθερό (ανεξάρτητο του χρόνου) σήμα h_0 .

Ομογενή συστήματα Volterra πρώτης τάξης

ένα ομογενές σύστημα Volterra πρώτης τάξης είναι από ορισμό ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με μια σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h_1(\tau)d\tau$$

για κάποιο μονοδιάστατο σήμα $h_1(\cdot)$. Επομένως, ένα ομογενές σύστημα Volterra πρώτης τάξης είναι ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με κρουστική απόκριση $h_1(\cdot)$. Είδαμε ότι αν $x(\cdot) \rightarrow cx(\cdot)$, τότε $y(\cdot) \rightarrow cy(\cdot)$.

Ομογενή συστήματα Volterra δεύτερης τάξης

Ένα ομογενές σύστημα Volterra δεύτερης τάξης είναι από ορισμό ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με μια σχέση

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1)x(\tau_2)h_2(t - \tau_1, t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)h_2(\tau_1, \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned}$$

για κάποιο δισδιάστατο σήμα $h_2(\cdot, \cdot)$.

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Το δισδιάστατο σήμα $h_2(\cdot, \cdot)$ ονομάζεται **πυρήνας (kernel)** του συστήματος.
2. Αν $x(\cdot) \rightarrow cx(\cdot)$, τότε $y(\cdot) \rightarrow c^2y(\cdot)$.
3. Αν $h_2(\tau_1, \tau_2) \rightarrow g(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_2, \tau_1)$, τότε η σχέση εισόδου-εξόδου (το “σύστημα”) δεν αλλάζει. Επομένως, για να γίνεται

η περιγραφή του συστήματος από ένα μοναδικό πυρήνα, θα θεωρούμε μόνο συμμετριοποιημένους πυρήνες

$$h_2^\sigma(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2}[h_2(\tau_1, \tau_2) + h_2(\tau_2, \tau_1)].$$

Ομογενή συστήματα Volterra τάξης n

ένα ομογενές σύστημα Volterra τάξης n είναι από ορισμό ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με μια σχέση

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) \dots x(\tau_n) h_n(t - \tau_1 \dots t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) h_n(\tau_1 \dots \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \end{aligned}$$

για κάποιο n -διάστατο σήμα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$.

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Το n -διάστατο σήμα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$ ονομάζεται **πυρήνας** του συστήματος.
2. Αν $x(\cdot) \rightarrow cx(\cdot)$, τότε $y(\cdot) \rightarrow c^n y(\cdot)$.
3. Αν γίνει οποιαδήποτε μετάθεση των ορισμάτων της συνάρτησης $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$ τότε η σχέση εισόδου–εξόδου (το “σύστημα”) δεν αλλάζει. Επομένως, για να γίνεται η περιγραφή του συστήματος από ένα μοναδικό πυρήνα, θα θεωρούμε μόνο συμμετριοποιημένους πυρήνες.

5.1.1 Κρουστική απόκριση

Ας θεωρήσουμε την απόκριση ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n σε σήμα εισόδου $\delta(\cdot)$ (κρουστική απόκριση):

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau_1) \dots \delta(\tau_n) h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \\ &= h_n(t, \dots, t). \end{aligned}$$

Σε αντίθεση με την περίπτωση γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, η κρουστική απόκριση ενός ομογενούς συστήματος Volterra τάξης n **δεν** επαρκεί για να περιγραφεί πλήρως το σύστημα.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα με n σήματα εισόδου $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, \dots , $x_n(\cdot)$ και σήμα εξόδου $y(\cdot)$ που περιγράφεται από τη σχέση

$$y_{x_1 \dots x_n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau_1) \dots x_n(\tau_n) h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Το σύστημα αυτό είναι γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο με κρουστική απόκριση $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$. Παρατηρούμε ότι, αν $x_1(t) = \dots = x_n(t) = x(t)$, τότε $y_{x_1 \dots x_n}(t) = y(t)$. Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε το σήμα εξόδου ενός ομογενούς συστήματος Volterra μιας εισόδου τάξης n με πυρήνα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$ ως το σήμα εξόδου ενός γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος n εισόδων με κρουστική απόκριση $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$.

5.1.2 Αιτιατότητα και ευστάθεια

ένα ομογενές σύστημα Volterra τάξης n είναι **αιτιατό** αν και μόνο αν $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = 0$ για $\tau_1 < 0$ ή \dots ή $\tau_n < 0$. ένα ομογενές σύστημα Volterra τάξης n είναι **ευσταθές με την έννοια της φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου** αν (αλλά όχι αναγκαστικά)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)| d\tau_1 \dots d\tau_n < \infty.$$

5.1.3 Αρμονική απόκριση και συνάρτηση μεταφοράς

Ας θεωρήσουμε το ομογενές σύστημα Volterra τάξης n με πυρήνα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$ και είσοδο $x_s(t) = e^{-i2\pi st}$. Η αντίστοιχη έξοδος είναι $y_s(t) = e^{-i2\pi nst} H_n(s, \dots, s)$ (πολλαπλασιασμός συχνότητας με n) όπου

$$H_n(s, \dots, s) = H_n(s_1, \dots, s_n)|_{s_1=\dots=s_n=s}$$

είναι ο n -διάστατος μετασχηματισμός μετασχηματισμός Fourier του πυρήνα $h_n(\cdot, \dots, \cdot)$. Παρατηρούμε ότι το σήμα εξόδου είναι ένα μιγαδικό εκθετικό με συχνότητα πολλαπλασιασμένη επί την τάξη n του συστήματος. Η συνάρτηση $H_n(s, \dots, s)$ ονομάζεται και πάλι **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος.

5.2 Μη ομογενή (πολυωνυμικά) συστήματα Volterra τάξης n

ένα μη ομογενές (πολυωνυμικό) σύστημα Volterra τάξης n είναι από ορισμό ένα σύστημα του οποίου τα σήματα εισόδου $x(\cdot)$ και εξόδου $y(\cdot)$ συνδέονται με μια σχέση

$$y(t) = h_0 + \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1) \dots x(\tau_k) h_k(t - \tau_1, \dots, \tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k$$

για κάποιους πυρήνες $h_k(\cdot, \dots, \cdot)$.

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Αν $x(\cdot) \rightarrow cx(\cdot)$, τότε $y(\cdot)$ είναι πολυώνυμο του c τάξης n , όπου ο συντελεστής του όρου c^k είναι ο όρος Volterra τάξης k , $k = 0, 1, \dots, n$.
2. Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι: $h_0 + \sum_{k=1}^n h_k(t, \dots, t)$.

3. Το σύστημα είναι αιτιατό όταν και μόνο όταν κάθε όρος είναι αιτιατός.
4. Το σύστημα είναι ευσταθές αν (αλλά όχι αναγκαστικά) κάθε όρος είναι ευσταθής.
5. Η αρμονική απόκριση του συστήματος σε σήμα εισόδου $e^{-i2\pi st}$ είναι

$$h_0 + \sum_{k=1}^n H_k(s, \dots, s) \cdot e^{-i2\pi st}.$$

5.3 Θεωρήματα προσέγγισης μη γραμμικών συστημάτων

Η προσέγγιση μη γραμμικών συστημάτων από πολυωνυμικά συστήματα Volterra μπορεί να στηριχτεί σε δύο διαφορετικές θεωρίες, την αναλυτική και την πολυωνυμική.

5.3.1 Αναλυτική θεωρία

Η αναλυτική θεωρία υποθέτει ότι η μαθηματική απεικόνιση από το σήμα εισόδου στο σήμα εξόδου έχει παραγώγους (Frechet ή Gateaux) κάθε τάξης και το ανάπτυγμα (πεπερασμένο άθροισμα ή άπειρη σειρά) Volterra προκύπτει ως ανάπτυγμα δυναμοσειράς σε ένα φραγμένο σύνολο. Αυτή η προσέγγιση ξεκίνησε αρχικά από το Volterra και αργότερα χρησιμοποιήθηκε από το Wiener και άλλους.

Η αναλυτική θεωρία ταυτοποιεί τους ομογενείς όρους Volterra με παραγώγους της απεικόνισης από το σήμα εισόδου στο σήμα εξόδου και έχει, επομένως, τις εξής ιδιότητες:

1. Το ανάπτυγμα ισχύει για ένα σύνολο σημάτων εισόδου $x(\cdot)$ με $\sup_t |x(t)| \leq M$ για κάποιο M .
2. Χρειάζεται να υπολογιστούν οι παράγωγοι της απεικόνισης από το σήμα εισόδου στο σήμα εξόδου και για να επιτευχθεί αυτό πρέπει η απεικόνιση να είναι γνωστή με ανάλογη ακρίβεια.

3. Για τον υπολογισμό του αναπτύγματος δεν απαιτείται πληροφορία εισόδου-εξόδου.
4. Η υλοποίηση του αναπτύγματος γίνεται από μια οικογένεια μη γραμμικών εξισώσεων και μια γραμμική απεικόνιση από την κατάσταση στην έξοδο.

5.3.2 Πολυωνυμική θεωρία

Η πολυωνυμική θεωρία βασίζεται σε γενίκευση του κλασικού θεωρήματος του Weierstrass του απειροστικού λογισμού. Πιο συγκεκριμένα, ισχύουν τα επόμενα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1 Θεωρούμε ένα συμπαγές (δηλ. κλειστό και φραγμένο) σύνολο Σ σημάτων εισόδου $x(\cdot)$, καθένα από τα οποία έχει πεπερασμένη διάρκεια ($t \in [0, T]$) και πεπερασμένη ενέργεια ($\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$). Επίσης, θεωρούμε ένα χρονικά αναλλοίωτο (αιτιατό) συνεχές σύστημα $y(t) = S(x)(t)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα (αιτιατό) πολυωνυμικό σύστημα Volterra $\hat{y}(t) = \hat{S}(x)(t)$, τέτοιο ώστε για κάθε $x(\cdot) \in \Sigma$ και κάθε $t \in [0, T]$:

$$|y(t) - \hat{y}(t)| < \varepsilon.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2 Θεωρούμε ένα σύνολο Σ σημάτων εισόδου $x(\cdot)$, καθένα από τα οποία ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες:

1. Το σήμα ορίζεται για $-\infty < t < \infty$.
2. Το σήμα είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου.
3. Το σήμα είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει m τέτοιο ώστε $x(t) < m$, για κάθε t .
4. Υπάρχει M τέτοιο ώστε $\sup_t |x(t - \tau) - x(t)| < M\tau$, για κάθε $\tau > 0$.

Θεωρούμε ένα χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με φθίνουσα μνήμη $y(t) = S(x)(t)$. Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα πολυωνυμικό σύστημα Volterra $\hat{y}(t) = \hat{S}(x)(t)$, τέτοιο ώστε για κάθε $x(\cdot) \in \Sigma$ και κάθε $-\infty < t < \infty$:

$$|y(t) - \hat{y}(t)| < \varepsilon.$$

Η πολυωνυμική θεωρία προσέγγισης μη γραμμικών συστημάτων έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Το ανάπτυγμα αφορά σε συμπαγή σύνολα σημάτων ή παραλλαγές τους.
2. Το σύστημα δεν απαιτείται παρά να είναι συνεχές ή το πολύ με φθίνουσα μνήμη.
3. Μόνο πληροφορία εισόδου-εξόδου απαιτείται για τον υπολογισμό του αναπτύγματος.
4. Το ανάπτυγμα υλοποιείται από μια οικογένεια γραμμικών εξισώσεων κατάστασης και μια μη γραμμική απεικόνιση από την κατάσταση στην έξοδο.

Κεφάλαιο 6

Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα

6.1 Γενικά

Πολλές από τις βασικές ιδιότητες των κλασικών δυναμικών συστημάτων ανακαλύφθηκαν τον περασμένο αιώνα από επιστήμονες όπως ο Poincare και ο Birkhoff. Η εμφάνιση της νέας κβαντικής φυσικής απέσπασε την προσοχή των επιστημόνων (κυρίως φυσικών και χημικών) από τα προβλήματα αυτά για διάστημα μισού αιώνα. Η αναβίωση της περιοχής σχετίζεται στενά με τη διαθεσιμότητα σύγχρονων υπολογιστών για την εκτέλεση των απαραίτητων αριθμητικών πειραμάτων. Πιο συγκεκριμένα, η ανακάλυψη από τον Feigenbaum της αρχής της **καθολικότητας (universality)** έδωσε στην περιοχή μια μεγάλη ώθηση προς τα εμπρός. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι πολλά τελείως ασυσχέτιστα συστήματα έχουν κοινά χαρακτηριστικά τόσο ποιοτικά όσο επίσης και αριθμητικά.

Οποιοδήποτε σύστημα που εξελίσσεται στο χρόνο με μη τετριμμένο τρόπο μπορεί να θεωρηθεί ως **δυναμικό σύστημα (dynamical system)**, αλλά, για να γίνει περισσότερο ξεκάθαρο το αντικείμενο της **θεωρίας δυναμικών συστημάτων (dynamical system theory)**, επιβάλλεται ίσως να την αποκαλούμε **θεωρία μη γραμμι-**

κών δυναμικών συστημάτων (nonlinear dynamical systems theory) αφού όλα τα ενδιαφέροντα αποτελέσματα που θα συναντήσουμε σχετίζονται στενά με τη μη γραμμικότητα των συστημάτων που θεωρούμε. συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε συστήματα που διαθέτουν στοιχεία του ονομαζόμενου **νομοτελειακού χάους (deterministic chaos)** και θα εξετάσουμε πώς το χάος προσεγγίζεται από μη χαοτικές καταστάσεις καθώς μεταβάλλονται κάποιες παράμετροι.

Τα δυναμικά συστήματα ρυθμίζονται από παραμέτρους. Όταν αλλάζουν οι παράμετροι, αλλάζουν και οι ιδιότητες του συστήματος. συγκεκριμένα, η ευστάθεια ενός συστήματος μπορεί να διερευνηθεί θεωρώντας τα αποτελέσματα μικρών διαταραχών. Αν οι διαταραχές φθίνουν με το χρόνο, το σύστημα είναι ευσταθές. Αν οι διαταραχές αυξάνονται με το χρόνο, το σύστημα είναι ασταθές. Σε κάποια σημεία στο χώρο των παραμέτρων, μερικές από τις ιδιότητες μπορεί να αλλάζουν *ασυνεχώς* σε συνάρτηση με μια ή περισσότερες παραμέτρους. Όταν γραμμικά συστήματα χάνουν τη ευστάθειά τους, η αιτία είναι συνήθως προφανής. Μπορεί αυτό να οφείλεται στο ότι κάποιες παράμετροι έχουν μεταβάλει την εκθετική πτώση σε εκθετική άνοδο ή στο ότι “παραβιάζεται” κάποια συνοριακή συνθήκη. Όμως, πολλά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα χάνουν τη ευστάθειά τους για κάποια μη προφανή αιτία, περίπτωση στην οποία λαμβάνουν χώρα περισσότερο ή λιγότερο δραματικές αλλαγές των δυναμικών προτύπων. Αυτό το φαινόμενο, άγνωστο στη γραμμική θεωρία, ονομάζεται **διχάλα (bifurcation)**. Θα ασχοληθούμε με τη μελέτη διχαλών σε κάποιο βάθος.

Προτού προχωρήσουμε, είναι χρήσιμο να κάνουμε μια γενική ταξινόμηση των διαφόρων δυναμικών συστημάτων και των βασικών τους χαρακτηριστικών. Σε γενικές γραμμές, η έννοια του **χώρου φάσης (phase space)** αναφέρεται στο χώρο που γεννάται από τον ελάχιστο αριθμό δυναμικών (δηλ. εξαρτημένων από το χρόνο) μεταβλητών. Η γενική ταξινόμηση και οι βασικές ιδιότητες δυναμικών συστημάτων εμφανίζονται στον επόμενο πίνακα.

Κλάση	Διάσταση χώρου φάσης	Τύπος μεταβλητών	Χρόνος
Διαφορικές εξισώσεις Μερικών παραγώγων	Άπειρη	Συνεχείς	Συνεχής
Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις	Πεπερασμένη	Συνεχείς	Συνεχής
Επαναληπτικές απεικονίσεις	Πεπερασμένη	Συνεχείς	Διακριτός
Κυτταρώδη αυτόματα	Πεπερασμένη	Διακριτές	Διακριτός

Θα ασχοληθούμε κυρίως με επαναληπτικές απεικονίσεις, αλλά θα ριζούμε μια σύντομη ματιά και στα κυτταρώδη αυτόματα. Θα θεωρήσουμε αποκλειστικά **νομοτελειακά (deterministic)** συστήματα, δηλαδή συστήματα όπου το χρονικά επόμενο βήμα είναι πάντα ακριβώς προβλέψιμο. Πέραν των παραπάνω, ενδιαφέρον παρουσιάζει και η θεωρία των **στοχαστικών (stochastic)** μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων καθώς και φαινόμενα όπως η διάδοση κυματικών παλμών σε μεγάλες αποστάσεις χωρίς διασπορά (**σολιτόνια, solitons**). Με τέτοια θέματα δεν θα ασχοληθούμε εδώ.

6.2 Περιγραφή συστημάτων στο χώρο κατάστασης

Η έννοια της **κατάστασης (state)** αναφέρεται σε εκείνα τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου των οποίων η συμπεριφορά αλλάζει με το χρόνο και στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί ένα ερέθισμα και να παρατηρηθεί η αντίστοιχη απόκριση. Για να προβλεφθεί η μελλοντική συμπεριφορά ενός φυσικού αντικειμένου κάτω από οποιαδήποτε

διέγερση, μπορεί να διενεργηθεί μια ακολουθία πειραμάτων στα οποία εφαρμόζονται διεγέρσεις (σήματα εισόδου) και παρατηρούνται οι αντίστοιχες αποκρίσεις (σήματα εξόδου). Από τα πειράματα αυτά, συλλέγεται ένα σύνολο από ζεύγη εισόδου-εξόδου. Κάθε ζεύγος εισόδου-εξόδου είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος συναρτήσεων του χρόνου ορισμένων για $t \geq t_0$, όπου t_0 είναι η χρονική στιγμή της πρώτης εφαρμογής της διέγερσης στην είσοδο.

Θα ονομάζουμε **κατάσταση του φυσικού αντικειμένου (state of the physical object)** το σύνολο των ιδιοτήτων του αντικειμένου οι οποίες συσχετίζουν την είσοδο και την έξοδό του σε τρόπο ώστε γνώση του σήματος εισόδου για $t \geq t_0$ και της κατάστασης για $t = t_0$ να προσδιορίζει πλήρως μια μοναδική απόκριση (σήμα εξόδου) για $t \geq t_0$.

Οι παραπάνω έννοιες γίνονται περισσότερο εύχρηστες όταν θεωρούνται από την αφηρημένη τους πλευρά. Ένα **αφηρημένο αντικείμενο (abstract object)** ορίζεται ως το σύνολο των ζευγών εισόδου-εξόδου τα οποία περιγράφουν τη συμπεριφορά ενός φυσικού αντικειμένου. Αυτά, για ένα συγκεκριμένο σύνολο σημάτων εισόδου και αντιστοίχων σημάτων εξόδου, μπορούν να προσδιοριστούν πειραματικά. Συνήθως όμως, το αφηρημένο αντικείμενο προσδιορίζεται ως η κλάση όλων των σημάτων που υπακούουν σε κάποια μαθηματική εξίσωση, η οποία είναι απόρροια εφαρμογής γνωστών φυσικών νόμων.

Η **κατάσταση ενός αφηρημένου αντικειμένου (state of an abstract object)** είναι μια συλλογή αριθμών οι οποίοι μαζί με το σήμα εισόδου για $t \geq t_0$ προσδιορίζουν μονοσήμαντα το σήμα εξόδου για κάθε $t \geq t_0$. Κατά βάση, η κατάσταση παραμετροποιεί το σύνολο των ζευγών εισόδου-εξόδου.

Μια διανυσματική συνάρτηση, η τιμή της οποίας σε κάθε χρονική στιγμή αποτελεί την κατάσταση του αφηρημένου αντικειμένου εκείνη τη στιγμή, ονομάζεται **μεταβλητή κατάστασης (state variable)**. Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών της μεταβλητής κατάστασης ονομάζεται, αντίστοιχα, **χώρος κατάστασης (state space)** ή **χώρος φάσης (phase space)**.

Η μεταβλητή κατάσταση είναι μια εκπεφρασμένη συνάρτηση του χρόνου, αλλά εξαρτάται μη εκπεφρασμένα από το χρόνο έναρξης, την αρχική κατάσταση και το σήμα εισόδου. Αυτή η συναρτησιακή εξάρτηση ονομάζεται **τροχιά (trajectory)**.

Ένα **δυναμικό σύστημα (dynamical system)** είναι μια μαθηματική σχέση με την οποία :

- Ένα σήμα εξόδου υπάρχει για κάθε $t \geq t_0$ δεδομένου ενός σήματος εισόδου για κάθε t
- Η τιμή του σήματος εξόδου κατά τη χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται από τις τιμές του σήματος εισόδου κατά τις χρονικές στιγμές $\tau \geq t$.

Δεχόμαστε ότι για ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να βρεθεί μια περιγραφή στο χώρο κατάστασης η οποία να ικανοποιεί τις επόμενες συνθήκες:

1. ορίζεται μονοσήμαντα ένα σήμα εξόδου για $t > t_0$ δεδομένης της κατάστασης τη στιγμή t_0 και του σήματος εισόδου για $t \geq t_0$,
2. ορίζεται μονοσήμαντα μια τροχιά για $t > t_0$ δεδομένης της κατάστασης τη στιγμή t_0 και του σήματος εισόδου για $t \geq t_0$,
3. από κάθε κατάσταση ξεκινάει μια μοναδική τροχιά,
4. οι τροχιές δεν εξαρτώνται από τις τιμές του σήματος εισόδου σε μελλοντικές χρονικές στιγμές,
5. οι τροχιές ικανοποιούν τη μεταβατική ιδιότητα καθώς το σήμα εισόδου μεταφέρει το σύστημα από τροχιά σε τροχιά.

6.3 Επαναληπτικές απεικονίσεις

Θεωρείστε την επαναληπτική απεικόνιση :

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (6.1)$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ χρησιμοποιείται για να “προβλέψει” το επόμενο x με x_n ως το σημείο εκκίνησης. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως μια διακριτή χρονοσειρά μιας μεταβλητής x μετρούμενης σε τακτικά πεπερασμένα χρονικά διαστήματα και n είναι η αντίστοιχη χρονική ετικέτα. Το σύστημα είναι **νομοτελειακό** αφού μια δεδομένη τιμή του x οδηγεί πάντα στην ίδια προβλέψιμη επόμενη τιμή.

Επαναληπτικές απεικονίσεις αυτού του τύπου έχουν εξεταστεί με μεγάλο ενδιαφέρον. Εκτός του ότι πολλοί βρίσκουν αυτές τις απεικονίσεις γοητευτικές, υπάρχουν επίσης φυσικοί λόγοι για τη μελέτη διακριτών απεικονίσεων. Για παράδειγμα, οι απεικονίσεις αυτές μπορούν να μιμηθούν πολλά σημαντικά χαρακτηριστικά ρεαλιστικών μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και να χρησιμοποιηθούν για να μειωθεί η πολυπλοκότητα και η διάσταση του χώρου φάσης.

Ως εισαγωγή στη **λογιστική απεικόνιση (logistic map)**, η οποία προκύπτει από την εξίσωση (6.1) όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραβολή, θα εξετάσουμε με συντομία την απλή αλλά σημαντική περίπτωση της **γραμμικής απεικόνισης (linear map)**.

6.3.1 Η γραμμική απεικόνιση

Έστω $f(x)$ η ευθεία γραμμή

$$f(x) = Ax + B, \quad (6.2)$$

δηλαδή

$$x_{n+1} = Ax_n + B. \quad (6.3)$$

Εισάγουμε τώρα το μετασχηματισμό **κλίμακας (scaling)** και **μετατόπισης (translation)**

$$x_n = kx'_n + d. \quad (6.4)$$

Η παράμετρος κλίμακας k και η παράμετρος μετατόπισης d επιλέγονται σε τρόπο που να μας διευκολύνουν. Με χρήση της εξίσωσης

(6.4), η εξίσωση (6.3) δίνει

$$kx'_{n+1} + d = kAx'_n + Ad + B \quad (6.5)$$

Επιλέγοντας $d = Ad + B$, που είναι πάντα δυνατό εφόσον $A \neq 1$, βρίσκουμε

$$x'_{n+1} = Ax'_n \quad (6.6)$$

Επομένως, η παράμετρος B της εξίσωσης (6.3) μπορεί σχεδόν πάντα να απαλειφθεί με μετασχηματισμό. Επίσης, ο μετασχηματισμός κλίμακας δεν έχει καμία χρησιμότητα, αφού απαλείφεται από την εξίσωση (6.5) όταν η παράμετρος d επιλεγεί έτσι ώστε ο σταθερός όρος να είναι μηδέν.

Καταργώντας τον τόνο, η εξίσωση (6.6) έχει την επόμενη λύση

$$x_n = x_0 A^n \quad (6.7)$$

όπου x_0 είναι αυθαίρετος αριθμός. συγκεκριμένα, το σημείο $x_0 = 0$ είναι το **σημείο προσήλωσης (fixed point)** της απεικόνισης και έτσι η τροχιά καθίσταται $x_n = 0$ ανεξάρτητα από το n . Για $|A| > 1$, η λύση αντιπροσωπεύει ένα εκθετικά αυξανόμενο πλάτος, ενώ για $|A| < 1$ αντιπροσωπεύει μια εκθετικά αποσβενόμενη κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά έλκεται προς το σημείο προσήλωσης, το οποίο επομένως ονομάζεται **προσελκυστής (attractor)** για $-1 < A < 1$. Προφανώς, το σημείο προσήλωσης είναι ευσταθές αφού κάθε τροχιά που ξεκινάει λίγο μακριά από το σημείο προσήλωσης σταδιακά θα το προσεγγίσει. Για $|A| > 1$, η κίνηση είναι πάντα αποκλίνουσα και, στην περίπτωση αυτή, το σημείο προσήλωσης είναι ασταθές και επομένως ονομάζεται **απωθητής (repeller)**. Άσχετα από το πόσο κοντά μπορεί να είναι αρχικά η τροχιά στον απωθητή, μπορεί πάντα να βρεθεί αυθαίρετα μακριά μετά από επαρκή χρόνο.

Η περίπτωση $A = 1$ μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει μη αποσβενόμενες περιοδικές ταλαντώσεις που παρατηρούνται σε χρονικά διαστήματα ίσα με τη βασική περίοδο. Η περίπτωση $A = -1$ αντιπροσωπεύει επίσης ένα ταλαντευόμενο σύστημα, αλλά με περίοδο 2 αφού χρειάζονται δύο επαναλήψεις για να επιστρέψει το σύστημα στο

σημείο εκκίνησης. Αυτή η τελευταία περίπτωση είναι σημαντική για την κατανόηση του φαινομένου των **διχαλών διπλασιασμού της περιόδου (period doubling bifurcation)**.

6.3.2 Ορισμός και μετασχηματισμοί της λογιστικής απεικόνισης

Επιστρέφουμε σε πιο γενικές συναρτήσεις $f(x)$ και θεωρούμε ένα ανάπτυγμα σειράς γύρω από ένα σημείο προσήλωσης από το οποίο κρατάμε όρους μέχρι και δεύτερης τάξης ως προς x

$$f(x) = A + Bx + Cx^2. \quad (6.8)$$

Η συνάρτηση $f(x)$ της εξίσωσης (6.8) εμφανίζεται ως τρι-παραμετρική συνάρτηση, αλλά στην πραγματικότητα είναι μόνο μια μονο-παραμετρική συνάρτηση εξαιτίας της δυνατότητας να κάνει κανείς αλλαγές κλίμακας και μετατοπίσεις όπως στην εξίσωση (6.4). Χρησιμοποιώντας αυτό το μετασχηματισμό, έχουμε

$$x_{n+1} = (A - d + Bd + Cd^2/k + (B + 2Cd)x_n + Ckx_n^2). \quad (6.9)$$

Η παράμετρος κλίμακας k μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί για να κάνει το συντελεστή του όρου δεύτερης τάξης οτιδήποτε επιθυμούμε, εκτός φυσικά από μηδέν. Όμοια, δίνοντας στην παράμετρο d μια βολική τιμή, καταλήγουμε σε μια μόνο παράμετρο. Η ελευθερία στην επιλογή της μορφής του $f(x)$ οδηγεί σε διάφορες βασικά ισοδύναμες εκφράσεις. Περισσότερο ή λιγότερο κοινές είναι οι επόμενες εκφράσεις:

$$f(x) = 2cx + 2x^2 \quad (6.10)$$

$$f(x) = 1 - \mu x^2 \quad (6.11)$$

$$f(x) = 4\lambda x(1 - x) \quad (6.12)$$

$$f(x) = c + x^2 \quad (6.13)$$

$$f(x) = b(1 - 2x^2) \quad (6.14)$$

Καθεμιά από αυτές τις εξισώσεις, μαζί με την εξίσωση (6.1), μπορούν να θεωρηθούν ότι ορίζουν τη λογιστική απεικόνιση. Οι σχέσεις μεταξύ των διαφόρων παραμέτρων μπορούν να βρεθούν εύκολα από την εξίσωση (6.9). Η μορφή (6.12) είναι ίσως η πιο πρακτική, ενώ η μορφή (6.13) είναι υπολογιστικά απλούστερη.

6.3.3 Τα σημεία προσήλωσης της λογιστικής απεικόνισης και η ευστάθειά τους

Τα σημεία προσήλωσης της απεικόνισης είναι εκείνα που ικανοποιούν τη σχέση

$$x = f(x). \quad (6.15)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.12), βρίσκουμε δύο λύσεις :

$$x_1 = 0 \quad (6.16)$$

και

$$x_2 = 1 - \frac{1}{4\lambda}. \quad (6.17)$$

Θα διερευνήσουμε τώρα την ευστάθεια των σημείων προσήλωσης. Έστω ένα σημείο προσήλωσης x που ορίζεται από την εξίσωση (6.15). Υποθέτουμε ότι η τροχιά ξεκινάει από μια μικρή απόσταση μακριά από το σημείο x . Ορίζουμε τις μικρές ποσότητες ε_n ως

$$x_n = x + \varepsilon_n. \quad (6.18)$$

Έχουμε :

$$x + \varepsilon_n = f(x + \varepsilon_n) \approx f(x) + f'(x)\varepsilon_n \quad (6.19)$$

ή, αφού $x = f(x)$,

$$\varepsilon_{n+1} \approx f'(x)\varepsilon_n, \quad (6.20)$$

που δεν είναι τίποτε άλλο παρά η γραμμική απεικόνιση (6.6). Κατά συνέπεια, πρέπει να ισχύει η **συνθήκη ευστάθειας (stability condition)**

$$|f'(x)| < 1 \quad (6.21)$$

προκειμένου τα σημεία προσήλωσης x να είναι ευσταθή.

Στην περίπτωση μας, έχουμε

$$f'(x) = 4\lambda - 8\lambda x \quad (6.22)$$

με βάση τις τιμές x_1 (εξίσωση (6.16)) και x_2 (εξίσωση (6.17)) των σημείων προσήλωσης. Επομένως, βρίσκουμε ευστάθεια για

$$-\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{4} \quad \text{για το σημείο } x = x_1 \quad (6.23)$$

και

$$\frac{1}{4} < \lambda < \frac{3}{4} \quad \text{για το σημείο } x = x_2. \quad (6.24)$$

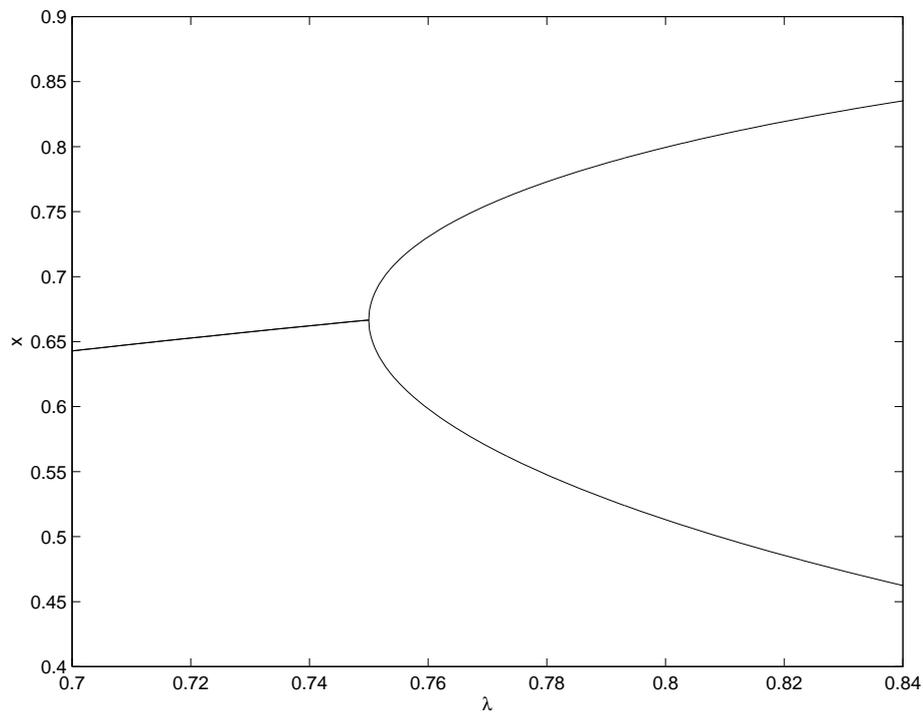
Θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας στο διάστημα τιμών $\frac{1}{4} < \lambda \leq 1$, όπου το x_1 είναι πάντα ασταθές.

Αν θεωρήσουμε την παράγωγο $f'(x_2) = -4\lambda + 2$, όπου x_2 είναι το δεύτερο σημείο προσήλωσης, παρατηρούμε ότι αλλάζει μονοτονικά από 1 για $\lambda = \frac{1}{4}$ σε -1 για $\lambda = \frac{3}{4}$. Αυτό έχει πολύ σημαντικές συνέπειες. Προς το παρόν, σημειώνουμε ότι κάπου στην περιοχή ευστάθειας (πιο συγκεκριμένα, για $\lambda = \frac{1}{2}$) πρέπει να υπάρχει μια τιμή της παραμέτρου λ όπου η παράγωγος $f'(x_2)$ είναι μηδέν. Για αυτή την τιμή της παραμέτρου λ , το σημείο προσήλωσης θα λέμε ότι είναι **υπερευσταθές (superstable)**. Γνωρίζουμε από τη γραμμική απεικόνιση, ότι η κανονική σύγκλιση προς τον προσελκυστή είναι εκθετική, αλλά στην περίπτωση της υπερευστάθειας η σύγκλιση είναι πολύ πιο γρήγορη. Αυτό μπορούμε να το δούμε άμεσα αφού η τιμή $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι μια από τις σπάνιες περιπτώσεις όπου είναι δυνατό να βρεθεί η ακριβής έκφραση για κάθε τροχιά. Το αποτέλεσμα είναι:

$$x_n = [1 - (1 - 2x_0)^{2^n}] / 2. \quad (6.25)$$

Εδώ, x_0 είναι οποιοσδήποτε αριθμός στο διάστημα $(0,1)$. Προφανώς, η σχέση (6.25) συγκλίνει εξαιρετικά γρήγορα.

Είδαμε προηγουμένως ότι το σημείο προσήλωσης x_2 χάνει την ευστάθειά του για $\lambda = \frac{3}{4}$, αλλά συνεχίζει να αποτελεί σημείο προσήλωσης. Για $\lambda = \frac{3}{4}$, κάνει τη μετάβαση από προσελκυστή σε απωθητή. Η επιρροή του, όμως, παραμένει σημαντική και για $\lambda \in (\frac{3}{4}, 1]$.



Σχήμα 6.1: Η σταδιακή αύξηση της παραμέτρου λ οδηγεί στη δημιουργία μιας διχάλας στην τιμή $\lambda = \frac{3}{4}$.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τι συμβαίνει για $\lambda = \frac{3}{4}$, εκτελούμε το επόμενο αριθμητικό πείραμα: πρώτα καθορίζουμε μια αρχική τιμή για το λ και στη συνέχεια επιλέγουμε ένα αρχικό x_0 τυχαία στο διάστημα $(0,1)$ και αφήνουμε τον υπολογιστή να τρέξει για λίγο (συνήθως επαρκούν 100 επαναλήψεις) ώστε να αποσβεστούν οι μεταβατικές καταστάσεις. Κατόπιν, σχεδιάζουμε τις τιμές του x_n (200 με 300 τιμές του x_n για κάθε λ επαρκούν συνήθως). Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω, αυξάνοντας σταδιακά το λ . Για $\lambda = \frac{3}{4}$, η απλή γραμμή που αναπαριστάει την ευσταθή περίοδο μιας επανάληψης χωρίζεται σε δύο γραμμές μέσω μιας **διχάλας δικράνου (pitchfork bifurcation)**, όπως στο Σχήμα 6.1. Ένας άλλος όρος για το ίδιο φαινόμενο είναι **διχάλα διπλασιασμού της περιόδου (period**

doubling bifurcation). Η έννοια των διχάλων είναι βασική σε όλη τη θεωρία των δυναμικών συστημάτων και συναντούμε και άλλους τύπους τους εκτός από τις διχάλες διπλασιασμού της περιόδου.

Ας κάνουμε τώρα την ανάλυση της ευστάθειας κάπως πληρέστερη για $\lambda = \frac{3}{4}$. Εφόσον $f'(x_2(\lambda = \frac{3}{4})) = -1$, συμπεραίνουμε από την εξίσωση (6.20) ότι η μικρή διαταραχή εκτελεί μια ταλάντωση με περίοδο δύο επαναλήψεων. Κατά συνέπεια, καταλαβαίνουμε τώρα την εμφάνιση μιας διχάλας διπλασιασμού της περιόδου για $\lambda = \frac{3}{4}$.

Μια τροχιά περιόδου N επαναλήψεων είναι μια τροχιά που επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης μετά από N επαναλήψεις. Ο λόγος για τον οποίο το σημείο προσήλωσης, δηλαδή η τροχιά με περίοδο μιας επανάληψης, τονίζεται τόσο πολύ είναι επειδή αποτελεί το πρωτότυπο για όλες τις περιοδικές τροχιές. Αυτό φαίνεται ως εξής: η εξίσωση που προσδιορίζει μια τροχιά με περίοδο N επαναλήψεων είναι

$$x = f(f(\dots(f(x)))) \equiv f^N(x), \quad (6.26)$$

όπου εμφανίζονται N συνθέσεις της συνάρτησης f . Αυτή, όμως, δεν είναι παρά η εξίσωση των σημείων προσήλωσης της νέας συνάρτησης

$$F(x) = f^N(x). \quad (6.27)$$

Επομένως, ισχύει γενικά ότι έχουμε μια διχάλα διπλασιασμού της περιόδου κάθε φορά που $F'(x) = -1$ και μια **εφαπτόμενη διχάλα (tangent bifurcation)** όταν $F'(x) = 1$. Η ευσταθής τροχιά με περίοδο τριών επαναλήψεων εμφανίζεται για πρώτη φορά στη χαστική περιοχή ως αποτέλεσμα μιας εφαπτόμενης διχάλας με $N = 3$.

6.3.4 Η διαδρομή προς το χάος μέσα από διπλασιασμούς της περιόδου και οι σταθερές του Feigenbaum

Είδαμε ότι η τροχιά με περίοδο μιας επανάληψης διχάζεται σε μια τροχιά με περίοδο δύο επαναλήψεων, η οποία και πάλι διχάζεται σε μια τροχιά με περίοδο τεσσάρων επαναλήψεων. Αυτή η ακολουθία των

διαδοχικών διχαλών συνεχίζεται. Στην πραγματικότητα υπάρχει ένα άπειρο πλήθος διχαλών διπλασιασμού της περιόδου που λαμβάνουν χώρα σε όλο και συντομότερα διαστήματα. Μετά από n διχάλες, η διάρκεια της περιόδου είναι $2n$ επαναλήψεις και, επομένως, μετά από άπειρες διχάλες η διάρκεια της περιόδου γίνεται άπειρη, δηλαδή δεν υπάρχει πλέον περιοδικότητα και ο προσελκυστής του συστήματος έχει γίνει **απεριοδικός (aperiodic)** ή **χαοτικός (chaotic)**. Το σημείο λ_∞ όπου συμβαίνει αυτό είναι ένα **σημείο συσσώρευσης (accumulation point)** της ακολουθίας διπλασιασμού της συχνότητας.

Εστω λ_n το σημείο όπου διχάζεται η τροχιά με περίοδο $2n$ επαναλήψεων. Σχηματίζουμε τα πηλίκα:

$$\delta_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}. \quad (6.28)$$

Ο Feigenbaum έκανε ορισμένες σημαντικές παρατηρήσεις σχετικά με αυτή την ακολουθία. Η πρώτη είναι ότι η ακολουθία των δ_n συγκλίνει πολύ γρήγορα σε μια σταθερά $\delta = 4.66920\dots$. Αυτό σημαίνει ότι η προσέγγιση στο λ_∞ είναι γεωμετρική. Μπορούμε να εκτιμήσουμε τη θέση του λ_∞ υποθέτοντας ότι η ακολουθία είναι ακριβώς γεωμετρική από την $(n-1)$ -οστή διχάλα και πέρα. Βρίσκουμε:

$$\lambda_\infty \approx \lambda_n + \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\delta - 1}. \quad (6.29)$$

Χρησιμοποιώντας $n = 2$ και την προσεγγιστική τιμή $\delta = \sqrt{6} + \sqrt{5}$, καταλήγουμε στην εκτίμηση $\lambda_\infty \approx 0.892862\dots$. Μια πιο ακριβής αριθμητική εκτίμηση είναι $\lambda_\infty \approx 0.892864\dots$

Μπορούμε να ορίσουμε άλλο ένα πηλίκο μετρώντας το μέγεθος του ανοίγματος μιας διχάλας σε σχέση με το άνοιγμα των διχαλών της επόμενης γενεάς. Τα ανοίγματα ε_n μετρώνται στο σημείο όπου οι τροχιές είναι υπερευσταθείς. Η ακολουθία των πηλίκων $\alpha_n = -\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$ συγκλίνει πολύ γρήγορα προς μια σταθερά $\alpha = 2.5029\dots$. Αφού ο αριθμός αυτός είναι μικρότερος από το δ , οι διχάλες θα μοιάζουν όλο και περισσότερο με κατακόρυφες μπάρες καθώς προσεγγίζεται το λ_∞ .

Ο Feigenbaum ανακάλυψε ότι οι αριθμοί α και δ είναι **καθολικοί (universal)** για ακολουθίες διπλασιασμού της περιόδου. Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί αυτοί είναι ανεξάρτητοι της ειδικής μορφής της συνάρτησης $f(x)$, αρκεί η συνάρτηση $f(x)$ να είναι ομαλή με μια μόνο “καμπούρα”, συνεχή πρώτη παράγωγο και δεύτερη παράγωγο που δεν μηδενίζεται στο ακρότατο.

Η τροχιά με περίοδο $2n$ επαναλήψεων συνεχίζει να υφίσταται για κάθε τιμή του λ από λ_n ως 1, αλλά ως απωθητική τροχιά που επομένως δεν είναι ορατή σε αριθμητικά πειράματα. Για κάθε $n > 2$, υπάρχουν ασταθείς και ευσταθείς τροχιές περιόδου $2n$ επαναλήψεων στην περιοχή $\lambda_\infty < \lambda < 1$, διαφορετικές από αυτές που παράγονται σε διχάλες διπλασιασμού της περιόδου για $\lambda < \lambda_\infty$.

6.3.5 Χάος και παράδοξοι προσελκυστές

Πέρα από το λ_∞ , υπάρχουν χαοτικές τροχιές. Τα χαρακτηριστικά μιας χαοτικής τροχιάς είναι :

- δεν είναι περιοδική,
- δεν έχει ως όριο μια περιοδική τροχιά,
- είναι πολύ ευαίσθητη στην εξάρτηση της από τις αρχικές συνθήκες.

Η τελευταία συνθήκη σημαίνει ότι δύο τροχιές που ξεκινούν κοντά η μια στην άλλη θα διαχωρίζονται όλο και περισσότερο, τουλάχιστον αρχικά, όσο περνάει ο χρόνος. Όπως είδαμε, στην περιοχή $\lambda < \lambda_\infty$ υπάρχουν ευσταθείς περιοδικές τροχιές. Περιοδικές τροχιές που ξεκινούν μακριά από την ευσταθή περιοδική τροχιά θα την έχουν ως όριο καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Επιπλέον, μια χαοτική τροχιά ή θα έχει κάποια οριακή τροχιά που ονομάζεται **παράδοξος προσελκυστής (strange attractor)** ή θα ταυτιστεί με τον ίδιο τον παράδοξο προσελκυστή.

Το παραμετρικό διάστημα $\lambda_\infty < \lambda < 1$ αποτελεί τη χαοτική περιοχή, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχουν μόνο χαοτικές τροχιές

σ' αυτή την περιοχή. Στην πραγματικότητα, υπάρχει ένα άπειρο πλήθος παραθύρων όπου υπάρχουν περιοδικοί προσελκυστές και ένας περιοδικός προσελκυστής μπορεί να βρίσκεται αυθαίρετα κοντά σε οποιονδήποτε παράδοξο προσελκυστή.

6.3.6 Το κρίσιμο σημείο και οι επαναλήψεις του

Το σημείο του χώρου φάσης όπου $f'(x) = 0$ ονομάζεται **κρίσιμο σημείο (critical point)**. Με την παραμετροποίηση που χρησιμοποιήσαμε, το κρίσιμο σημείο βρίσκεται στο $x = \frac{1}{2}$ ανεξάρτητα από την τιμή του λ . Σε πολλές περιπτώσεις, είναι πρακτικότερο να απλειωθεί ο όρος πρώτης τάξης στη συνάρτηση $f(x)$ έτσι ώστε το κρίσιμο σημείο να βρίσκεται στο $x = 0$ όπως στην εξίσωση (6.13). Εστω $f^n(x)$ όπως στην εξίσωση (6.26). Θεωρούμε μια τροχιά με περίοδο n επαναλήψεων $x_{n+1} = x_1$. Από τον κανόνα παραγώγισης γινομένου έχουμε :

$$f^n(x_1) = f'(x_n)f'(x_{n-1})\dots f'(x_1). \quad (6.30)$$

Επομένως, κάθε φορά που το κρίσιμο σημείο βρίσκεται πάνω στην τροχιά θα ισχύει ότι $f^n(\frac{1}{2}) = 0$. Αυτό, με τη σειρά του, σημαίνει ότι όχι μόνο η τροχιά είναι ευσταθής, αλλά ότι είναι υπερευσταθής.

Οι πρώτες δύο επαναλήψεις του κρίσιμου σημείου είναι :

$$f^1\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda \quad (6.31)$$

και

$$f^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\lambda^2(1 - \lambda). \quad (6.32)$$

Γενικότερα, η n -οστή επανάληψη του κρίσιμου σημείου είναι ένα πολυώνυμο ως προς λ βαθμού $2^n - 1$ και, καθώς το n αυξάνει, γίνεται μια συνάρτηση που εκτελεί έναν γρήγορα αυξανόμενο αριθμό ταλαντώσεων και διελεύσεων από τη γραμμή που παριστάνει το κρίσιμο σημείο. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχουν άπειρα περιοδικά παράθυρα στη χαοτική περιοχή. Ίσως θα αναρωτιόταν κανείς αν υπάρχει εκεί τίποτα άλλο από περιοδικά παράθυρα. Όπως μπορεί να

αποδειχθεί, όταν το συνολικό μήκος όλων των περιοδικών παραθύρων ανθροιστεί, μένει ακόμα χώρος για τις πραγματικά χαστικές τροχιές. Όμως, μια περιοδική τροχιά μπορεί να βρεθεί αυθαίρετα κοντά σε οποιαδήποτε τροχιά. Σημειώνουμε ότι, σε υπολογιστικά πειράματα, η στρογγύλευση των υπολογισμών δρα ως μια πηγή θορύβου που τελικά θέτει ένα όριο στο πόσο μακριές περιοδικές τροχιές μπορούν να παρατηρηθούν. Από την άλλη πλευρά, ένας ψηφιακός υπολογιστής μπορεί να αναπαραστήσει μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων και, κατά συνέπεια, τα σημεία της τροχιάς θα πρέπει αργά ή γρήγορα να αρχίσουν να επαναλαμβάνονται.

6.4 Κυτταρώδη αυτόματα

Στην ενότητα 6.3 ασχοληθήκαμε με απεικονίσεις που μπορούν να θεωρηθούν ως δυναμικά συστήματα με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας (διάσταση της μεταβλητής της απεικόνισης), διακριτό χρόνο, αλλά συνεχείς μεταβλητές χώρου φάσης. Ακόμα απλούστερα συστήματα μπορούν να σχηματιστούν κάνοντας και το χώρο φάσης διακριτό. Τέτοια συστήματα ονομάζονται **κυτταρώδη αυτόματα (cellular automata)**. Τα κυτταρώδη αυτόματα έχουν πέντε χαρακτηριστικά:

- ορίζονται σε δικτυώματα διακριτών θέσεων,
- η χρονική εξέλιξη λαμβάνει χώρα σε διακριτά βήματα,
- κάθε θέση έχει ένα πεπερασμένο αριθμό δυνατών καταστάσεων,
- κάθε θέση εξελίσσεται με το χρόνο σύμφωνα με ένα νομοτελειακό κανόνα
- ο κανόνας για κάθε θέση εξαρτάται μόνο από κάποια πεπερασμένη περιοχή στο δικτύωμα και ένα πεπερασμένο αριθμό από προηγούμενα χρονικά βήματα.

Παρά την απλότητά τους, τα κυτταρώδη αυτόματα επιδεικνύουν μια εντυπωσιακή ικανότητα να αναπαράγουν περίπλοκες δυναμικές. Εφαρμογές των κυτταρωδών αυτομάτων μπορούν να βρεθούν στη φυσική συστημάτων που δεν βρίσκονται σε ισορροπία, στην υδροδυναμική, στη δυναμική των πληθυσμών, σε χημικές αντιδράσεις, στην επιδημιολογία, σε παράλληλους υπολογισμούς, στη γεωφυσική (σεισμούς) κτλ. Εξαιτίας της διακριτής φύσης τους, τα κυτταρώδη αυτόματα είναι ιδιαίτερα κατάλληλα για προσομοίωση σε ψηφιακό υπολογιστή. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τα απλούστερα, μη τετριμμένα κυτταρώδη αυτόματα.

Η λογιστική απεικόνιση αναφέρεται σε χώρο φάσης με διάσταση ένα. Σε αντάλλαγμα για τη διακριτοποίηση του χώρου φάσης, θα αυξήσουμε τη διάστασή του σε κάποιο αριθμό, τυπικά από 50 ως μερικές εκατοντάδες, έτσι ώστε να ανακαλύψουμε πιθανές κανονικότητες του συστήματος.

Ένα απλό κυτταρώδες αυτόματο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα δικτύωμα όπου οι θέσεις μπορεί να έχουν έναν πεπερασμένο αριθμό k δυνατών τιμών. Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε τις θέσεις του αυτόματου ως διατεταγμένες σε ένα μονοδιάστατο δίκτυωμα. Επίσης, όλες οι θέσεις θα είναι ταυτόσημες και θα υπάρχει εξάρτηση μόνο από το προηγούμενο χρονικό βήμα. Προκειμένου να απλοποιήσουμε και άλλο το αυτόματο, υποθέτουμε μόνο αλληλεπιδράσεις “πλησιέστερου γείτονα (**nearest neighbor**)”. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή σε μια θέση εξαρτάται μόνο από την τιμή της ίδιας της θέσης και των δύο αμέσως διπλανών θέσεων στο προηγούμενο χρονικό βήμα. Επομένως, υπάρχουν k^3 δυνατές αρχικές “τοπικές” καταστάσεις σε οποιαδήποτε δεδομένη θέση. Εφόσον υπάρχουν k δυνατά αποτελέσματα, ο συνολικός αριθμός δυνατών κανόνων είναι k^{k^3} . Στην απλούστερη περίπτωση όπου $k = 2$, υπάρχουν 256 δυνατοί κανόνες. Ο αριθμός αυτός αυξάνει εξαιρετικά γρήγορα με αυξανόμενο k . Έτσι, για $k = 3$ υπάρχουν περίπου $7,6 \times 10^{12}$ δυνατοί κανόνες.

Σε αυτόματα με εξάρτηση μόνο από την κατάσταση του προηγούμενου χρονικού βήματος, μπορούμε να ορίσουμε μια ακτίνα r τέτοια ώστε να υπάρχει εξάρτηση από τους $2r$ πλησιέστερους γείτονες πέρα

από την εξάρτηση από την κατάσταση της ίδιας της θέσης.

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε μόνο αυτόματα με $r = 1$ και $k = 2$. Κάθε τοπική κατάσταση μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα δυαδικό αριθμό τριών ψηφίων και από το αποτέλεσμα της ενημέρωσης από ένα δυαδικό αριθμό α_n ενός ψηφίου, όπου ο δείκτης $n = 1, 2, \dots, 8$ διατρέχει το σύνολο των οκτώ δυνατών τοπικών καταστάσεων. Συνδέοντας αυτούς τους αριθμούς σε ένα δυαδικό αριθμό οκτώ ψηφίων $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$ καταλήγουμε σε ένα μοναδικό χαρακτηρισμό των κυτταρωδών αυτομάτων. Ο επόμενος πίνακας δίνει τη σχέση ανάμεσα στην τοπική κατάσταση και στον αριθμό α_n :

Κατάσταση	111	110	101	100	011	010	001	000
Νέα τιμή	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8

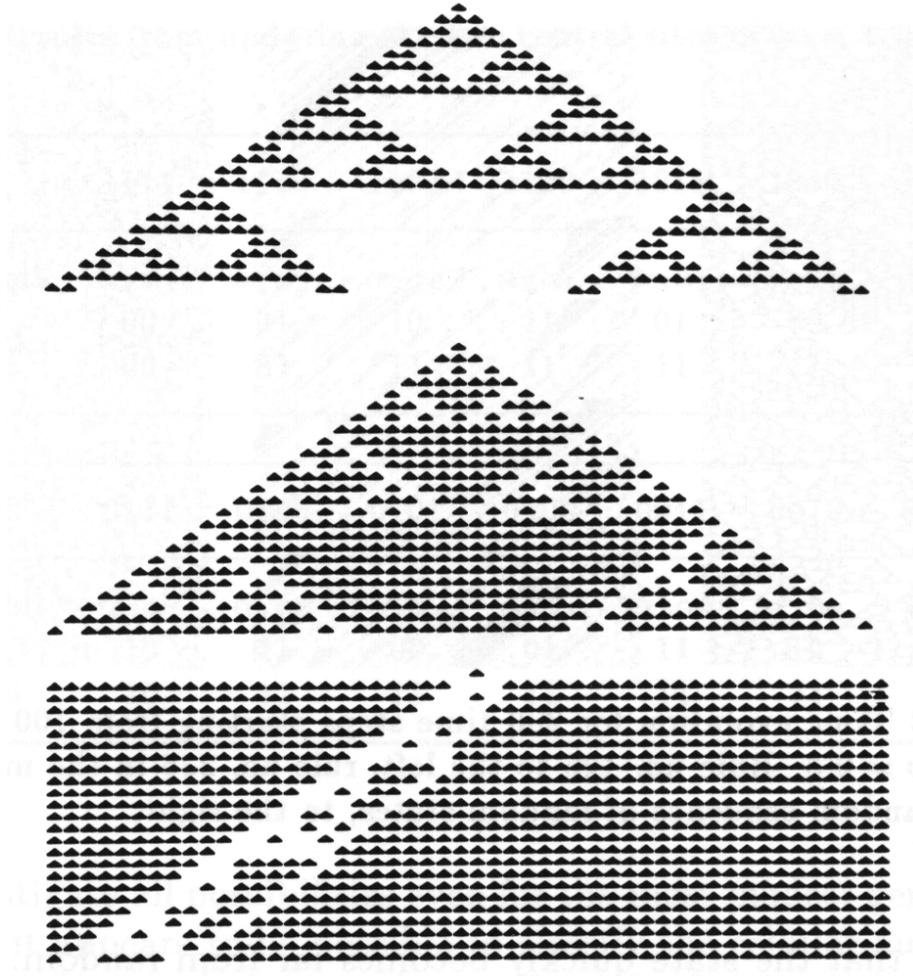
Ας δούμε τι συμβαίνει στη “μηδενική” κατάσταση όπου όλες οι θέσεις έχουν την τιμή μηδέν. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, το αποτέλεσμα θα είναι μια κατάσταση όπου όλες οι θέσεις έχουν την τιμή α_8 . Αν $\alpha_8 = 0$, η μηδενική κατάσταση δεν αλλάζει με το χρόνο. Αν $\alpha_8 = 1$, όλες οι θέσεις στο επόμενο χρονικό βήμα θα έχουν την τιμή α_1 . Αν $\alpha_1 = 0$, το αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο με την αρχική κατάσταση και η τροχιά είναι μια ταλάντωση με περίοδο δύο επαναλήψεων. Αν $\alpha_1 = 1$, όλα τα επόμενα χρονικά βήματα θα έχουν καταστάσεις όπου όλες οι θέσεις έχουν τιμή 1. Μπορεί να επιθυμούμε το αυτόματο να διαθέτει την ιδιότητα η μηδενική κατάσταση να παραμένει αναλλοίωτη στο χρόνο. Αυτό αναγκαστικά σημαίνει ότι $\alpha_8 = 0$. Αν θεωρήσουμε το σύστημα ως ομογενές και ισοτροπικό, πρέπει να κάνουμε τους κανόνες συμμετρικούς στην ανάκλαση. Αυτό σημαίνει ότι οι τοπικές καταστάσεις 110 και 011 πρέπει να παράγουν το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή $\alpha_5 = \alpha_2$. Για να δίνει η τοπική κατάσταση 100 το ίδιο αποτέλεσμα με την τοπική κατάσταση 001 πρέπει $\alpha_7 = \alpha_4$. Αυτοί οι περιορισμοί οδηγούν στα “επιθυμητά” σύνολα κανόνων $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8$. Επομένως, χρειάζονται πέντε ανεξάρτητοι δυαδικοί αριθμοί για να χαρακτηριστεί κάθε ένα από τα αυτόματά μας και, κατά συνέπεια, μένουν μόνο 32 αυτόματα για διερεύνηση.

Ξεκινάμε θεωρώντας την κατάσταση όπου η τιμή μόνο μιας θέσης διαφέρει από το μηδέν. Αφού $a_8 = 0$, μόνο η ίδια η θέση και οι άμεσοι γείτονές της μπορούν να αλλαχτούν κατά τη διάρκεια του πρώτου βήματος. Καταγράφοντας μόνο θέσεις που μπορεί να έχουν αλλάξει, το αποτέλεσμα θα είναι $a_4 a_6 a_4$. Προφανώς, όλα τα επόμενα αποτελέσματα θα είναι $0 a_6 0$ αν $a_4 = 0$. Αν $a_4 = 1$, η πρώτη από τα αριστερά (δεξιά) μη μηδενική θέση θα προχωρήσει ένα βήμα προς τα αριστερά (δεξιά) σε κάθε χρονικό βήμα.

Ο κανόνας με αριθμό 0 είναι τετριμμένος αφού μεταφέρει κάθε κατάσταση στη μηδενική κατάσταση μετά από ένα χρονικό βήμα. Ο κανόνας με αριθμό 204, ο οποίος έχει τη δυαδική αναπαράσταση 110001100, δρα ως μετασχηματισμός ταυτότητας αφού μεταφέρει κάθε κατάσταση στον εαυτό της.

Όταν οι παραπάνω προσομοιώσεις, γίνονται σε υπολογιστή του πραγματικού κόσμου, κανείς μπορεί να διαθέτει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό θέσεων και, κατά συνέπεια, πρέπει να οριστούν κάποιες συνοριακές συνθήκες. Υπάρχουν δύο κοινές συνοριακές συνθήκες. Η πρώτη είναι να υποθεθεί η **μηδενική συνοριακή συνθήκη**, δηλαδή ότι κάθε τι εκτός του συνόρου είναι μηδέν. Η άλλη είναι να υπάρχουν περιοδικές συνοριακές συνθήκες, οπότε η γραμμή των θέσεων είναι στην ουσία ένας κύκλος και η θέση με αριθμό ένα είναι ένας άμεσος γείτονας της θέσης με αριθμό n σε ένα αυτόματο n θέσεων. Υποθέτοντας ότι το αυτόματο έχει πολύ περισσότερες θέσεις από τον αριθμό των θέσεων στην τοπική περιοχή (στην περίπτωση μας, τριών), η επιλογή των συνοριακών συνθηκών παίζει ένα μάλλον δευτερεύοντα ρόλο.

Η αρχική κατάσταση του πρώτου πειράματος ήταν πολύ εξειδικευμένη. Θα θεωρήσουμε τώρα εκκίνηση από “τυχαίες” καταστάσεις. Αυτές μπορούν να παραχθούν δίνοντας μια πιθανότητα p για το γεγονός η τιμή μιας θέσης να είναι ένα και, στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας μια γεννήτρια τυχαίων αριθμών για την παραγωγή τυχαίων καταστάσεων. Παραδείγματα προσομοιώσεων που ξεκινούν από τυχαίες καταστάσεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.2.

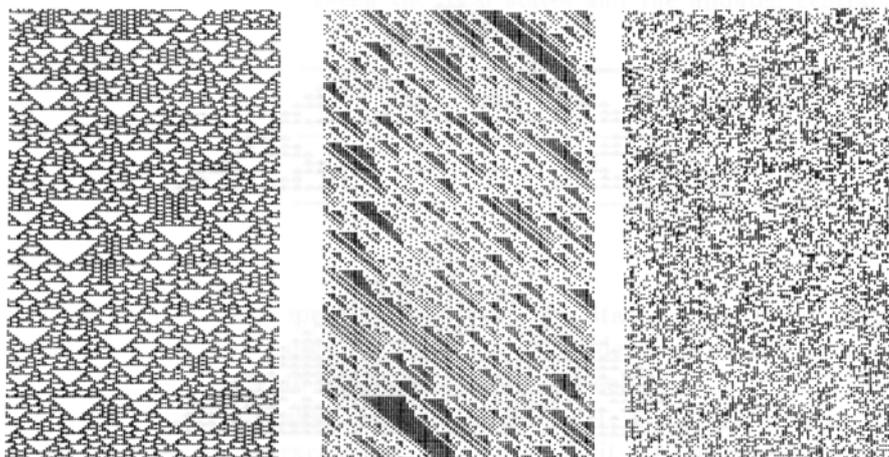


Σχήμα 6.2: Χρονική εξέλιξη από μια κατάσταση που περιλαμβάνει μόνο μία μη μηδενική θέση. Ο χρόνος ξεκινάει από την κορυφή κάθε σχηματισμού, ενώ τα μικρά τριγωνικά σχήματα υποδεικνύουν μη μηδενικές θέσεις. Οι σχηματισμοί προκύπτουν με εφαρμογή των κανόνων 126 (άνω σχηματισμός), 182 (μεσαίος σχηματισμός) και 225 (κάτω σχηματισμός).

Είναι φανερό ότι η κατάσταση διαφοροποιείται γρήγορα από το να είναι τυχαία. συγκεκριμένα, το αυτόματο οργανώνει την κατάσταση σε δομές που έχουν διαφορετικές κλίμακες μήκους. Η ικανότητα να **αυτο-οργανώνονται (self-organize)** είναι μια από τις πιο σημαντικές ιδιότητες των κυτταρωδών αυτομάτων. Το φαινόμενο κατανοείται καλύτερα αν θεωρήσουμε το αποτέλεσμα μιας επανάληψης στις 16 δυνατές τοπικές καταστάσεις που περιέχουν 4 πλησιέστερους γείτονες. Κάθε τέτοια κατάσταση προβλέπει μοναδικά τις επόμενες ενημερωμένες τιμές των δύο μεσαίων θέσεων. Τα γενικά αποτελέσματα και τα αποτελέσματα σε μερικές ενδεικτικές περιπτώσεις φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Για απλούστευση, υποθέτουμε $p = 0,5$. Τότε όλες οι τοπικές καταστάσεις του παρακάτω πίνακα έχουν την ίδια πιθανότητα. Αν μετρήσουμε τον αριθμό των μηδενικών και μονάδων σε όλες τις καταστάσεις, θα τους βρούμε ίσους. Σε τέσσερις από τις δεκαέξι καταστάσεις, οι δύο κεντρικές θέσεις έχουν την τιμή ένα. Για τον κανόνα με αριθμό 90, αυτό το πηλίκο είναι το ίδιο και μετά την ενημέρωση, ενώ για τον κανόνα με αριθμό 126, δέκα από τις δεκαέξι καταστάσεις έχουν τιμή ένα για τις δύο κεντρικές θέσεις. Στην τελευταία περίπτωση, η πιθανότητα μακριών ακολουθιών από μονάδες είναι πολύ μεγαλύτερη από ό,τι σε μια τυχαία αρχική κατάσταση. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα με αριθμό 126, βλέπουμε ότι ακολουθίες της ίδιας τιμής με μήκος μεγαλύτερο από τρεις θέσεις παράγουν στο επόμενο βήμα μια συντομότερη ακολουθία μηδενικών. Αυτό αντιστοιχεί στις τυπικές τριγωνικές δομές του Σχήματος 6.3.

Τοπική Κατάσταση	1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000
Γενικό αποτέλεσμα	$\alpha_1\alpha_1$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_2\alpha_4$	$\alpha_3\alpha_2$	$\alpha_3\alpha_6$	$\alpha_4\alpha_7$	α_40
Κανόνας με αριθμό 90	00	01	10	11	01	00	11	10
Κανόνας με αριθμό 126	00	01	11	11	11	11	11	10



Σχήμα 6.3: Διακόσια (200) βήματα χρονικής εξέλιξης από τυχαίες καταστάσεις των εκατό (100) μεταβλητών με $p = 0,5$. Στον αριστερό και το μεσαίο σχηματισμό εφαρμόζονται οι κανόνες 126 και 225, αντίστοιχα, ενώ στο δεξιό σχηματισμό δεν εφαρμόζεται κανείς κανόνας και εμφανίζεται μια τυχαία ακολουθία τυχαίων καταστάσεων.

Τοπική Κατάσταση	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000
Γενικό αποτέλεσμα	$a_5 a_1$	$a_5 a_2$	$a_6 a_3$	$a_6 a_4$	$a_7 a_5$	$a_7 a_6$	$0 a_7$	00
Κανόνας με αριθμό 90	10	11	00	01	11	10	01	00
Κανόνας με αριθμό 126	10	11	11	11	11	11	01	00

Περισσότερο περίπλοκα αυτόματα από αυτά που μελετήσαμε εδώ μπορούν να κατασκευαστούν με πολλούς τρόπους, για παράδειγμα, με αύξηση της διάστασης του δικτυώματος, με αύξηση του μεγέθους της περιοχής των γειτόνων, με αύξηση του αριθμού των δυνατών τιμών σε μια θέση, θεωρώντας περισσότερους από έναν τύπους θέσης,

κτλ. Ο αριθμός των δυνατών κανόνων γίνεται τόσο μεγάλος που είναι εντελώς αδύνατο να εξεταστούν όλες οι δυνατότητες ακόμα και για την πιο απλή γενίκευση. Ευτυχώς, είναι δυνατό τα κυτταρώδη αυτόματα να ταξινομηθούν σε ένα σχετικά μικρό αριθμό κλάσεων. Σε πρακτικές περιπτώσεις, ο αριθμός των κανόνων συχνά περιορίζεται κατά πολύ από το ίδιο το πρόβλημα.

Κεφάλαιο 7

Μορφολογικά Σήματα και Συστήματα

7.1 Γενικά

Ο όρος **μορφολογία (morphology)** αναφέρεται στη μελέτη της μορφής και της δομής και με την έννοια αυτή χρησιμοποιείται στη βιολογία, τη γεωγραφία και τη γλωσσολογία. Η εφαρμογή της μορφολογικής ανάλυσης στην επεξεργασία (δίτιμης, δηλαδή ασπρόμαυρης) εικόνας προτάθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1960 από τον Georges Matheron και βασίστηκε στην ανάλυση της γεωμετρικής δομής που είναι έμφυτη σε μια εικόνα. Η εργασία του Matheron, στην πρώτη μορφή της, δημοσιεύτηκε το 1975 ως μονογραφία με τίτλο **Τυχαία Σύνολα και Ολοκληρωτική Γεωμετρία (Random Sets and Integral Geometry)**. Η αρχική προσέγγισή του ήταν, βασικά, στατιστικής φύσεως και αποτελούσε σύνθεση της γεωμετρικής πιθανότητας που χρησιμοποιείται στη στερεολογία, και μιας άλγεβρας Minkowski που είχε προτείνει ο Hans Hadwiger για την ανάλυση του σχήματος. Μετά το 1975, όμως, η έρευνα και η εφαρμογή της μορφολογικής ανάλυσης επικεντρώθηκε στη χρήση των θεμελιωδών μορφολογικών τελεστών χωρίς κάποια στατιστική ερμηνεία τους.

Σε γενικές γραμμές, στη μορφολογική ανάλυση μελετάμε τον τρόπο με τον οποίο ένα προκαθορισμένο γεωμετρικό σχήμα (το **δομικό στοιχείο (structuring element)**) “ταιριάζει” μέσα σε μια **δίτιμη (binary)** εικόνα. Η μελέτη αυτή χρησιμοποιεί μορφολογικές λειτουργίες όπως **ανίχνευση ακμών (edge detection)**, **κατάτμηση (segmentation)** και **ενίσχυση (enhancement)** εικόνων. Η κατασκευή **μορφολογικών φίλτρων (morphological filters)** με τη σύνθεση διαφόρων μορφολογικών λειτουργιών προσφέρει πλεονεκτήματα έναντι των γραμμικών φίλτρων: (α) σε αντίθεση με τα γραμμικά φίλτρα, τα μορφολογικά φίλτρα τείνουν να αφήσουν αραμόρφωτη τη γεωμετρική δομή μιας εικόνας, (β) η μορφολογική ανάλυση μπορεί να δημιουργήσει χρήσιμα (μορφολογικά) χαρακτηριστικά και (γ) αυστηρά θεωρήματα αναπαράστασης επιτρέπουν την έκφραση δημοφιλών κλάσεων γραμμικών και μη γραμμικών φίλτρων ως συνθέσεων των θεμελιωδών μορφολογικών λειτουργιών. Τελικά, η μορφολογική επεξεργασία επιτρέπει τη συστηματική αλλοίωση του γεωμετρικού περιεχομένου μιας εικόνας, ενώ ταυτόχρονα διατηρεί σημαντικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αναλλοίωτα.

Αν και στην προηγούμενη παράγραφο γίνεται αναφορά σε εικόνες, η μορφολογική ανάλυση μπορεί κάλλιστα να εφαρμοστεί τόσο σε μονοδιάστατα σήματα, όσο και σε σήματα οποιουδήποτε αριθμού διαστάσεων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου, αυτό επιτυγχάνεται με αναπαράσταση των σημάτων ως σημειοσυνόλων σε πολυδιάστατους διανυσματικούς χώρους χρησιμοποιώντας είτε την προσέγγιση των εγκάρσιων τομών είτε την προσέγγιση της πλανητικής σκιάς. Σημειώνουμε, ακόμη, ότι οι αλγόριθμοι μορφολογικής ανάλυσης και επεξεργασίας επιδέχονται υλοποιήσεις σε μορφή **πίνακα αναζήτησης (look-up table)** σε σχετικά απλό υλικό για ταχεία **σωληνωτή επεξεργασία (pipeline processing)**.

7.2 Βασικές μορφολογικές πράξεις

Στη μορφολογική ανάλυση, τόσο μια δίτιμη (ασπρόμαυρη) εικόνα B όσο και το δομικό στοιχείο S θεωρούνται ως σύνολα σημείων (σημειοσύνολα) ενός χώρου. Μια μορφολογική πράξη είναι μια διαδικασία η οποία τελικά παράγει ένα νέο σημειοσύνολο και ορίζεται μέσω μιας συνολοθεωρητικής εξίσωσης. Οι βασικές μορφολογικές πράξεις είναι η **διάβρωση (erosion)** και η **διαστολή (dilation)**, όπως ορίζονται στη συνέχεια. Προηγουμένως, όμως, χρειάζονται οι ορισμοί των πράξεων της **μετατόπισης (translation)** σημειοσυνόλου κατά ένα σημείο στο χώρο, της **πρόσθεσης κατά Minkowski** και της **αφαίρεσης κατά Minkowski**.

- **Μετατόπιση:** Δεδομένου ενός υποσυνόλου A του χώρου \mathbb{R}^n , η μετατόπιση $A + \underline{x}$ του A κατά το σημείο \underline{x} του \mathbb{R}^n ορίζεται ως

$$A + \underline{x} = \{ \underline{a} + \underline{x} : \underline{a} \in A \}$$

Ουσιαστικά, η μετατόπιση υποδηλώνει ότι το σημειοσύνολο A και το σχήμα που ορίζει αυτό μετατοπίζονται πάνω στο χώρο \mathbb{R}^n κατά ένα διάνυσμα \underline{x} .

- **Πρόσθεση κατά Minkowski:** Δεδομένων δύο σημειοσυνόλων A και B στο χώρο \mathbb{R}^n , ορίζουμε την κατά Minkowski πρόσθεση $A \oplus B$ ως

$$A \oplus B = \bigcup_{\underline{b} \in B} A + \underline{b}.$$

Η πρόσθεση κατά Minkowski δύο σημειοσυνόλων A και B συντελείται, επομένως, αν πρώτα υπολογιστεί η μετατόπιση του A κατά κάθε στοιχείο του B και στην συνέχεια υπολογιστεί η **ένωση (union)** όλων των μετατοπίσεων.

- **Αφαίρεση κατά Minkowski:** Δεδομένων δύο σημειοσυνόλων A και B στο χώρο \mathbb{R}^n , ορίζουμε την κατά Minkowski αφαίρεση $A \ominus B$ ως:

$$A \square B = \bigcap_{\underline{b} \in B} A + \underline{b}.$$

Η αφαίρεση κατά Minkowski δύο σημειοσυνόλων A και B συντελείται, επομένως, αν πρώτα υπολογιστεί η μετατόπιση του A κατά κάθε στοιχείο του B και στη συνέχεια υπολογιστεί η **τομή (section)** των μετατοπίσεων.

Με βάση τα προηγούμενα, μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη διάβρωση και τη διαστολή σημειοσυνόλων από άλλα σημειοσύνολα.

- **Διάβρωση:** Η διάβρωση $A \otimes B$ του σημειοσυνόλου A από το σημειοσύνολο B ορίζεται ως:

$$A \otimes B = A \square (-B),$$

όπου $-B = \{-\underline{b} : \underline{b} \in B\}$. Όταν το σημειοσύνολο A διαβρώνεται από το σημειοσύνολο B , τότε το δεύτερο ονομάζεται **δομικό στοιχείο**. Η διάβρωση ενός σημειοσυνόλου από ένα δομικό στοιχείο έχει ως αποτέλεσμα τη συρρίκνωση του σημειοσυνόλου με τρόπο που προσδιορίζεται από το δομικό στοιχείο.

- **Διαστολή:** Η διαστολή του σημειοσυνόλου A από το σημειοσύνολο B ορίζεται απλά ως η πρόσθεση κατά Minkowski $A \oplus B$. Το σημειοσύνολο B ονομάζεται και πάλι **δομικό στοιχείο** και το αποτέλεσμα της διαστολής είναι επέκταση του σημειοσυνόλου A .

Άλλες μορφολογικές πράξεις που συναντώνται στη μορφολογική ανάλυση περιλαμβάνουν τις επόμενες:

- **Άνοιγμα (opening):** Το άνοιγμα ενός σημειοσυνόλου A από ένα δομικό στοιχείο B ορίζεται ως η διάβρωση του A από το B ακολουθούμενη από διαστολή του αποτελέσματος από το B . Δηλαδή:

$$A \circ B = (A \otimes B) \oplus B.$$

Το αποτέλεσμα του ανοίγματος ενός σημειοσυνόλου από ένα δομικό στοιχείο είναι να απαλειφθούν μικρά και λεπτά αντικείμενα, να διασπαστούν αντικείμενα σε λεπτά σημεία τους και, γενικά, να εξομαλυνθούν τα σύνορα μεγαλύτερων αντικειμένων χωρίς να αλλάξει σημαντικά ο όγκος τους.

- **Κλείσιμο (closing)**: Το κλείσιμο ενός σημειοσυνόλου A από ένα δομικό στοιχείο B ορίζεται ως η διαστολή του A από το B ακολουθούμενη από διάβρωση του αποτελέσματος από το B . Δηλαδή:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \otimes B.$$

Το αποτέλεσμα του κλεισίματος ενός σημειοσυνόλου από ένα δομικό στοιχείο είναι να “γεμίσουν” μικρές και λεπτές τρύπες σε αντικείμενα, να συνδεθούν παραπλήσια αντικείμενα και, γενικά, να εξομαλυνθούν τα σύνορα μικρότερων αντικειμένων.

Πέραν από τις προηγούμενες πράξεις, στη μορφολογική ανάλυση και επεξεργασία συναντάμε και άλλες πράξεις, όπως **συρρίκνωση (shrinking)**, **λέπτυνση (thinning)**, **σκελετοποίηση (skeletonization)**, **κλάδεμα (pruning)** και **πάχυνση (thickening)**. Και αυτές οι μορφολογικές πράξεις επιτυγχάνονται με συνδυασμούς των βασικών μορφολογικών πράξεων της διάβρωσης και της διαστολής.

7.3 Αναπαράσταση σημάτων με σημειοσύνολα

Μια δίτιμη (ασπρόμαυρη) εικόνα είναι ένα πολυδιάστατο ψηφιακό σήμα $f(\underline{x})$ με μόνες επιτρεπτές τιμές 1 ή 0. Μια δίτιμη εικόνα μπορεί να αναπαρασταθεί άμεσα ως σημειοσύνολο του χώρου \mathbb{R}^n . Πιο συγκεκριμένα, το **προσκήνιο (foreground)** της εικόνας ορίζεται ως το σύνολο S των σημείων \underline{x} του χώρου \mathbb{R}^n για τα οποία $f(\underline{x}) = 1$, δηλαδή

$$S = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = 1\}.$$

Αντίστοιχα, το συμπλήρωμα S^c του σημειοσυνόλου S αποτελείται από το σύνολο των σημείων \underline{x} του χώρου \mathbb{R}^n για τα οποία $f(\underline{x}) = 0$ και ονομάζεται **παρασκήνιο (background)** της εικόνας:

$$S^c = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) = 0\}.$$

Για την αναπαράσταση πολυδιάστατων αναλογικών σημάτων με σημειοσύνολα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικές, αλλά μαθηματικά ισοδύναμες, προσεγγίσεις: η προσέγγιση των **εγκάρσιων τομών (cross sections)** και η προσέγγιση της **πλανητικής σκιάς (umbra)**. Όπως γίνεται φανερό στη συνέχεια, η χρήση εγκάρσιων τομών αναπαριστάνει ένα n -διάστατο αναλογικό σήμα με μια (άπειρη) συλλογή n -διάστατων συνόλων, των εγκάρσιων τομών του σήματος. Αντίθετα η προσέγγιση της πλανητικής σκιάς αναπαριστάνει ένα n -διάστατο αναλογικό σήμα με ένα μόνο $(n+1)$ -διάστατο σύνολο, την πλανητική σκιά του σήματος.

Η εγκάρσια τομή $T_\xi(f)$ του πολυδιάστατου αναλογικού σήματος $f(\underline{x})$ σε επίπεδο ξ ορίζεται ως:

$$T_\xi(f) = \{\underline{x} : f(\underline{x}) \geq \xi\}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Με άλλα λόγια η εγκάρσια τομή $T_\xi(f)$ αποτελείται από το σύνολο όλων των σημείων \underline{x} του χώρου \mathbb{R}^n στα οποία η τιμή του σήματος ξεπερνάει το **κατώφλι (threshold)** ξ . Ο Serra δείχνει ότι, αν το σήμα είναι ημισυνεχές εκ των άνω, μπορεί να ανακατασκευασθεί μονοσήμαντα από τη συλλογή $\{T_\xi(f), \xi \in \mathbb{R}\}$ των εγκάρσιων τομών του ως:

$$f(\underline{x}) = \sup \{\xi \in \mathbb{R} : \underline{x} \in T_\xi(f)\}.$$

Η πλανητική σκιά $U(f)$ του πολυδιάστατου αναλογικού σήματος $f(\underline{x})$ ορίζεται ως:

$$U(f) = \{(\underline{x}, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(\underline{x}) \geq \xi\}.$$

Δηλαδή, η πλανητική σκιά $U(f)$ αποτελείται από το σύνολο των σημείων τα οποία βρίσκονται κάτω από το γράφημα του σήματος

$f(\underline{x})$ μέχρι το $-\infty$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα ημισυνεχές εκ των άνω σήμα $f(\underline{x})$ ανακατασκευάζεται μονοσήμαντα από την πλανητική σκιά του ως:

$$f(\underline{x}) = \sup \{ \xi \in \mathbb{R} : (\underline{x}, \xi) \in U(f) \}.$$

Από τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι τόσο οι εγκάρσιες τομές όσο και η πλανητική σκιά αναπαριστούν ένα n -διάστατο αναλογικό σήμα ως ένα σημειosύνολο του χώρου $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Επειδή ένα σημειosύνολο του χώρου \mathbb{R}^{n+1} είναι, όπως είδαμε, ισοδύναμο με μια $(n+1)$ -διάστατη δίτιμη (ασπρόμαυρη) εικόνα, συμπεραίνουμε ότι το “κόστος” της δίτιμης αναπαράστασης ενός αναλογικού σήματος είναι η αύξηση κατά μια των διαστάσεων του.

Για τη μορφολογική επεξεργασία και ανάλυση πολυδιάστατων αναλογικών σημάτων, είναι κατάλληλες οι προσεγγίσεις των εγκάρσιων τομών και της πλανητικής σκιάς. Πιο συγκεκριμένα, τα πολυδιάστατα σήματα αναπαριστώνται με σημειosύνολα, είτε με τη χρήση εγκάρσιων τομών είτε με τη χρήση της πλανητικής σκιάς, και οι μεθοδολογίες της μορφολογικής επεξεργασίας και ανάλυσης εφαρμόζονται στα σημειosύνολα που προκύπτουν. Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τη δυνατότητα αναπαράστασης γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων ως μορφολογικών φίλτρων¹. Η θεωρία αυτή γενικεύεται για αναπαράσταση ευρέων κλάσεων μη γραμμικών συστημάτων², αλλά η γενίκευση δεν θα παρουσιαστεί εδώ.

¹P. Maragos and R. W. Schafer, “Morphological Filters—Part I: Their Set-Theoretic Analysis and Relation to Linear, Shift-Invariant Filters”, IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc., vol. ASSP-35, pp.1153–1169, 1987.

²P. Maragos and R. W. Schafer, “Morphological Filters—Part II: Their Relation to Median, Order-Statistic, and Stack Filters”, IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc., vol. ASSP-35, pp. 1170–1184, 1987.

7.4 Αναπαράσταση συστημάτων με μορφολογικά φίλτρα

Οι βασικές μορφολογικές πράξεις της διάβρωσης και της διαστολής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων, αλλά και ευρέων κλάσεων μη γραμμικών συστημάτων. Ως εισαγωγή σε αυτή τη δυνατότητα των μορφολογικών φίλτρων, ας δούμε την αναπαράσταση γραμμικών, χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων.

Θεωρούμε ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με κρουστική απόκριση $h(\underline{x})$, το οποίο δέχεται διεγέρσεις από μια κλάση ημισυνεχών εκ των άνω σημάτων εισόδου. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ισούται με τη μονάδα για μηδενική συχνότητα, δηλαδή το σύστημα αφήνει αναλλοίωτα σταθερά σήματα εισόδου. Ορίζουμε τον **πυρήνα (kernel)** του συστήματος ως ένα σύνολο K σημάτων εισόδου $\rho(\underline{x})$:

$$K = \{ \rho(\underline{x}) : (h * \rho)(\underline{0}) \geq 0 \},$$

όπου $(h * \rho)(\underline{x})$ είναι η τιμή της συνέλιξης των συναρτήσεων h και ρ στο \underline{x} . Οι Maragos και Schafer δείχνουν ότι ο πυρήνας K χαρακτηρίζει και ανακατασκευάζει μονοσήμαντα το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα. Πιο συγκεκριμένα, οι Maragos και Schafer παρουσιάζουν το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1 Έστω ένα γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με μη αρνητική κρουστική απόκριση $h(\underline{x}) \geq 0, \forall \underline{x}$ και διεγέρσεις από μια κλάση ημισυνεχών εκ των άνω σημάτων εισόδου. Έστω επίσης $H(\underline{0}) = 1$, όπου

$$H(\underline{s}) = \int h(\underline{x}) e^{i\mathbf{s}^T \cdot \underline{x}} d\underline{x}$$

είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Η απόκριση $(h * u)(\underline{x})$ του συστήματος σε διέγερση από ημισυνεχές εκ των άνω σήμα εισόδου $u(\underline{x})$ δίνεται από τη σχέση

$$(h * u)(\underline{x}) = \sup_{\rho \in K} \{ \inf_{z \in \mathbb{R}^n} [u(\underline{z}) - \rho(\underline{z} - \underline{x})] \}$$

όπου K είναι ο πυρήνας του συστήματος, όπως ορίστηκε προηγουμένως.

Παρατήρηση: Μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι η τομή των πλανητικών σκιών δύο σημάτων αντιστοιχεί στην πλανητική σκιά του ελαχίστου (ακριβέστερα, του κάτω ορίου (*infinimum*)) των δύο συναρτήσεων. Με βάση την παρατήρηση αυτή και τον ορισμό της μορφολογικής διάβρωσης, συμπεραίνουμε από το παραπάνω θεώρημα ότι η απόκριση του συστήματος υπολογίζεται ως το μέγιστο (ακριβέστερα, το άνω όριο (*supremum*)) των διαβρώσεων του σήματος εισόδου με όλες τις συναρτήσεις του πυρήνα του συστήματος.

Κεφάλαιο 8

Συστήματα Επικοινωνίας

8.1 Εισαγωγή

Ένα από τα κυριότερα συστήματα στα οποία βλέπουμε άμεση χρήση των αρχών και των θεωριών των σημάτων και της διέλευσής τους μέσα από ένα σύστημα είναι τα συστήματα επικοινωνίας τα οποία είναι γνωστά και σαν τηλεπικοινωνιακά συστήματα. Η ανάγκη μεταφοράς πληροφορίας από μια πηγή σε ένα προορισμό αποτελεί τον στόχο ενός συστήματος επικοινωνίας.

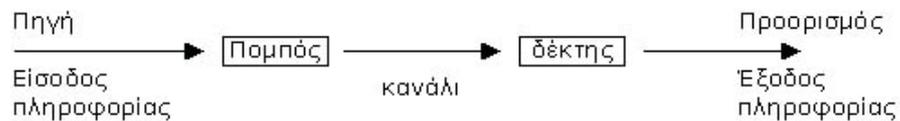
Ο στόχος ενός σχεδιαστή συστημάτων επικοινωνίας είναι ο σχεδιασμός συστημάτων που παρέχουν υψηλής ποιότητας υπηρεσίες σε όσο το δυνατόν περισσότερους χρήστες με το μικρότερο κόστος και την ελάχιστη χρήση πόρων (συνήθως εύρους ζώνης και ισχύος).

Χαρακτηριστικά παραδείγματα συστημάτων επικοινωνίας είναι το τηλεφωνικό δίκτυο, οι εκπομπές του ραδιοφώνου, η τηλεόραση και το Διαδίκτυο (Internet). Παραδείγματα επικοινωνίας αποτελούν επίσης η κινητή τηλεφωνία, τα συστήματα ενδοεπικοινωνίας, τα συστήματα προσδιορισμού θέσης (όπως το GPS: Global Positioning System) και οι δορυφόροι. Συστήματα επικοινωνίας βρίσκουμε επίσης μέσα σε ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή για την ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των διαφόρων επιμέρους τμημάτων του, π.χ. επικοινωνία μεταξύ της κεντρικής αριθμητικής μονάδας (CPU) και της κύριας μνήμης. Η εγ-

γραφή ήχου και εικόνας και φυσικά η μετάδοσή τους μέσω διαφόρων συστημάτων αποτελεί ένα άλλο σύστημα επικοινωνίας καθώς μεταφέρεται πληροφορία από ένα δίσκο ήχου ή ένα βίντεο σε ένα ακροατή ή θεατή.

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα επικοινωνιακά συστήματα καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος εφαρμογών που συναντάμε στη ζωή μας και καλύπτουν πολλές από τις βασικές ανάγκες μας. Η ποικιλία αυτή των εφαρμογών και οι διαφορετικές απαιτήσεις κάθε μιας έχουν οδηγήσει σε μια πληθώρα συστημάτων επικοινωνίας τα οποία πιθανόν να υπερτερούν ως προς ένα χαρακτηριστικό -π.χ. τη χρήση εύρους ζώνης - ενώ μπορεί να υπολείπονται σε κάποια άλλα χαρακτηριστικά - π.χ. απαιτούν περίπλοκα συστήματα υλοποίησης και ακριβό υλικό.

Η διαδικτύωση ηλεκτρονικών υπολογιστών σε τοπικά δίκτυα και έπειτα σε μητροπολιτικά και σήμερα στο παγκόσμιο διαδίκτυο έχει φέρει μια μεγάλη επανάσταση στις επικοινωνίες. Η επανάσταση αυτή έχει τροφοδοτηθεί από την τεχνολογία των οπτικών ινών, οι οποίες μας επιτρέπουν την μεταφορά μεγάλου όγκου πληροφορίας χωρίς σημαντικές αλλοιώσεις σε μεγάλες αποστάσεις, καθώς και από την ύπαρξη μεγάλου αριθμού τηλεπικοινωνιακών δορυφόρων, οι οποίοι επιτρέπουν παγκόσμιες διασυνδέσεις.



Σχήμα 8.1: Ένα τυπικό σύστημα επικοινωνίας.

Ένα τυπικό σύστημα επικοινωνίας φαίνεται στο Σχήμα 8.1. Η πληροφορία ρέει από την πηγή προς τον προορισμό μέσω ενός καναλιού (διαύλου). Το κανάλι αυτό είναι το μέσο το οποίο επιτρέπει τη μεταφορά της πληροφορίας από τη μια άκρη του συστήματος στην άλλη. Μπορεί να είναι ο αέρας, όπως σε μια εκπομπή ραδιοκυμάτων, ένα δισύρματο καλώδιο, όπως σε μια τηλεφωνική σύνδεση στο σπίτι μας, ένα συνεστραμμένο καλώδιο, που συναντάμε σε πολλά τοπικά

δίκτυα, ένα ομοαξονικό καλώδιο, κοινό σε εφαρμογές καλωδιακής τηλεόρασης και μέχρι πρόσφατα σε πολλά τοπικά δίκτυα, μια οπτική ίνα, για διασυνδέσεις τηλεπικοινωνιακών κέντρων ή δικτύων υπολογιστών και τέλος μια μικροκυματική ζεύξη για την αποστολή σημάτων μεταξύ δύο κεραιών.

Ένα κανάλι μπορεί να επιτρέπει την μετάδοση πληροφορίας κατά μία φορά, οπότε η μετάδοση ονομάζεται μονόδρομη (simplex) (π.χ. εκπομπή ραδιοφώνου), και στις δύο κατευθύνσεις αλλά μόνο προς μια κατεύθυνση κάθε χρονική στιγμή, οπότε η μετάδοση ονομάζεται αμφίδρομη και όχι ταυτόχρονη (half-duplex) (π.χ. ένα παιδικό walkie-talkie), ή να επιτρέπει την ταυτόχρονη συνομιλία μεταξύ των δύο χρηστών, οπότε η μετάδοση ονομάζεται αμφίδρομη και ταυτόχρονη (full-duplex) (π.χ. μια τηλεφωνική συνομιλία). Επίσης η επικοινωνία μπορεί να είναι από ένα σημείο σε ένα άλλο, από ένα σημείο σε πολλά (multicasting, πολλαπλή εκπομπή) ή από ένα σημείο προς όλους (broadcasting, ανοικτή εκπομπή).

Ο πομπός αλλάζει το σήμα εισόδου ώστε να είναι δυνατή η αποστολή του μέσω του καναλιού. Ο δέκτης επεξεργάζεται το σήμα που λαμβάνει και δίνει στον προορισμό την καλύτερη δυνατή εκτίμηση για το σήμα που έχει σταλεί, γιατί το σήμα όπως διέρχεται μέσα από το κανάλι υπόκειται σε θόρυβο ο οποίος το παραμορφώνει.

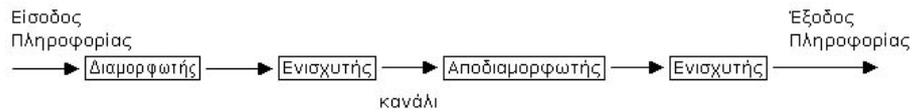
8.2 Αναλογικά και Ψηφιακά Συστήματα Επικοινωνίας

Για να εξετάσουμε λεπτομερέστερα τις υπηρεσίες του πομπού και του δέκτη πρέπει να κάνουμε κατ' αρχήν τη διάκριση σε

- αναλογικά και
- ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας.

Τα αναλογικά συστήματα επικοινωνίας είναι συνήθως απλούστερα ως προς τα στοιχεία που τα αποτελούν και ευκολότερα στο σχεδιασμό τους. Στην απλούστερη μορφή ο πομπός αποτελείται από

ένα διαμορφωτή και ο δέκτης από ένα αποδιαμορφωτή με τα κατάλληλα φίλτρα και τους απαραίτητους ενισχυτές, ώστε αφενός μεν να αποφεύγεται ο υπερβολικός θόρυβος, αφ' ετέρου δε το σήμα να είναι αρκετά ισχυρό κατά τη μετάδοσή του μέσα στο κανάλι και προς τον τελικό προορισμό (βλέπε Σχήμα 8.2).



Σχήμα 8.2: Αναλογικό σύστημα επικοινωνίας.

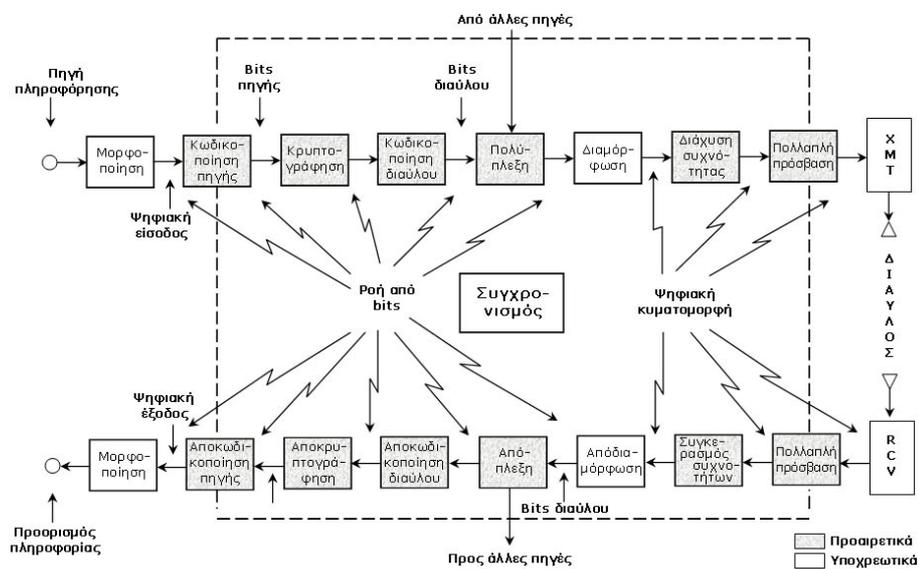
Ένας γενικός ορισμός της *διαμόρφωσης* περιλαμβάνει τις διαδικασίες εκείνες που επιτρέπουν στο σήμα να μεταδοθεί μέσα από ένα κανάλι με κάποια δεδομένα χαρακτηριστικά. Συνήθως αυτό απαιτεί το να σταλεί το σήμα κρυμμένο μέσα σε ένα άλλο περιοδικό σήμα συχνοτήτων κατά πολύ υψηλότερων του αρχικού σήματος. Στην απλούστερη μορφή το σήμα αυτό είναι ένα συνημιτονοειδές κύμα του οποίου μπορούμε να διαμορφώσουμε, ανάλογα με το σήμα που μεταδίδουμε, το εύρος (διαμόρφωση εύρους), τη συχνότητα (διαμόρφωση συχνότητας) ή τη φάση (διαμόρφωση φάσης).

Ο δέκτης πρέπει να έχει τη δυνατότητα να “ανακαλύψει” το σήμα όσο πιο πιστά γίνεται και να προσφέρει στον προορισμό μια όσο το δυνατόν καλύτερη εκτίμηση του σήματος που έχει σταλεί.

Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας είναι πιο περίπλοκο από ένα αναλογικό καθώς περιλαμβάνει λειτουργίες απαραίτητες για τη μετατροπή αναλογικών σημάτων σε ψηφιακά (εάν η πηγή είναι αναλογική, όπως π.χ. η φωνή μας σε μια τηλεφωνική συνδιάλεξη), καθώς και μια σειρά άλλων διαδικασιών οι οποίες έχουν σκοπό να κάνουν τη μετάδοση αξιόπιστη, ασφαλή και αποτελεσματική ως προς τη χρήση του εύρους ζώνης συχνοτήτων που προσφέρεται και την κατανομή των τηλεπικοινωνιακών πόρων μεταξύ περισσότερων του ενός χρηστών.

Στο Σχήμα 8.3 φαίνεται ένα τυπικό ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας. Τα τμήματα που παρουσιάζονται με διαγράμμιση είναι προαιρετι-

κά, ενώ τα τμήματα χωρίς διαγράμμιση είναι υποχρεωτικά. Ο επάνω κλάδος στο Σχήμα περιλαμβάνει διαδικασίες που γίνονται στην πηγή, ενώ ο κάτω κλάδος διαδικασίες που γίνονται στον προορισμό. Πρέπει να επισημάνουμε ότι πρέπει να υπάρχει πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των τμημάτων πηγής και προορισμού και επίσης ότι όταν προτείνουμε μια διαδικασία που αλλάζει το σήμα στον πομπό τότε θα πρέπει να έχουμε μια εξίσου απλή και εύκολη να υλοποιηθεί διαδικασία επαναφοράς του σήματος στην αρχική του μορφή στο δέκτη.



Σχήμα 8.3: Ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας.

Όπως και στα αναλογικά συστήματα επικοινωνίας είναι απαραίτητη η χρήση διαμορφωτών και αποδιαμορφωτών (για λόγους οικονομίας χώρου στο Σχήμα 8.3 δε φαίνονται οι απαραίτητοι ενισχυτές). Στο ψηφιακό σύστημα προστίθεται σαν απαραίτητη διαδικασία αυτή της μορφοποίησης (formatting), η οποία επιτρέπει σε μια πληροφορία (αναλογική ή μη) να παρασταθεί με ορισμένο ψηφιακό τρόπο.

Εάν το σήμα εισόδου είναι αναλογικό (φωνή, σήμα αναλογικής τηλεόρασης, κτλ), τότε πρέπει να γίνουν οι παρακάτω διεργασίες:

Δειγματοληψία: Λήψη δειγμάτων, μετατροπή δηλαδή του σήματος σε μια σειρά αριθμών, που εκφράζουν το μέγεθος του σήματος σε μια ορισμένη χρονική στιγμή (θυμηθείτε ότι για να μπορούμε να έχουμε πλήρη ανακατασκευή του σήματος στον προορισμό πρέπει να παίρνουμε δείγματα με συχνότητα τουλάχιστον διπλάσια της μέγιστης συχνότητας του σήματος (θεώρημα Nyquist)).

Κβάντωση: Επειδή τα δείγματα που έχουμε λάβει κατά τη δειγματοληψία έχουν τιμές συνεχείς (αναλογικές) πρέπει να διαλέξουμε ένα πεπερασμένο αριθμό τιμών τις οποίες μπορεί να λαμβάνουν τα δείγματα. Αν παραδείγματος χάρη επιλέξουμε 4 τιμές όπως τα 0,1,2,3, ένα δείγμα με μέγεθος 4,1 θα πάρει την τιμή 3, ενώ ένα δείγμα με τιμή 2,3 θα πάρει την τιμή 2. (Πρέπει εδώ να προσέξουμε ότι η κβάντωση είναι μια λειτουργία μη αναστρέψιμη. Δηλαδή έχουμε χάσιμο πληροφορίας ή στη γλώσσα των επικοινωνιών εισαγωγή θορύβου. Ο θόρυβος αυτός μπορεί να ελαχιστοποιηθεί με τη χρήση πολλών τιμών, αλλά πάντα θα υπάρχει. Η αξιοπιστία των ψηφιακών συστημάτων και οι αποτελεσματικοί τρόποι αποκωδικοποίησης ψηφιακών συστημάτων μάς επιτρέπουν να αναλάβουμε από τον θόρυβο αυτό και να έχουμε αποδεκτά αποτελέσματα).

Κωδικοποίηση: Με βάση τις κβαντισμένες τιμές του σήματος, τα δείγματα κωδικοποιούνται με τη χρήση λέξεων κώδικα, οι οποίες εξαρτώνται από τα πρότυπα που θα χρησιμοποιήσουμε. Π.χ. η τιμή 3 μπορεί να παρασταθεί σαν 10 και η τιμή 2 σαν 10 σε ένα σύστημα όπου κάθε τιμή αναπαριστάνεται με 2 bit.

Στην μορφοποίηση μπορεί να ξεκινήσουμε και από σήματα με διακριτές τιμές (π.χ. γράμματα αλφαβήτου), τα οποία πρέπει να κωδικοποιηθούν σε ψηφιακή μορφή με ένα κώδικα, όπως ο κώδικας ASCII.

Στην κωδικοποίηση πηγής πετυχαίνουμε μείωση του ρυθμού της αποστελλόμενης πληροφορίας χρησιμοποιώντας μορφές συμπίεσης,

οι οποίες βγάζουν εκτός μετάδοσης πληροφορία, η οποία δεν είναι απαραίτητη, π.χ. μια σειρά από 1.000.000 μηδενικά μπορεί να οριστεί απλώς σαν τον αριθμό 1.000.000 ακολουθούμενο από τη λέξη ή το σύμβολο μηδέν, περιορίζοντας έτσι σημαντικά το μέγεθος της πληροφορίας που μεταδίδεται.

Η κρυπτογράφηση επιτρέπει την αλλαγή του μηνύματος, ώστε να μη γίνεται αντιληπτό από κάποιον, ο οποίος παρακολουθεί το κανάλι. Η αποκρυπτογράφηση του μηνύματος είναι δυνατή μόνο από τον δέκτη που έχει τον κατάλληλο τρόπο και το κατάλληλο “κλειδί” για να αποκωδικοποιήσει το σήμα.

Η κωδικοποίηση καναλιού επιτρέπει την εισαγωγή πρόσθετων ψηφίων στο σήμα, έτσι ώστε να γίνεται δυνατή η διόρθωση λαθών ή τουλάχιστον η ανίχνευσή τους. Σε περίπτωση ανίχνευσης λάθους, αν υπάρχει δυνατότητα διόρθωσης αυτή γίνεται στον δέκτη, ενώ σε αντίθετη περίπτωση μπορεί να ζητηθεί η επανεκπομπή του μηνύματος από τον πομπό, η ολική απόρριψη του μηνύματος ή και η έκδοσή του στον προορισμό, ο οποίος μπορεί να αποφασίσει για την τύχη του. Η ποιότητα της κωδικοποίησης εξαρτάται από την εφαρμογή. Σε μια τραπεζική συναλλαγή θα θέλαμε να είμαστε όσο το δυνατόν πιο σίγουροι ότι δε θα γίνει κανένα λάθος, ενώ στο άκουσμα ραδιοφώνου μέσω Διαδικτύου μπορούμε να αντέξουμε και ήχο κάποιας χαμηλής ποιότητας.

Η πολύπλεξη επιτρέπει να σταλούν περισσότερα του ενός σήματα ταυτόχρονα και μπορεί να περιλαμβάνει, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, πολύπλεξη με διαίρεση του χρόνου, πολύπλεξη με διαίρεση συχνότητας, ή πολύπλεξη με χρήση κώδικα.

Η διασπορά της συχνότητας –στη μορφή της πολύπλεξης με χρήση κώδικα– χρησιμοποιήθηκε πρώτα σε στρατιωτικούς σκοπούς για να κρύψει την πραγματική συχνότητα αποστολής ενός μηνύματος και χρησιμοποιείται σήμερα ευρέως σε δίκτυα κινητής τηλεφωνίας για να επιτρέπει σε όσο το δυνατόν περισσότερους χρήστες ταυτόχρονη χρήση του μέσου.

Στα τοπικά δίκτυα πολλοί χρήστες μοιράζονται ένα κανάλι μέσω μιας μεθόδου πρόσβασης, η οποία είναι γνωστή ως “πολλαπλή πρό-

σβαση". Η πολλαπλή πρόσβαση στο κανάλι περιλαμβάνει μια σειρά μεθόδων που ποικίλει από την απόλυτη αναρχία -όποτε έχω να στείλω κάτι το στέλνω - μέχρι την απόλυτη τάξη - πρέπει να μου δοθεί κάποια άδεια για να μπορέσω να στείλω.

Απαραίτητα πρέπει να υπάρχει συγχρονισμός μεταξύ του πομπού και του δέκτη. Ο συγχρονισμός αυτός αφορά στη συχνότητα, στη φάση, στους χρόνους κτλ. και αποτελεί ένα από τα δυσκολότερα θέματα στο χώρο των επικοινωνιών, γιατί ο πομπός και ο δέκτης μπορεί να βρίσκονται πολύ μακριά και σε σχετική κίνηση ο ένας από τον άλλο (π.χ. δορυφόρος-Γη) και τα ρολόγια που χρησιμοποιούν να μην έχουν την απαιτούμενη ακρίβεια και σταθερότητα.

Να σημειώσουμε εδώ ότι μετά τη μορφοποίηση έχουμε την πληροφορία υπό μορφή συμβόλων, ενώ μετά τη διαμόρφωση σαν μια κυματομορφή. Να σημειώσουμε επίσης ότι τα τμήματα όπως παρουσιάστηκαν μπορεί να έχουν επικαλύψεις και ότι η σειρά που χρησιμοποιούνται δεν είναι μοναδική.

Οι διαδικασίες που περιγράφηκαν απαιτούν κυκλώματα γρήγορα και περίπλοκα. Η χρήση τεχνολογίας VLSI μας έχει επιτρέψει την κατασκευή τέτοιων κυκλωμάτων με χαμηλό κόστος και σε μεγάλους αριθμούς.

8.3 Διαμόρφωση

Όπως έχουμε ήδη προαναφέρει η διαμόρφωση είναι το κύριο χαρακτηριστικό κάθε συστήματος επικοινωνίας. Ορίζουμε τη διαμόρφωση σαν τη διαδικασία, η οποία μεταβάλλει κάποιο χαρακτηριστικό ενός σήματος - που λέγεται φέρον κύμα (carrier wave) - σύμφωνα με το εισερχόμενο σήμα - το διαμορφούν σήμα ή σήμα πληροφορίας. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ένα διαμορφωμένο σήμα (modulated signal).

Σύμφωνα με τον τύπο του φέροντος κύματος μπορούμε να διακρίνουμε δύο τύπους διαμόρφωσης:

- Διαμόρφωση συνεχούς κύματος, η οποία χρησιμοποιεί ένα συ-

νημιτονοειδές κύμα φέροντος και

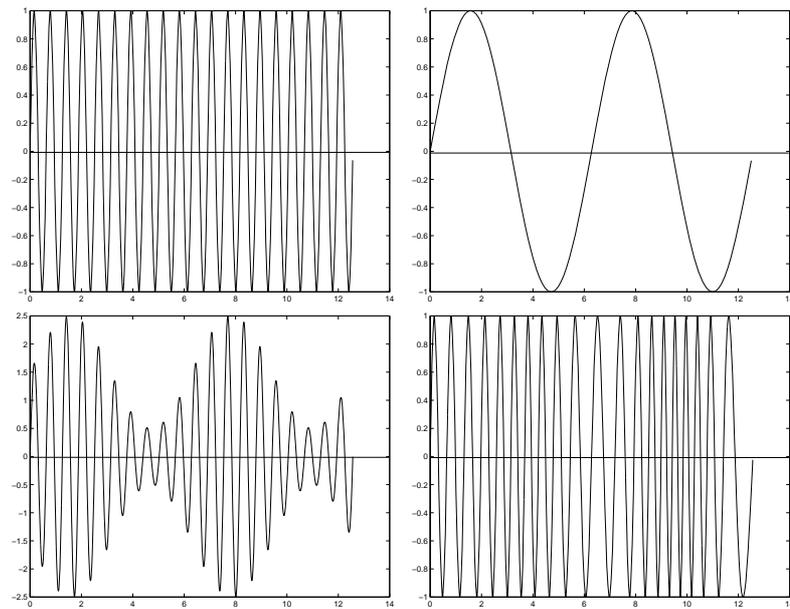
- Διαμόρφωση παλμών, η οποία χρησιμοποιεί μια περιοδική σειρά παλμών σαν κύμα φέροντος.

8.3.1 Διαμόρφωση συνεχούς κύματος

Ας θεωρήσουμε το σήμα $\varphi(t) = A\cos(\theta(t))$, όπου είναι A το εύρος (ή πλάτος ή ύψος) του σήματος και $\theta(t)$ η γωνία του σήματος. Μπορούμε να μεταβάλλουμε ανάλογα με το σήμα πληροφορίας το εύρος ή τη γωνία του φέροντος σήματος. Η πρώτη περίπτωση ορίζεται σαν *διαμόρφωση εύρους* ενώ η δεύτερη σαν *διαμόρφωση γωνίας*. Παραδείγματα διαμόρφωσης εύρους και γωνίας φαίνονται στο Σχήμα 8.4.

Η διαμόρφωση εύρους (ή πλάτους), όπως θα δούμε αναλυτικά παρακάτω, μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους ανάλογα με το με ποιον τρόπο μεταβάλλουμε το εύρος, με ποιον τρόπο χρησιμοποιούμε το φέρον κύμα και με ποιον τρόπο το διαθέσιμο εύρος ζώνης. Η διαμόρφωση εύρους, σε γενικές γραμμές, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μια γραμμική διαμόρφωση, με την έννοια ότι αν μεταβληθεί κατά ένα παράγοντα το εύρος του σήματος πληροφορίας θα δούμε ανάλογη μεταβολή και στο διαμορφώμενο σήμα.

Η διαμόρφωση γωνίας είναι μια μη γραμμική διαδικασία. Περιλαμβάνει τη διαμόρφωση φάσης και τη διαμόρφωση συχνότητας.



Σχήμα 8.4: Κύματα διαμόρφωσης εύρους και γωνίας για ημιτονοειδή διαμόρφωση. Άνω αριστερά: φέρον κύμα. Άνω δεξιά: ημιτονοειδές κύμα διαμόρφωσης. Κάτω αριστερά: κύμα με διαμόρφωση εύρους. Κάτω δεξιά: κύμα με διαμόρφωση γωνίας.

8.3.2 Διαμόρφωση Παλμών

Στη διαμόρφωση παλμών, το κύμα φέροντος είναι μια σειρά (ένα “τρένο”) από στενούς παλμούς:

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - n\tau)$$

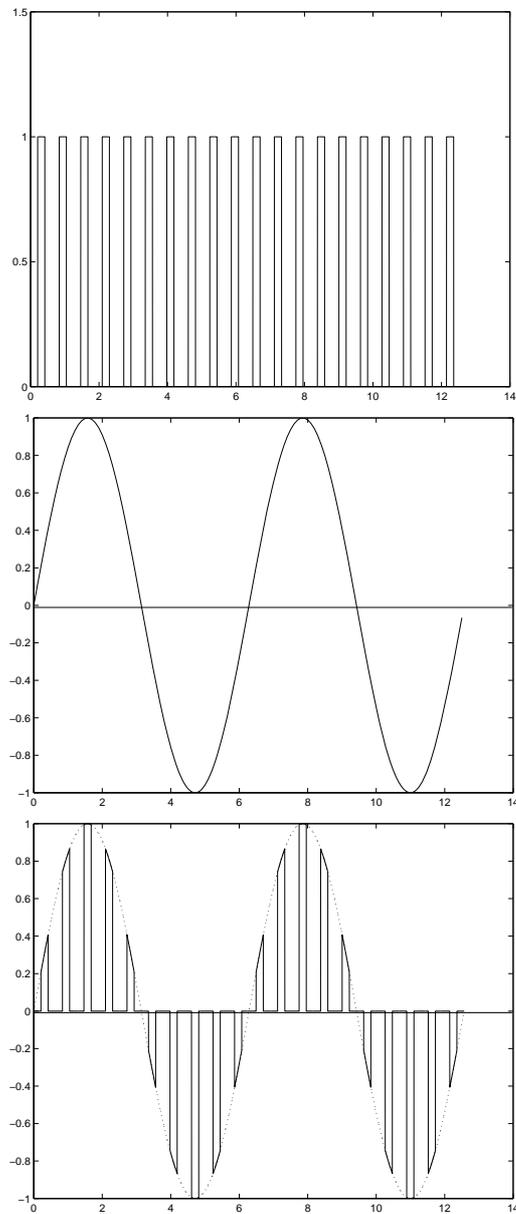
όπου τ είναι η περίοδος και $p(t)$ ένας παλμός μικρής διάρκειας.

Έχουμε διαμόρφωση παλμών όταν μεταβάλλουμε μερικά χαρακτηριστικά του παλμού, όπως το ύψος, το εύρος ή τη θέση σύμφωνα με το σήμα πληροφορίας.

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο κατηγορίες διαμόρφωσης παλμών ανάλογα με το σήμα πληροφορίας που έχουμε:

Στην αναλογική διαμόρφωση παλμών, έχουμε συνεχή μεταβολή παραμέτρων των παλμών ανάλογα με το σήμα πληροφορίας. Μπορούμε να μεταβάλλουμε το πλάτος (εύρος), τη διάρκεια και τη θέση του παλμού, έχοντας αντίστοιχα διαμόρφωση εύρους ή πλάτους παλμού (PAM: Pulse Amplitude Modulation), διαμόρφωση διάρκειας παλμών (PWM: Pulse Width Modulation), και διαμόρφωση θέσης παλμών (PPM: Pulse Position Modulation). Η διαμόρφωση αυτή είναι αντίστοιχη της διαμόρφωσης συνεχούς κύματος. Στο Σχήμα 8.5 βλέπουμε τη διαμόρφωση εύρους ενός τρένου τετραγωνικών παλμών από ένα ημιτονοειδές κύμα.

Στην ψηφιακή διαμόρφωση παλμών, το σήμα πληροφορίας παρουσιάζεται σε κωδικοποιημένη μορφή, δηλαδή έχει ένα σύνολο διακριτών τιμών. Για να επιτύχουμε ψηφιακή διαμόρφωση παλμών πρέπει να κβαντίσουμε το σήμα και μετά να το κωδικοποιήσουμε σαν μια σειρά δυαδικών στοιχείων. Η διαμόρφωση αυτή είναι γνωστή σαν παλμοκωδική διαμόρφωση ((PCM: Pulse Code Modulation). Να προσέξουμε εδώ ότι η κβάντωση χάνει μέρος της πληροφορίας. Η αποστολή του σήματος μέσα στο κανάλι μπορεί να γίνει μετά με διάφορους τρόπους που ανήκουν γενικά σε δυο κατηγορίες: αποστολή στη βασική ζώνη (baseband transmission) και αποστολή στην ευρεία ζώνη (broadband transmission).



Σχήμα 8.5: Διαμόρφωση εύρους παλμών. α) Τρένο από παλμούς. β) Ημιτονοειδές κύμα διαμόρφωσης. γ) Διαμορφωμένο σήμα. (PAM).

8.3.3 Γιατί διαμορφώνουμε;

Η διαμόρφωση παίζει ένα σημαντικό ρόλο στα επικοινωνιακά συστήματα, όπως επίσης σε συστήματα ελέγχου, στην επεξεργασία σήματος, στη ραδιοτηλεμετρία κτλ.

Στα συστήματα επικοινωνίας όπως τονίσαμε παραπάνω αποτελεί ένα βασικό δομικό στοιχείο για τους παρακάτω λόγους:

1. Η διαμόρφωση δημιουργεί ένα σήμα το οποίο έχει ένα φάσμα που του επιτρέπει να μεταδοθεί μέσα σε ένα ορισμένο κανάλι σε μεγάλες αποστάσεις. Στο ραδιόφωνο παραδείγματος χάριν στα μεν AM το σήμα διαμορφώνεται σε συχνότητες μεταξύ των 530 και 1600 KHz, ενώ στα FM οι συχνότητες είναι μεταξύ των 88 και 108 MHz. Να σημειώσουμε εδώ ότι ανάλογα με τη συχνότητα και τη διαμόρφωση που χρησιμοποιείται το σήμα μπορεί να καλύψει μικρές ή μεγαλύτερες αποστάσεις και να επηρεαστεί ανάλογα από τα καιρικά φαινόμενα.
2. Η διαμόρφωση μπορεί να κάνει το σήμα ανθεκτικό στο θόρυβο και στις διάφορες παρεμβολές, αποτελώντας επίσης και μια πρώτη μορφή κρυπτογράφησης.
3. Η διαμόρφωση επιτρέπει την πολύπλεξη, τη συνύπαρξη δηλαδή πολλαπλών σημάτων στο ίδιο κανάλι. Με τον τρόπο αυτό χρησιμοποιούμε αποτελεσματικά τους πόρους του συστήματος που μας διατίθενται.
4. Μπορούμε να χρησιμοποιούμε κεραίες για την αποστολή και λήψη μηνυμάτων, οι οποίες έχουν μεγέθη συμβατά με την εφαρμογή που έχουμε. Π.χ. χρησιμοποιούμε συχνότητες της τάξεως των GHz για τη μετάδοση μηνυμάτων σε ένα τηλεειδοποιητήριο (paging) γιατί θέλουμε κεραίες διαμέτρου / μήκους λίγων εκατοστών.

8.4 Αναλογική Διαμόρφωση Εύρους

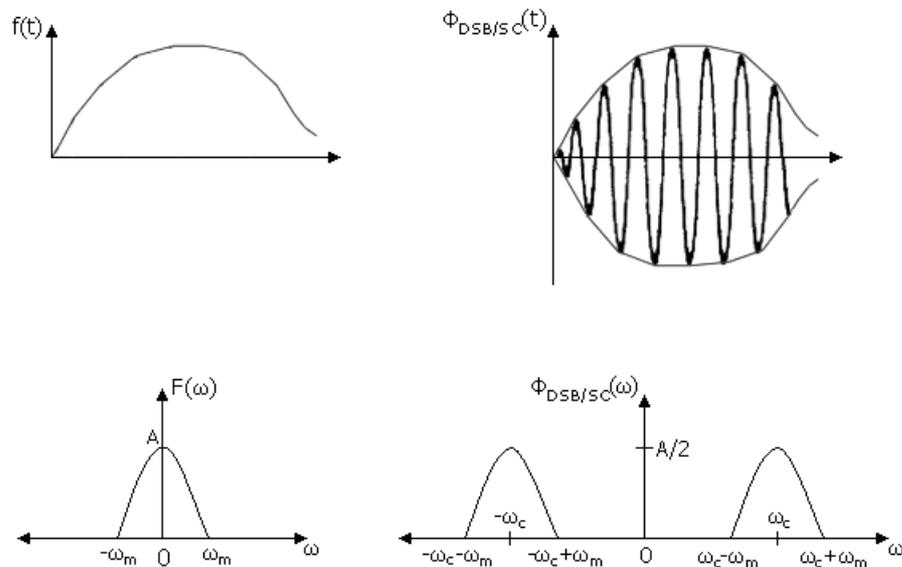
8.4.1 Διαμόρφωση εύρους DSB/SC

Κατά τη διαμόρφωση εύρους, το εύρος του φέροντος κύματος μεταβάλλεται ανάλογα με το σήμα που θέλουμε να στείλουμε. Έστω $f(t)$ το διαμορφούν σήμα και ω_c η συχνότητα του φέροντος. Τότε το διαμορφωμένο σήμα δίνεται από τη σχέση:

$$\phi_{\text{DSB/SC}}(t) = f(t) \cos \omega_c t.$$

Αν δούμε το σήμα στο πεδίο της συχνότητας έχουμε -χρησιμοποιώντας τη ιδιότητα της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier-

$$\Phi_{\text{DSB/SC}}(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)].$$



Σχήμα 8.6: Διαμόρφωση DSB/SC: Τα σήματα στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο των συχνοτήτων.

Στο Σχήμα 8.6 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις στα πεδία του χρόνου και των συχνοτήτων. Στο πεδίο του χρόνου βλέπουμε ότι το διαμορφωμένο σήμα είναι ένα συνημιτονοειδές σήμα συχνότητας και φάσης ίδιας με το αρχικό φέρον κύμα, αλλά με εύρος που μεταβάλλεται ανάλογα με το $f(t)$.

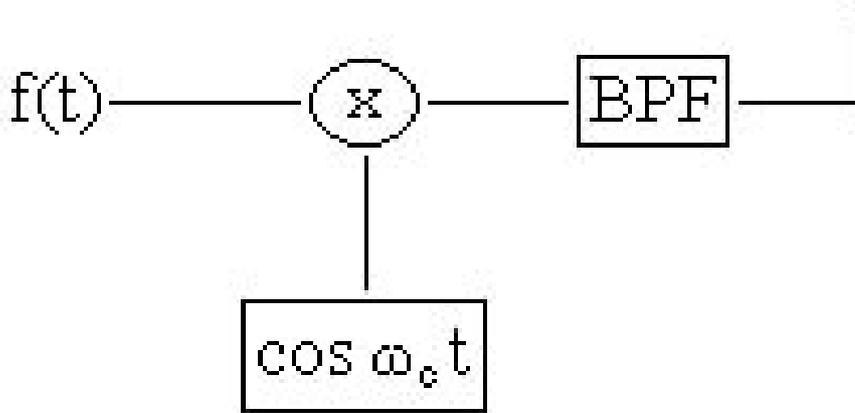
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά στο πεδίο της συχνότητας. Συγκεκριμένα βλέπουμε ότι το διαμορφωμένο σήμα έχει πλέον φάσμα ίδιο με το αρχικό με κέντρο τη συχνότητα φέροντος ω_c και εύρος φάσματος $2\omega_m$ (όπου ω_m είναι η μέγιστη συχνότητα του αρχικού σήματος $f(t)$). Ο διπλασιασμός αυτός του εύρους ζώνης με την εμφάνιση και των δύο πλευρικών ζωνών -της ανώτερης και της κατώτερης- στις θετικές συχνότητες οδηγεί σε συστήματα τα οποία έχουν εύρος ζώνης διπλάσιο του αρχικού. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται διπλής πλευρικής ζώνης (DSB: Double Sideband).

Μια άλλη παρατήρηση σχετικά με το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος είναι το ότι δε φαίνεται το φέρον σήμα στο τελικό φάσμα, γεγονός το οποίο, όπως θα δούμε παρακάτω, οδηγεί σε περίπλοκα συστήματα αποδιαμόρφωσης. Η μη ύπαρξη του φέροντος ονομάζεται καταπίεση του φέροντος (SC: Suppressed Carrier). Με βάση τα παραπάνω ο μηχανισμός αυτός διαμόρφωσης είναι γνωστός σαν Διαμόρφωση Διπλής Πλευρικής Ζώνης με Καταπίεση Φέροντος (DSB/SC: Double Sideband with Suppressed Carrier).

Η παραγωγή ενός τέτοιου σήματος μπορεί να παρασταθεί με το διάγραμμα του Σχήματος 8.7.

Η ύπαρξη του ζωνοπερατού φίλτρου (BPF: Bandpass filter) είναι πάντα απαραίτητη για να μην στέλνουμε στο μέσο πληροφορία σε συχνότητες, οι οποίες δεν αντιστοιχούν στο επιτρεπόμενο εύρος ζώνης. Η παραπάνω αυτή πληροφορία εμφανίζεται σαν θόρυβος στους άλλους χρήστες του μέσου και μπορεί να έχει προέλθει από τη διαδικασία διαμόρφωσης ή από την ύπαρξη άλλων παρεμβολών στην πηγή.

Όταν ο δέκτης λάβει το σήμα πρέπει να έχει τη δυνατότητα να αποδιαμορφώσει το σήμα. Θα πρέπει δηλαδή να είναι σε θέση να μεταφέρει το φάσμα από την υψηλή αυτή συχνότητα στις χαμηλές συχνότητες. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει με τη χρήση της ιδιότητας



Σχήμα 8.7: Διαμόρφωση DSB/SC.

της διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier. Δηλαδή απαιτείται ο πολλαπλασιασμός του ληφθέντος σήματος με ένα συνημιτονοειδές σήμα και η χρήση των απαραίτητων φίλτρων. Η διαδικασία αυτή φαίνεται στο Σχήμα 8.8.

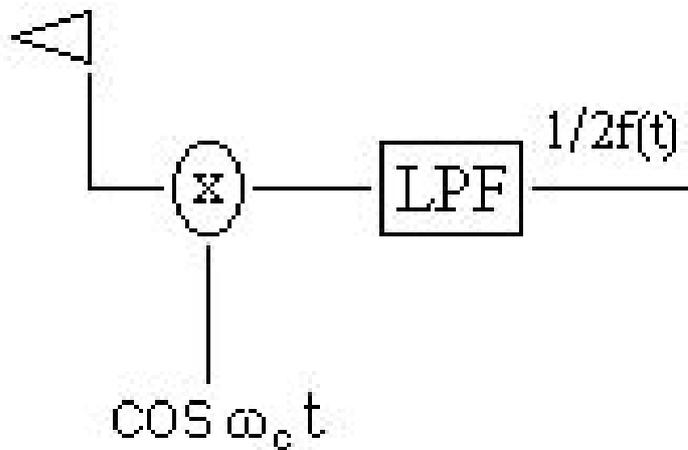
Πολλαπλασιασμός του διαμορφωμένου σήματος με το συνημιτονοειδές κύμα φέροντος μας δίνει (Σχήμα 8.8):

$$\phi_{\text{DSB/SC}} \cos \omega_c t = f(t) \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(t) \cos 2\omega_c t,$$

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας $\cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_c t$

Το σήμα που προέκυψε περιέχει το αρχικό σήμα και ένα όρο που περιέχει το αρχικό σήμα μετατοπισμένο στη συχνότητα $2\omega_c$. Με τη χρήση ενός βαθυπερατού φίλτρου μπορούμε να κρατήσουμε μόνο το αρχικό σήμα. Στο Σχήμα 8.9 φαίνεται περιγραφικά η διαδικασία αυτή στο πεδίο των συχνοτήτων.

Παρακολουθώντας τη διαδικασία αποδιαμόρφωσης παρατηρούμε ότι απαιτείται η ύπαρξη στο δέκτη ενός σήματος που θα έχει την ίδια συχνότητα και την ίδια φάση με το φέρον σήμα που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διαμόρφωση. Τυχόν λάθη στην εκτίμηση της συχνότητας



Σχήμα 8.8: Αποδιαμόρφωση DSB/SC.

ή της φάσης μπορεί να έχουν καταστροφική επίδραση στην ποιότητα της επικοινωνίας.

Ας υποθέσουμε ότι στο δέκτη υπάρχει το σήμα φέροντος με σφάλμα στη συχνότητα $\Delta\omega$ και σφάλμα στη φάση $\Delta\theta$. Δηλαδή ο τοπικός ταλαντωτής παραγωγής κύματος φέροντος μας δίνει: $\cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta)$ αντί για $\cos(\omega_c t)$.

Τότε κατά την αποδιαμόρφωση έχουμε

$$\begin{aligned} f(t) \cos(\omega_c t) \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta] &= \\ \frac{1}{2} f(t) [\cos[\omega_c t + \omega_c t + \Delta\omega)t + \Delta\theta] + \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta)] &= \\ = \frac{1}{2} f(t) \cos(2\omega_c t + \Delta\omega t + \Delta\theta) + \frac{1}{2} f(t) \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta). \end{aligned}$$

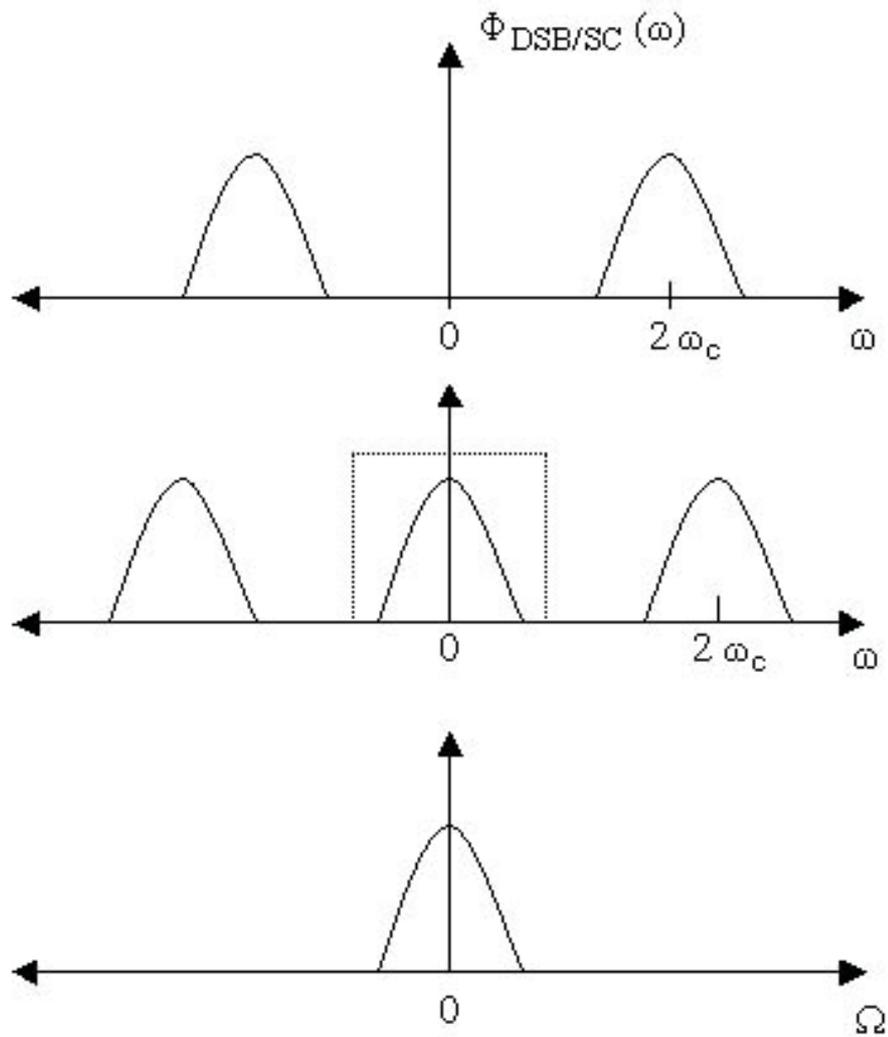
Ο πρώτος όρος στην παραπάνω σχέση θα διαγραφεί από το βαθυπερατό φίλτρο. Ο δεύτερος όρος δε μας δίνει όμως το $f(t)$, αλλά το $f(t)$ πολλαπλασιασμένο με ένα όρο που μπορεί να λάβει μια ποικιλία

τιμών.

Εάν $\Delta\theta = 0$ τότε παίρνουμε $\frac{1}{2}f(t)\cos(\Delta\omega t)$, δηλαδή μια παραμόρφωση που αλλάζει με το χρόνο και έχει δυσμενή επίδραση στην ποιότητα του σήματος.

Εάν $\Delta\omega = 0$ τότε παίρνουμε $\frac{1}{2}f(t)\cos(\Delta\theta)$, το οποίο μπορεί να είναι καταστροφικό για την ποιότητα του σήματος εάν $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$.

Από τα παραπάνω φαίνεται η ανάγκη για απόλυτο συγχρονισμό πομπού και δέκτη, η οποία μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς τρόπους, αλλά συνήθως απαιτεί ακριβό εξοπλισμό. Η αποδιαμόρφωση με πλήρη γνώση του φέροντος κύματος είναι γνώστη σαν ομόδυνη, σύγχρονη ή σύμφωνη αποδιαμόρφωση ή ανίχνευση (coherent demodulation, coherent detection). Αν υποθέσουμε ότι το φέρον κύμα δεν είναι πλήρως γνωστό τότε έχουμε ετερόδυνη αποδιαμόρφωση (χρησιμοποιείται κυρίως σε ψηφιακές αποδιαμορφώσεις συστημάτων με διαμόρφωση συχνότητας). Έχουμε επίσης τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε και αποδιαμόρφωση με την τεχνική της περιβάλλουσας όπως στην περίπτωση του DSB/LC που θα εξετάσουμε παρακάτω.



Σχήμα 8.9: Αποδιαμόρφωση σήματος DSB/SC. Περιγραφή στο πεδίο των συχνοτήτων.

Κυκλώματα Διαμόρφωσης / Αποδιαμόρφωσης

Κατά την διαμόρφωση και την αποδιαμόρφωση δημιουργούνται καινούριες συχνότητες, οι οποίες δεν υπήρχαν στο αρχικό σήμα (το $f(t)$ κατά τη διαμόρφωση, το $\phi_{\text{DSB/SC}}(t)$ κατά την αποδιαμόρφωση). Η ύπαρξη των νέων αυτών συχνοτήτων μας υποδηλώνει ότι δεν είναι δυνατόν να κάνουμε διαμόρφωση / αποδιαμόρφωση με γραμμικά μη μεταβαλλόμενα με το χρόνο συστήματα (LTI: Linear Time Invariant). Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε συστήματα τα οποία είτε είναι μεταβαλλόμενα με το χρόνο (time variant) είτε είναι μη γραμμικά.

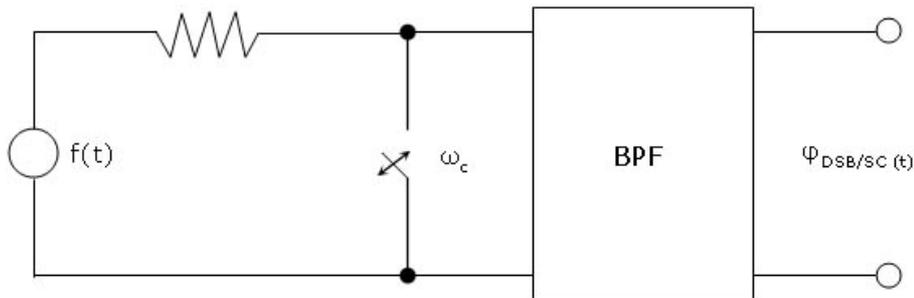
Διαμόρφωση / Αποδιαμόρφωση με Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα

Η διαμόρφωση και η αποδιαμόρφωση όπως είδαμε παραπάνω στηρίζεται στον πολλαπλασιασμό ενός σήματος με ένα συνημιτοειδές φέρον. Συνήθως ο πολλαπλασιασμός γίνεται όχι απ' ευθείας με ένα συνημιτοειδές φέρον αλλά με ένα περιοδικό σήμα το οποίο έχει βασική συχνότητα ίση με ω_c . Η ισοδυναμία αυτή ισχύει διότι αν υποθέσουμε ότι το περιοδικό σήμα $P_\tau(t)$ με περίοδο T και συχνότητα $f_c = \frac{1}{T_c}$ πολλαπλασιάζεται με το σήμα πληροφορίας $f(t)$, τότε έχουμε για το μετασχηματισμό Fourier του γινομένου:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \cdot P_\tau(t)\} &= \mathcal{F}\left\{f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\omega_c t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \mathcal{F}\{f(t) e^{in\omega_c t}\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_c) \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί κάθε περιοδικό σήμα μπορεί να αναλυθεί σαν το άθροισμα μιας σειράς Fourier με συντελεστές P_n που μπορούν να υπολογιστούν. Η δεύτερη ισότητα προέρχεται από αλλαγή της σειράς της άθροισης και του ολοκληρώματος, ενώ η τελευταία ισότητα από την ιδιότητα διαμόρφωσης του μετασχηματισμού Fourier. Το τελικό άθροισμα περιέχει αντίγραφα του $F(\omega)$ σε

διάφορες συχνότητες πολλαπλάσιες του $n\omega_c$. Αν τοποθετήσουμε ένα ζωνοπερατό φίλτρο γύρω από το ω_c τότε παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα $P_1F(\omega - \omega_c) + P_{-1}F(\omega + \omega_c)$, δηλαδή το αρχικό φάσμα μετατοπισμένο κατά ω_c .



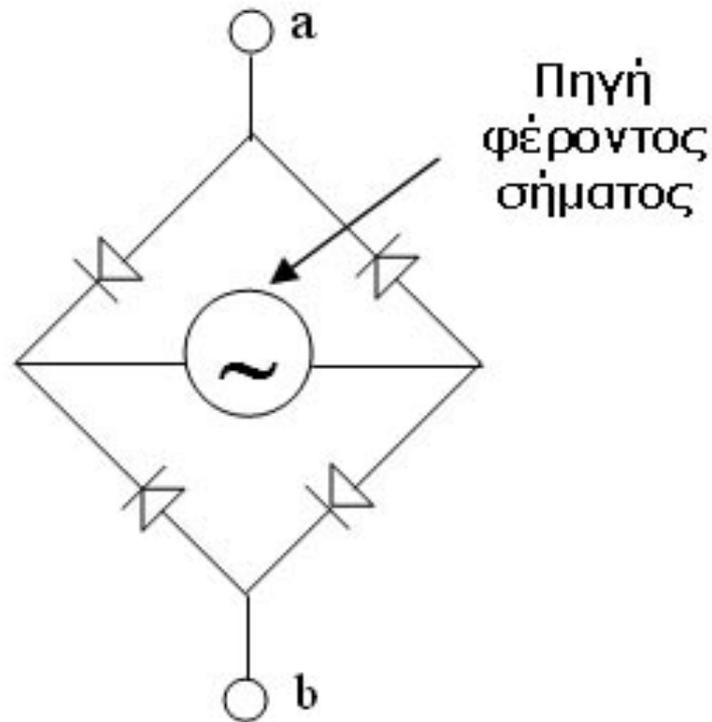
Σχήμα 8.10: Ηλεκτρομαγνητικός Διαμορφωτής DSB-SC.

Ο πολλαπλασιασμός με ένα περιοδικό σήμα μπορεί να γίνει με ηλεκτρομαγνητικό τρόπο όπως στο Σχήμα 8.10 ή με ηλεκτρονικό τρόπο όπως στο Σχήμα 8.11.

Η αποδιαμόρφωση είναι ακριβώς αντίστοιχη διαδικασία, με την χρήση βέβαια κατάλληλων φίλτρων, καθώς θέλουμε να γυρίσει το φάσμα στις χαμηλές συχνότητες απαιτούνται ζωνοπερατά φίλτρα. Πρέπει να προσέξουμε όμως εδώ ότι η χρήση ζωνοπερατών ή βαθυπερατών φίλτρων καθώς και η εκλογή του εύρους των φίλτρων αυτών εξαρτώνται από το περιοδικό σήμα που θα χρησιμοποιήσουμε. Συχνά πολλές από τις τιμές P_n είναι μηδενικές και μας δίνεται έτσι μεγαλύτερη ευελιξία στη χρήση φίλτρων.

Διαμόρφωση/Αποδιαμόρφωση με μη Γραμμικά Συστήματα

Η έξοδος ενός μη γραμμικού συστήματος παρουσιάζει συχνότητες οι οποίες δεν υπήρχαν στην είσοδό του. Έτσι ένα μη γραμμικό κύκλωμα κατάλληλα σχεδιασμένο μπορεί να λειτουργήσει σαν διαμορφωτής εύρους. Ένα τέτοιο σύστημα δίνεται στο Σχήμα 8.12,



Σχήμα 8.11: Μια υλοποίηση του ηλεκτρονικού διακόπτη.

όπου το μη γραμμικό στοιχείο μπορεί να είναι μια δίοδος ή ένα τρανζίστορ.

Από το Σχήμα 8.12 παίρνουμε:

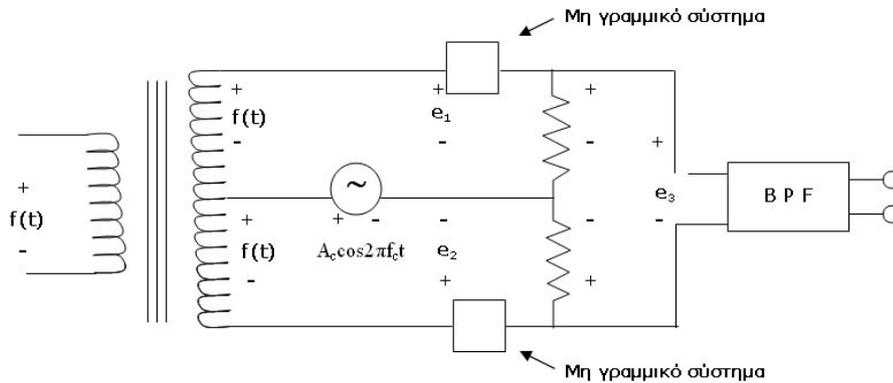
$$e_1(t) = f(t) + \cos \omega_c t$$

$$e_2(t) = \cos \omega_c t - f(t)$$

Το $e_3(t)$ ισούται με τη διαφορά των $e_1(t)$ και $e_2(t)$.

Αν υποθέσουμε ότι το μη γραμμικό σύστημα έχει συνάρτηση εισόδου - εξόδου

$$v_{out} = \alpha_1 v_{in} + \alpha_2 v_{in}^2,$$



Σχήμα 8.12: Ισορροπημένος διαμορφωτής.

τότε

$$\begin{aligned}
 e_3(t) &= \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_1^2(t) - (\alpha_1 e_2(t) + \alpha_2 e_2^2(t)) \\
 &= \alpha_1 f(t) + \alpha_1 \cos \omega_c t + \alpha_2 f^2(t) + 2\alpha_2 f(t) \cos \omega_c t \\
 &+ \alpha_2 \cos^2 \omega_c t + \alpha_1 f(t) - \alpha_1 \cos \omega_c t - \\
 &- \alpha_2 f^2(t) - \alpha_2 \cos^2 \omega_c t + 2\alpha_2 f(t) \cos \omega_c t \\
 &= 2\alpha_1 f(t) + 4\alpha_2 f(t) \cos \omega_c t
 \end{aligned}$$

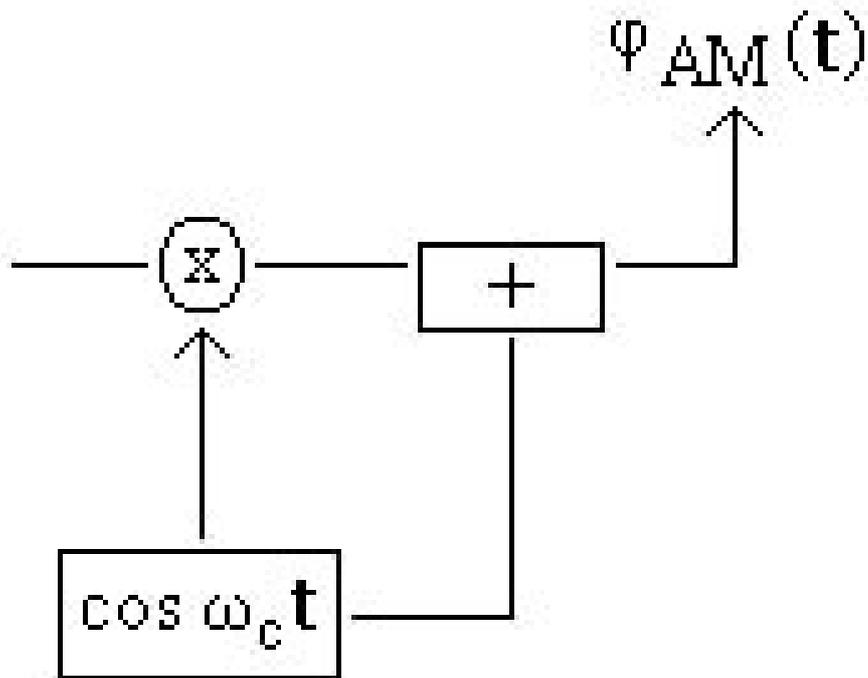
Με χρήση του ζωνοπερατού φίλτρου του Σχήματος 8.12 ο όρος $2\alpha_1 f(t)$ εξαφανίζεται και μένει μόνο ο δεύτερος όρος, ο οποίος περιγράφει ένα σήμα με διαμόρφωση εύρους. Η αποδιαμόρφωση μπορεί να χρησιμοποιήσει τα ίδια δομικά στοιχεία σε συνδυασμό με κατάλληλα φίλτρα. Για να είναι επιτυχής η λειτουργία των συστημάτων αυτών θα πρέπει τα μη γραμμικά συστήματα να έχουν ακριβώς τις ίδιες μη γραμμικότητες.

8.4.2 Διαμόρφωση AM (DSB/LC: Double Sideband Large Carrier)

Η διαμόρφωση DSB/SC απαιτεί στο δέκτη κυκλώματα τα οποία πρέπει να έχουν απόλυτο συγχρονισμό με τον πομπό και γι' αυτό εί-

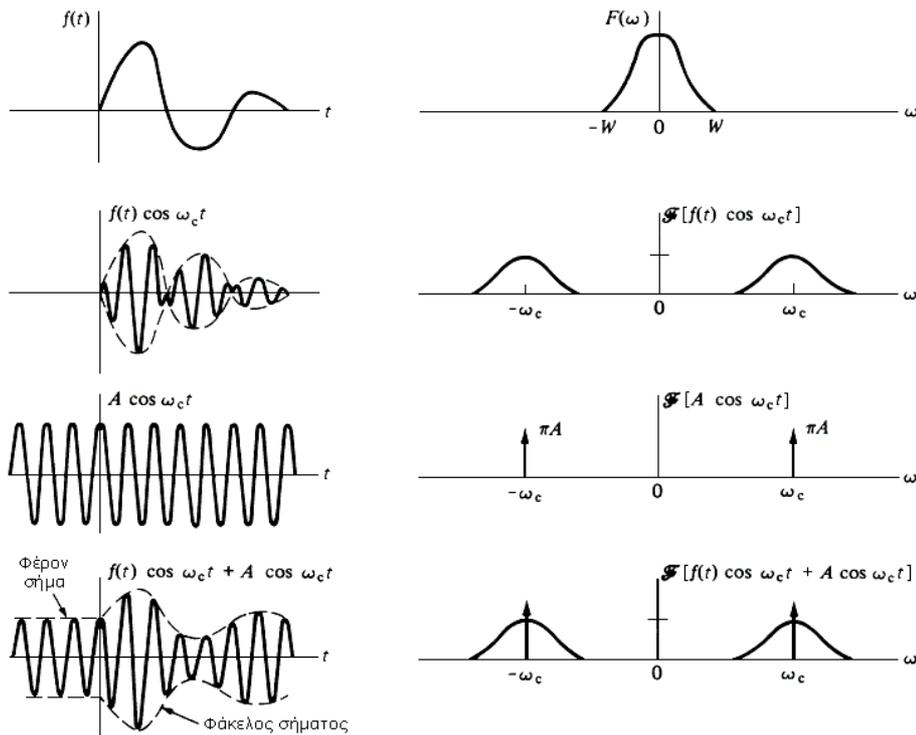
ναι πολύ ακριβά. Σε εφαρμογές όπως η χρήση ραδιοφώνου από το ευρύ κοινό, απαιτείται να υπάρχει τρόπος αποδιαμόρφωσης που να μην απαιτεί περίπλοκες μεθόδους. Μια τέτοια μορφή διαμόρφωσης είναι η διαμόρφωση διπλής πλευρικής ζώνης μεγάλου φέροντος (DSB/LC: Double Sideband Large Carrier. Η διαμόρφωση αυτή είναι ευρέως γνωστή σαν διαμόρφωση AM (από το Amplitude Modulation - αν και με τον όρο αυτό αποδίδονται συχνά και όλοι οι τύποι διαμόρφωσης εύρους). Στη διαμόρφωση AM προσθέτουμε στο διαμορφωμένο κύμα και το φέρον κύμα, καθιστώντας έτσι ευκολότερη την αποδιαμόρφωση (οδηγούμενοι τις περισσότερες φορές σε αποδιαμόρφωση με τη μέθοδο της περιβάλλουσας).

Στο Σχήμα 8.13 φαίνεται η βασική λειτουργία ενός συστήματος διαμόρφωσης AM.



Σχήμα 8.13: Διαμόρφωση AM.

Στο Σχήμα 8.14 φαίνονται τα σήματα στο επίπεδο του χρόνου και της συχνότητας. Στο πεδίο του χρόνου βλέπουμε ότι το διαμορφωμένο σήμα έχει σαν περιβάλλουσα το αρχικό σήμα πληροφορίας. Στο δε πεδίο της συχνότητας βλέπουμε την ύπαρξη των δύο δ στο ω_c και $-\omega_c$ που υποδηλώνουν την ύπαρξη του φέροντος κύματος, δηλαδή του συνημιτόνου.



Σχήμα 8.14: Σήματα AM στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο των συχνοτήτων.

Αναλυτικά έχουμε

$$\phi_{AM}(t) = f(t) \cos \omega_c t + B \cos \omega_c t = (f(t) + B) \cos \omega_c t$$

$$\begin{aligned} \Phi_{AM}(\omega) &= F\{\phi_{AM}(t)\} \\ &= \frac{1}{2}F(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \frac{B\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_c) - \delta(\omega - \omega_c)] \end{aligned}$$

Η μέγιστη τιμή του σήματος δίνεται στο $\max f(t)$ και είναι ίση με $\max |f(t)| + B$ και η μικρότερη τιμή της περιβάλλουσας είναι ίση με $\min(f(t) + B)$. Οι τιμές αυτές είναι σημαντικές γιατί αν η μικρότερη τιμή είναι θετική τότε η περιβάλλουσα είναι το αρχικό σήμα πληροφορίας, ενώ σε αντίθετη περίπτωση αυτό δεν είναι σωστό και δεν μπορούμε να κάνουμε αποδιαμόρφωση με τη μέθοδο της περιβάλλουσας.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη λειτουργία και τις ιδιότητες της διαμόρφωσης AM θα χρησιμοποιήσουμε σαν σήμα πληροφορίας έναν απλό τόνο, δηλ. $f(t) \approx \cos \omega_m t$. Τότε το διαμορφωμένο κύμα συνηθίζεται να περιγράφεται ως εξής :

$$\phi_{AM}(t) = A(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$

όπου m είναι ο συντελεστής διαμόρφωσης.

Μπορούμε να αναλύσουμε περαιτέρω το σήμα αυτό ως εξής:

$$\begin{aligned} \phi_{AM}(t) &= A \cos \omega_c t + Am \cos \omega_c t \cos \omega_m t = \\ &= A \cos \omega_c t + \frac{Am}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t + \frac{Am}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t \end{aligned}$$

Στο πεδίο της συχνότητας

$$\begin{aligned} \Phi_{AM}(\omega) &= \frac{A\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_c)] + \\ &+ \frac{Am}{2} \pi [\delta(\omega - (\omega_c + \omega_m)) + \delta(\omega + \omega_c + \omega_m)] \end{aligned}$$

Η μέγιστη τιμή του σήματος είναι $A(1 + m)$ και η ελάχιστη θετική $A(1 - m)$.

Ο λόγος $\frac{\text{μέγιστη} - \text{ελάχιστη}}{\text{μέγιστη} + \text{ελάχιστη}} = \frac{A(1+m) - A(1-m)}{A(1+m) + A(1-m)} = m$ μας δίνει τον συντελεστή διαμόρφωσης.

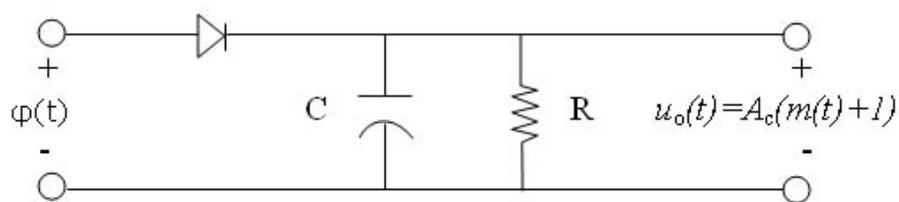
Ένας γενικότερος ορισμός του συντελεστή διαμόρφωσης είναι ο ακόλουθος

$$m = \frac{\text{μέγιστη τιμή του όρου DSB/SC}}{\text{μέγιστη τιμή του φέροντος κύματος}}$$

Εάν ο συντελεστής έχει τιμές μεταξύ του 0 και του 1 ή μεταξύ 0-100%, τότε η περιβάλλουσα περιγράφει το σήμα πληροφορίας. Στην περίπτωση που $m \geq 100\%$ έχουμε υπερδιαμόρφωση και δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της περιβάλλουσας για την αποδιαμόρφωση.

Αποδιαμόρφωση με τη μέθοδο της περιβάλλουσας

Για να γίνει αποδιαμόρφωση με τη μέθοδο της περιβάλλουσας αρκεί να έχουμε ένα σύστημα που αποθηκεύει την τιμή του σήματος και δεν τη χάνει για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα μέχρι να έλθει η επόμενη μέγιστη τιμή. Ένας πυκνωτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διαδικασία αυτή όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.15. Κατάλληλη επιλογή του γινομένου RC μας δίνει το αρχικό σήμα πληροφορίας. Λανθασμένη επιλογή οδηγεί σε πολύ θόρυβο.



Σχήμα 8.15: Απλός Αποδιαμορφωτής AM.

Ισχύς Συστημάτων AM

Τα συστήματα AM μας επιτρέπουν εύκολη αποδιαμόρφωση, αλλά απαιτούν την μεταφορά του φέροντος κύματος με αποτέλεσμα να απαιτείται υψηλότερη ισχύς σε σχέση με το DSB/SC.

Θυμηθείτε ότι:

$$\phi_{AM}(t) = A \cos \omega_c t + \frac{Am}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t + \frac{Am}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t$$

Η ισχύς του φέροντος: $P_c = \frac{A^2}{2}$

Η ισχύς των πλευρικών ζωνών (sidebands):

$$P_s = \frac{(Am/2)^2}{2} + \frac{(Am/2)^2}{2} = \frac{A^2m^2}{4}$$

Η ολική ισχύς:

$$P_t = P_c + P_s = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2m^2}{4} = \frac{A^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = \frac{A^2}{2} \frac{2 + m^2}{2}$$

Η αποδοτικότητα του συστήματος:

$$\mu = \frac{P_s}{P_t} = \frac{\frac{A^2m^2}{4}}{\frac{A^2}{2} \frac{2+m^2}{2}} = \frac{m^2}{m^2 + 2}$$

Η τιμή του μ στη ζώνη $0 \leq m \leq 1$ γίνεται μέγιστη όταν $m = 1$, οπότε $\mu = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = 33\%$

Δηλαδή μόνο το 33% της εκπεμπόμενης ισχύος καταναλώνεται στις πλευρικές ζώνες που μεταφέρουν την πληροφορία, ενώ το υπόλοιπο 67% απαιτείται για το φέρον κύμα.

Παράδειγμα: Ένα σύστημα διαμόρφωσης AM έχει συντελεστή διαμόρφωσης 20%. Να βρεθεί η απόδοση του συστήματος.

Απάντηση:

$$\mu = \frac{m^2}{2 + m^2} = \frac{(0.2)^2}{2 + (0.2)^2} = \frac{0.04}{2.04} \approx 2\%$$

δηλαδή ένα πολύ μικρό μέρος της ισχύος διατίθεται για την μετάδοση της πληροφορίας.

Ορθογώνια Διαμόρφωση Εύρους (Quadrature Amplitude Modulation ή Quadrature Carrier Multiplexing)

Ένα σύστημα που χρησιμοποιεί την ορθογώνια διαμόρφωση εύρους επιτρέπει σε δύο σήματα πληροφορίας να καταλαμβάνουν το ίδιο εύρος ζώνης κατά τη μετάδοσή τους και βεβαίως την ανεξάρτητη λήψη

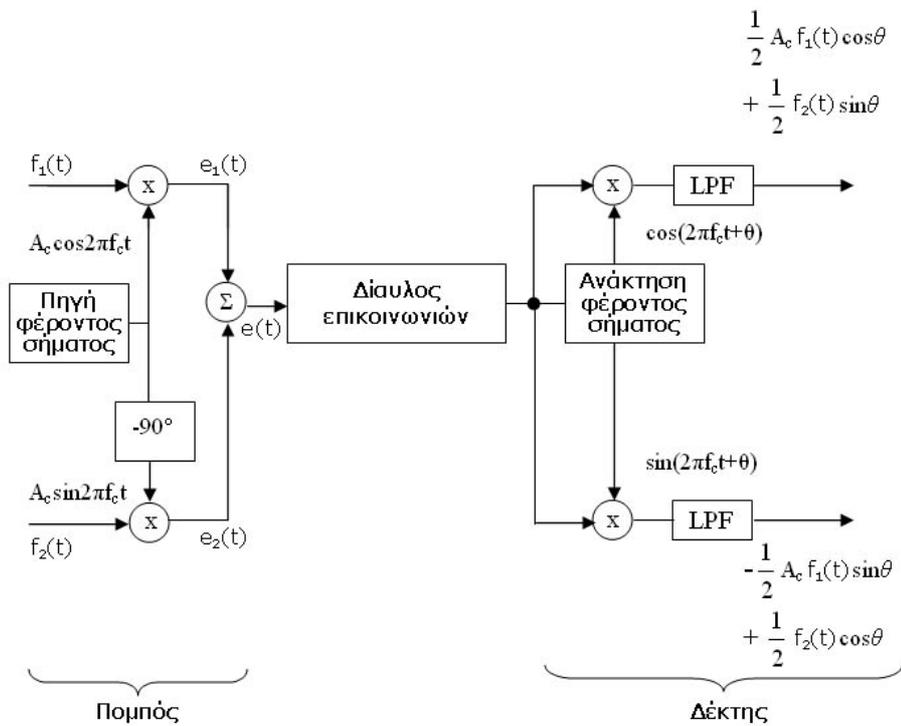
τους από τον δέκτη. Χρησιμοποιούμε έτσι το ίδιο εύρος ζώνης για να στείλουμε δύο σήματα.

Το Σχήμα 8.16 δείχνει τη διαδικασία που ακολουθείται στο διαμορφωτή και στον αποδιαμορφωτή.

$$e_1(t) = f_1(t) \cos \omega_c t$$

$$e_2(t) = f_2(t) \sin \omega_c t$$

$$e(t) = f_1(t) \cos \omega_c t + f_2(t) \sin \omega_c t$$



Σχήμα 8.16: Ορθογώνια Διαμόρφωση Εύρους.

Στον πάνω κλάδο του αποδιαμορφωτή έχουμε μετά τον πολλαπλασιασμό με το κύμα φέροντος:

$$\begin{aligned}
 & (f_1(t) \cos \omega_c t + f_2(t) \sin \omega_c t) \cdot \cos \omega_c t = \\
 & f_1(t) \cos^2 \omega_c t + f_2(t) \sin \omega_c t \cdot \cos \omega_c t = \\
 & \frac{1}{2} f_1(t) + \frac{1}{2} f_1(t) \cos 2\omega_c t + \frac{1}{2} f_2(t) \sin 2\omega_c t
 \end{aligned}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι είναι γύρω από τη συχνότητα $2\omega_c$ και έτσι μπορούν να απαλειφθούν με ένα βαθυπερατό φίλτρο το οποίο στην έξοδο του θα μας δώσει $f_1(t)$. Αντίστοιχα ο κάτω κλάδος θα μας δώσει το $f_2(t)$.

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι στο σύστημα αυτό είναι απαραίτητος ο άριστος συγχρονισμός γιατί μικρές αλλαγές στη φάση ή στη συχνότητα έχουν σαν αποτέλεσμα να εμφανίζεται μέρος του $f_2(t)$ στον πάνω κλάδο και μέρος του $f_1(t)$ στον κάτω κλάδο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.16.

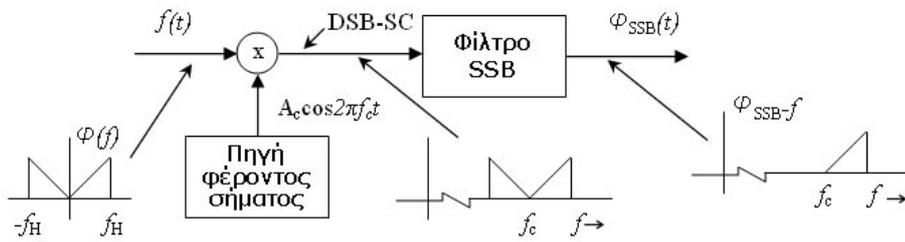
8.4.3 Διαμόρφωση εύρους με μονή πλευρική ζώνη (SSB: Single Sideband)

Οι διαμορφώσεις DSB απαιτούν διπλό εύρος ζώνης από το ελάχιστο απαιτούμενο. Είναι δυνατόν σε περιπτώσεις που το εύρος ζώνης είναι δύσκολο να μας δοθεί να χρησιμοποιήσουμε διαμορφώσεις που απαιτούν εύρος ζώνης λιγότερο από το διπλό.

Στην διαμόρφωση εύρους με μονή πλευρική ζώνη (SSB - Single Sideband) πετυχαίνουμε το ελάχιστο δυνατό εύρος ζώνης. Η βασική αρχή πίσω από τη λειτουργία του συστήματος SSB είναι ότι μπορούμε να στείλουμε μόνο την πάνω πλευρική ζώνη ή μόνο την κάτω πλευρική ζώνη και να έχουμε πλήρη αποκατάσταση του αρχικού σήματος στον δέκτη.

Ένα απλό διάγραμμα που περιγράφει τη λειτουργία ενός τέτοιου συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 8.17.

Να παρατηρήσουμε ότι η χρήση του φίλτρου SSB πρέπει να γίνεται προσεκτικά ιδιαίτερα όταν το σήμα έχει χαμηλές συχνότητες. Έτσι η



Σχήμα 8.17: Διαμόρφωση SSB.

μέθοδος συνιστάται όταν δεν απαιτείται απόκριση σε χαμηλές συχνότητες. Η διαδικασία της διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης γίνεται όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις με κατάλληλη επιλογή των φίλτρων. Να τονίσουμε ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να λειτουργήσει στη μορφή SC και στη μορφή LC. Επίσης ότι είναι πολύ ευαίσθητη στα σφάλματα φάσης ή συχνότητας.

Ένας άλλος τρόπος να μελετήσουμε την διαμόρφωση SSB είναι χρησιμοποιώντας έναν απλό τόνο, π.χ. το $f(t) = A \cos \omega_m t$, τότε:

$$\begin{aligned} \phi_{DSB/SC}(t) &= A \cos \omega_m t \cdot \cos \omega_c t \\ &= A/2 \cos(\omega_c - \omega_m)t + A/2 \cos(\omega_c + \omega_m)t \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι η πάνω πλευρική ζώνη (USB) και ο δεύτερος όρος η κάτω πλευρική ζώνη (LSB). Οι όροι αυτοί είναι γνωστοί και σαν SSB_+ και SSB_- αντίστοιχα. Ας δούμε τον ένα από αυτούς τους αναλυτικότερα:

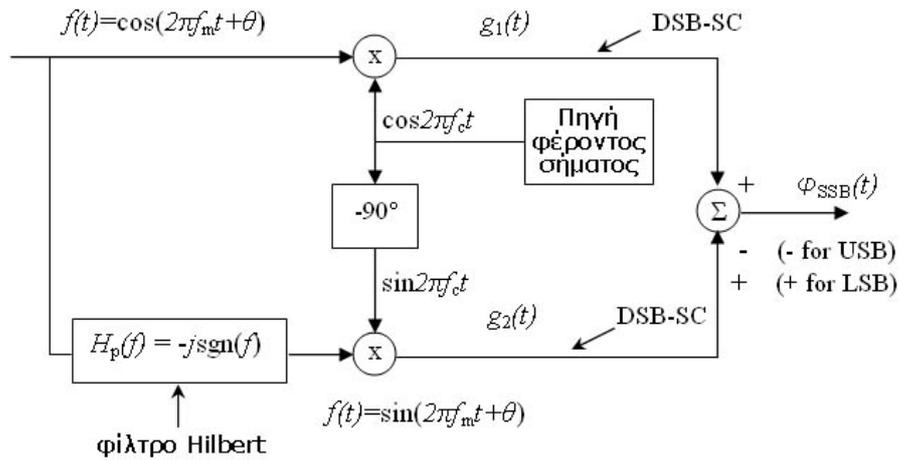
$$\begin{aligned} \phi_{SSB+/SC}(t) &= \phi_{USB/SC}(t) = A \cos(\omega_c - \omega_m)t \\ &= A/2 \cos \omega_c t \cos \omega_m t + A/2 \sin \omega_c t \sin \omega_m t. \end{aligned}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε την σχέση αυτή για ένα σήμα $f(t)$ ως εξής:

$$\phi_{SSB+/SC}(t) = A f(t) \cos \omega_c t + A \hat{f}(t) \sin \omega_c t$$

όπου $\hat{f}(t)$ είναι ένα σήμα σε διαφορά φάσης $\pi/2$ από το αρχικό σήμα. Η μελέτη τέτοιων σημάτων γίνεται με μετασχηματισμούς Hilbert και είναι έξω από το αντικείμενο μελέτης του βιβλίου αυτού.

Στο Σχήμα 8.18 φαίνεται ένας τρόπος παραγωγής /διαμόρφωσης SSB+/SC χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία που περιγράφηκε παραπάνω.



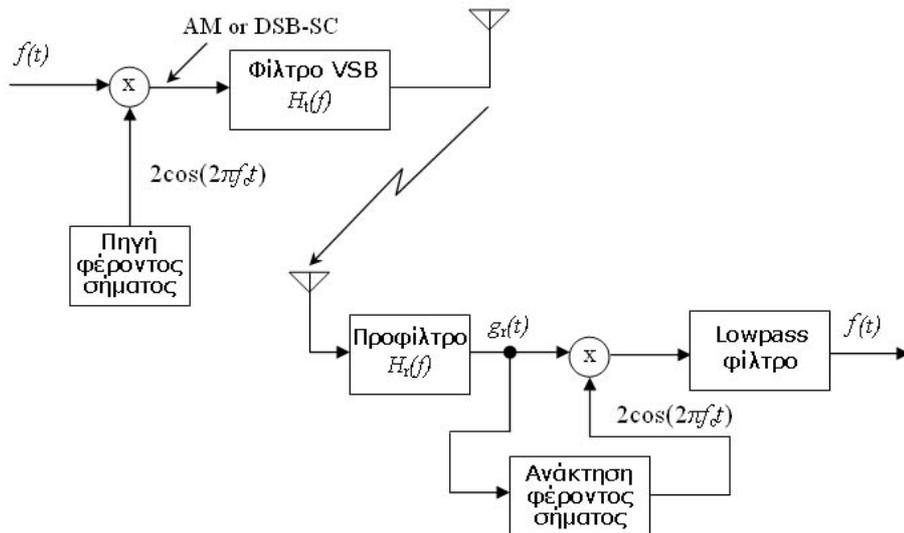
Σχήμα 8.18: Σύστημα διαμόρφωσης SSB.

8.4.4 Διαμόρφωση VSB (Vestigial SideBand)

Υπάρχουν εφαρμογές που δεν είναι δυνατή η κατασκευή φίλτρων με τις ιδιότητες που απαιτεί η διαμόρφωση SSB ή που θέλουμε μικρότερο εύρος ζώνης από τη διαμόρφωση DSB αλλά θέλουμε και καλή απόκριση στις χαμηλές συχνότητες. Στην περίπτωση αυτή, που π.χ. χρησιμοποιούμε στην εικόνα της τηλεόρασης, επιτρέπουμε να αποστέλλεται και ένα μέρος της άλλης πλευρικής ζώνης, προσέχοντας ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή του σήματος στον δέκτη. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται φίλτρα τα οποία έχουν αντισυμμετρική ιδιότητα ως προς το ω_c . Δηλαδή η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου έχει την ιδιότητα:

$$\Phi_{VSB}(\omega_c + \omega) - \Phi_{VSB}(\omega_c) = \Phi_{VSB}(\omega_c) - \Phi_{VSB}(\omega_c - \omega).$$

Η διαδικασία διαμόρφωσης / αποδιαμόρφωσης για διαμόρφωση VSB φαίνονται στο Σχήμα 8.19.



Σχήμα 8.19: Τυπικό σύστημα επικοινωνίας VSB.

8.5 Διαμόρφωση Γωνίας

Για να προσδιορίσουμε καλύτερα τους τρόπους με τους οποίους συναντάμε τη μορφή αυτής της διαμόρφωσης, είναι απαραίτητο να ορίσουμε τη στιγμιαία συχνότητα ω_i (χρησιμοποιούμε τον όρο συχνότητα για το ω και το f , $\omega = 2\pi f$, όπου είναι αναγκαίο θα γίνει η απαραίτητη διαφοροποίηση). Η στιγμιαία συχνότητα ω_i ενός σήματος της μορφής $A \cos \theta(t)$ ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

και ισοδύναμα

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_i(\tau) d\tau + \theta(0)$$

(θα θεωρήσουμε χωρίς να χάσουμε τη γενικότητα ότι $\theta(0) = 0$).

Εάν διαμορφώσουμε τη συχνότητα ανάλογα με το σήμα πληροφορίας $f(t)$:

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f f(t),$$

όπου k_f είναι μια σταθερά διαμόρφωσης χαρακτηριστική του συστήματος διαμόρφωσης. Μπορούμε τότε να πάρουμε

$$\theta(t) = \int_0^t \omega_i(\tau) d\tau = \omega_c t + k_f \int_0^t f(\tau) d\tau$$

8.5.1 Διαμόρφωση Συχνότητας (FM: Frequency Modulation)

Το διαμορφωμένο σήμα με διαμόρφωση συχνότητας (FM: Frequency Modulation) είναι τότε:

$$\phi_{\text{FM}}(t) = A \cos(\omega_c t + k_f \int_0^t f(\tau) d\tau),$$

όπου ω_c είναι η συχνότητα φέροντος.

Παράδειγμα: Έστω $f(t) = \alpha \cos \omega_m t$ τότε

$$\begin{aligned}\omega_i(t) &= \omega_c + k_f \alpha \cos \omega_m t \\ \theta(t) &= \omega_c t + \frac{\alpha k_f}{\omega_m} \sin \omega_m t \\ \phi_{\text{FM}}(t) &= A \cos\left(\omega_c t + \frac{\alpha k_f}{\omega_m} \sin \omega_m t\right).\end{aligned}$$

Ο λόγος $\frac{\alpha k_f}{\omega_m} = \beta$ ονομάζεται ενδείκτης ή συντελεστής διαμόρφωσης και επηρεάζει το εύρος ζώνης του σήματος. Παρατηρούμε ότι η σταθερά αυτή εξαρτάται από το εύρος (πλάτος) του σήματος πληροφορίας και από το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας.

8.5.2 Διαμόρφωση Φάσης (PM: Phase Modulation)

Στη διαμόρφωση φάσης (PM: Phase Modulation), η φάση του φέροντος μεταβάλλεται σύμφωνα με το σήμα πληροφορίας

$$\theta(t) = \omega_c t + k_p f(t),$$

όπου k_p μια σταθερά διαμόρφωσης που εξαρτάται από το διαμορφωτή. Η στιγμιαία συχνότητα $\omega_i(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_p \frac{df(t)}{dt}.$$

Το σήμα PM δίνεται από τη σχέση:

$$\phi_{\text{PM}}(t) = A \cos(\omega_c t + k_p f(t)).$$

Παράδειγμα: Έστω $f(t) = \alpha \cos \omega_m t$ τότε

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \omega_c t + k_p \alpha \cos \omega_m t \\ \omega_i(t) &= \omega_c - \alpha k_p \omega_m \sin \omega_m t \\ \phi_{\text{PM}}(t) &= A \cos(\omega_c t + \alpha k_p \cos \omega_m t).\end{aligned}$$

Ο όρος $\beta = \alpha k_p$ αποτελεί τον ενδείκτη ή συντελεστή διαμόρφωσης στο σύστημα αυτό.

8.5.3 Διαμόρφωση FM στενής ζώνης (NBFM: Narrow Band FM)

Εάν θεωρήσουμε ότι $f(t) = a \cos \omega_m t$, τότε

$$\phi(t)_{FM} = A \cos(\omega_c t + \frac{ak_f}{\omega_m} \sin \omega_m t).$$

Αν θέσουμε $\beta = \frac{ak_f}{\omega_m}$, τότε:

$$\phi_{FM} = A \cos \omega_c t \cos \beta \sin \omega_m t - A \sin \omega_c t \sin \beta \sin \omega_m t.$$

Εάν η γωνία $\beta \sin \omega_m t \ll 1$ τότε, $\cos \beta \sin \omega_m t \approx 1$ και $\sin \beta \sin \omega_m t \approx \beta \sin \omega_m t$. Τότε έχουμε

$$\phi_{NBFM}(t) = A \cos \omega_c t - A \beta \sin \omega_c t \sin \omega_m t.$$

Το σήμα λέγεται Narrowband FM ή FM στενής ζώνης.

Αν το αναλύσουμε περαιτέρω έχουμε:

$$\phi_{NBFM}(t) = A \cos \omega_c t - \frac{A\beta}{2} \cos(\omega_c + \omega_m)t - \frac{A\beta}{2} \cos(\omega_c - \omega_m)t.$$

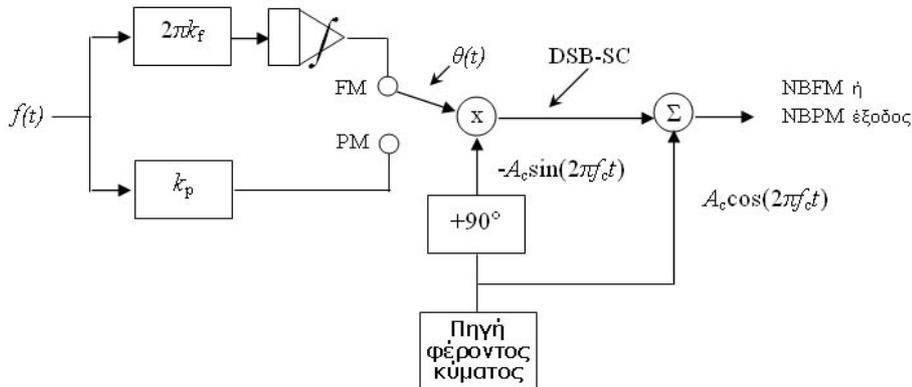
Δηλαδή το φάσμα έχει εύρος ζώνης $2\omega_m$.

Από την παραπάνω σχέση για το σήμα NBFM, προκύπτει και ο τρόπος διαμόρφωσής του. Η διαμόρφωση φαίνεται στο Σχήμα 8.20. Για την κατασκευή του σήματος ακολουθούνται διαδικασίες παρόμοιες με αυτές της διαμόρφωσης AM. Για να μπορούμε να έχουμε την ανωτέρω προσέγγιση πρέπει το β να είναι μικρό, θεωρητικά μικρότερο του 0.2 στην πράξη δε μικρότερο του 0.5.

8.5.4 Διαμόρφωση FM ευρείας ζώνης

Εάν το $\beta > 0.2$ η προσέγγιση της προηγούμενης ενότητας δεν ισχύει. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως ακολούθως.

$$\phi_{FM} = A \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t) = \text{Re}\{Ae^{i(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)}\}.$$



Σχήμα 8.20: Διαμόρφωση NBFM.

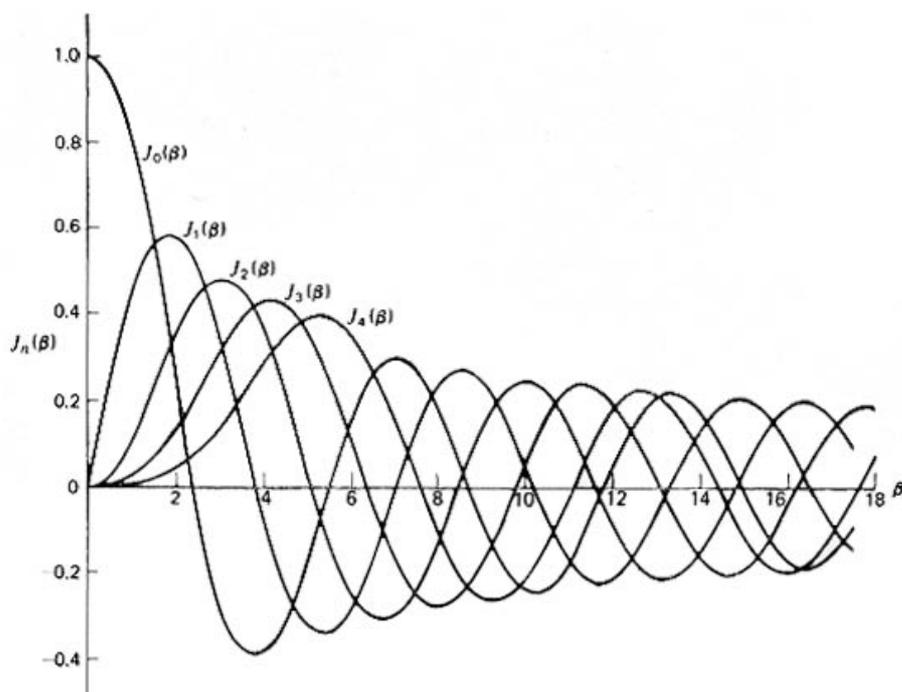
Το σήμα $e^{i\beta \sin \omega_m t}$ είναι περιοδικό με συχνότητα ω_m , άρα μπορεί να αναλυθεί σε μια σειρά Fourier με συντελεστές F_n , οι οποίοι αποδεικνύεται ότι αποτελούν όρους της γνωστής συνάρτησης Bessel. Δηλαδή $F_n = J_n(\beta)$, όπου τα $J_n(\beta)$ μπορούν να υπολογιστούν από διαγράμματα (όπως του Σχήματος 8.21 ή πίνακες και εξαρτώνται μόνο από την τιμή του n και την τιμή του β).

Το σήμα FM μπορεί τότε να γραφεί σαν:

$$\begin{aligned}
 \phi_{FM} &= \operatorname{Re} \left\{ A e^{i\omega_c t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\beta \sin \omega_m t} \right\} \\
 &= \left\{ J_0(\beta) \cos(\omega_c t) \right. \\
 &\quad + J_1(\beta) \cos(\omega_c + \omega_m)t + J_{-1}(\beta) \cos(\omega_c - \omega_m)t + \\
 &\quad + J_2(\beta) \cos(\omega_c + 2\omega_m)t + J_{-2}(\beta) \cos(\omega_c - 2\omega_m)t + \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις Bessel έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Οι $J_n(\beta)$ είναι πραγματικές
2. Οι $J_n(\beta)$ είναι άρτιες για άρτιο n

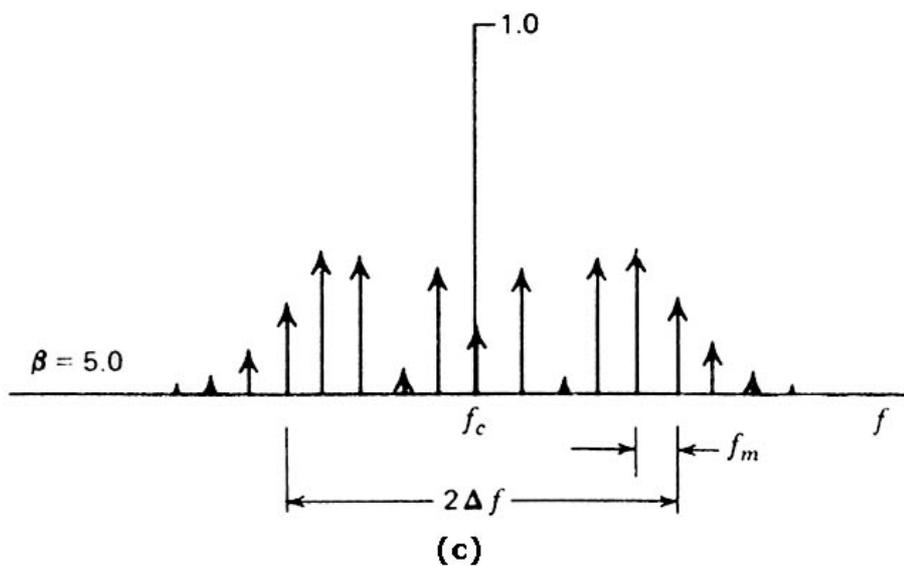
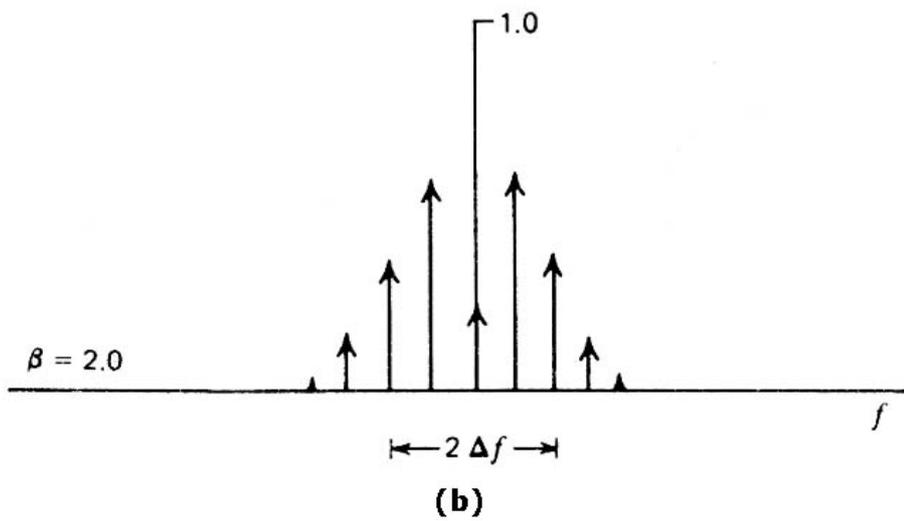
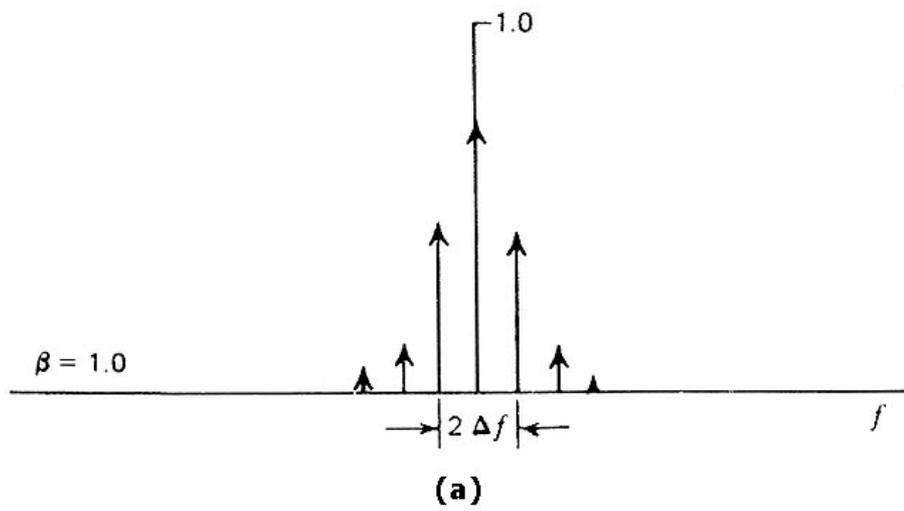


Σχήμα 8.21: Γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Bessel $J_n(\beta)$.

3. Οι $J_n(\beta)$ είναι περιττές για περιττό n

$$4. \sum_{n=-\infty}^{\infty} = 1.$$

Με βάση τα παραπάνω ένα σήμα FM έχει μία σειρά από συχνότητες οι οποίες έχουν ένταση που εξαρτάται από την τιμή των $J_n(\beta)$. Θεωρητικά καλύπτουν ένα εύρος ζώνης ίσο με το άπειρο (βλέπε Σχήμα 8.22). Στην πράξη αποδεχόμαστε αρμονικές που έχουν $|J_n(\beta)| \geq 0,01$ δίνοντάς μας ένα εύρος ζώνης $BW_{FM} = 2n\omega_m$. Το εύρος ζώνης αυτό μπορεί να προσεγγιστεί από τον τύπο του Carson σαν $BW = 2\omega_m(\beta + 1)$. Εάν η τιμή του β είναι μεγάλη τότε $BW = 2\Delta\omega$. Έτσι έχουμε στα δύο άκρα το NBFM με εύρος ζώνης $2\omega_m$ και το μέγιστο β με $2\Delta\omega$, ενώ στο ενδιάμεσο το εύρος ζώνης εξαρτάται και από το ω_m , την συχνότητα πληροφορίας, και από το και από το $\Delta\omega$, δηλαδή τον τρόπο διαμόρφωσης.



Σχήμα 8.22: Εύρος ζώνης σε ένα σύστημα WBFM.

Ισχύς σήματος FM

Η ισχύς ενός σήματος FM δίνεται από τη σχέση:

$$P_{FM} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(AJ_n(\beta))^2}{2} = \frac{A^2}{2}.$$

8.5.5 Διαμόρφωση σήματος WBFM

Για να διαμορφώσουμε ένα σήμα WBFM μπορούμε να ξεκινήσουμε από ένα σήμα NBFM και να αυξήσουμε το β (έμμεση μέθοδος) ή να κάνουμε διαμόρφωση απ' ευθείας (άμεση μέθοδος).

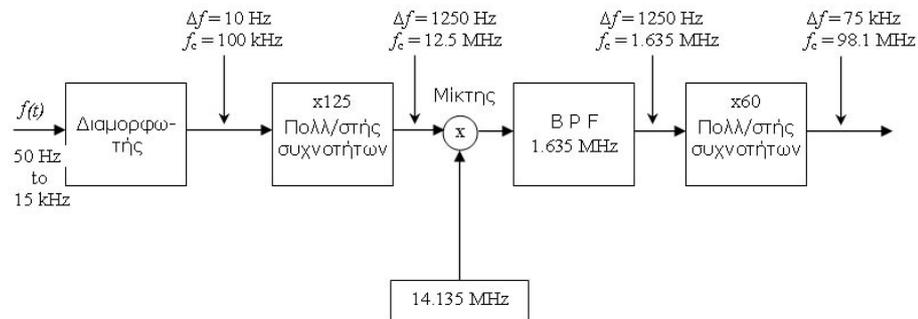
Έμμεση μέθοδος

Στην έμμεση μέθοδο χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι εάν ένα σήμα περάσει μέσα από ένα μη γραμμικό σύστημα τότε οι μη γραμμικότητες πολλαπλασιάζουν το συντελεστή διαμόρφωσης. Έτσι μπορούμε να ξεκινήσουμε με ένα σύστημα NBFM και να φτάσουμε σε ένα σύστημα WBFM. Σαν παράδειγμα παίρνουμε ένα σύστημα που τετραγωνίζει το σήμα εισόδου. Τότε στην έξοδο έχουμε:

$$U_{out} == A^2 \cos 2(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t) = A^2/2 + \cos(2\omega_c t + 2\beta \sin \omega_m t),$$

δηλαδή έχουμε ένα σήμα FM στην διπλή συχνότητα φέροντος από το αρχικό και με συντελεστή διαμόρφωσης $\beta' = 2\beta$. (Ο όρος $A^2/2$ είναι συνεχές ρεύμα και μπορεί να φύγει μ' ένα ζωνοπερατό φίλτρο). Έτσι τοποθετώντας ένα σύστημα τετραγωνισμού (ή άλλης μη γραμμικότητας) και ένα ζωνοπερατό φίλτρο έχουμε ένα σύστημα διπλασιασμού συχνότητας, γνωστό σαν πολλαπλασιαστής. Να προσέξουμε τη διαφορά του συστήματος αυτού και του μίχτη ή διαμορφωτή, ο οποίος πολλαπλασιάζει με το συνημιτονοειδές κύμα. Στον πολλαπλασιαστή αλλάζουμε και όχι μόνο μετατοπίζουμε το φάσμα. Ένα σύστημα παραγωγής σήματος FM με έμμεσο τρόπο, γνωστό και ως διαμορφωτής Armstrong, φαίνεται στο Σχήμα 8.23. Αποτελείται από σειρά πολλαπλασιαστών συχνότητας και μιχτών ώστε το τελικό σήμα να έχει το επιθυμητό συντελεστή διαμόρφωσης και την επιθυμητή συχνότητα φέροντος. Η επιλογή των φίλτρων και των συστημάτων

εξαρτάται από τις συχνότητες λειτουργίας που απαιτούνται και από τα διαθέσιμα υλικά.



Σχήμα 8.23: Έμμεση Διαμόρφωση FM, Μέθοδος Armstrong.

Παράδειγμα:

Στο Σχήμα 8.23 φαίνεται ένας διαμορφωτής Armstrong που χρησιμοποιείται συνήθως σε εμπορικούς πομπούς FM. Το αρχικό ακουστικό μήνυμα είναι στη ζώνη συχνοτήτων 50Hz μέχρι 15 Hz και αρχικά διαμορφώνεται σε ένα σήμα NBFM με συχνότητα φέροντος 100 KHz και $\beta = 0.2$. $\Delta f = \beta f_m = 10 Hz$.

Οι εμπορικοί πομποί FM έχουν $\Delta f = 75 KHz$ απαιτείται δηλαδή ένας πολλαπλασιασμός με το 7.500. Εάν ο πολλαπλασιασμός αυτός γινόταν σε ένα στάδιο θα μας έδινε μια συχνότητα φέροντος 750 MHz. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε μίχτες σε πολλά σημεία του συστήματος. Στο Σχήμα 8.23 φαίνεται να γίνεται η διαδικασία σε δύο στάδια. Πολλαπλασιασμός πρώτα με το 125 και μετά με το 60 (125X60=7500).

Αν παρακολουθήσουμε το σύστημα θα δούμε ότι: Ο διαμορφωτής FM έχει $f_c = 100 KHz$ και $\Delta f = 10 Hz$. Μετά τον πολλαπλασιασμό X125

$$f_c = 125 \times 100 KHz = 12.5 MHz$$

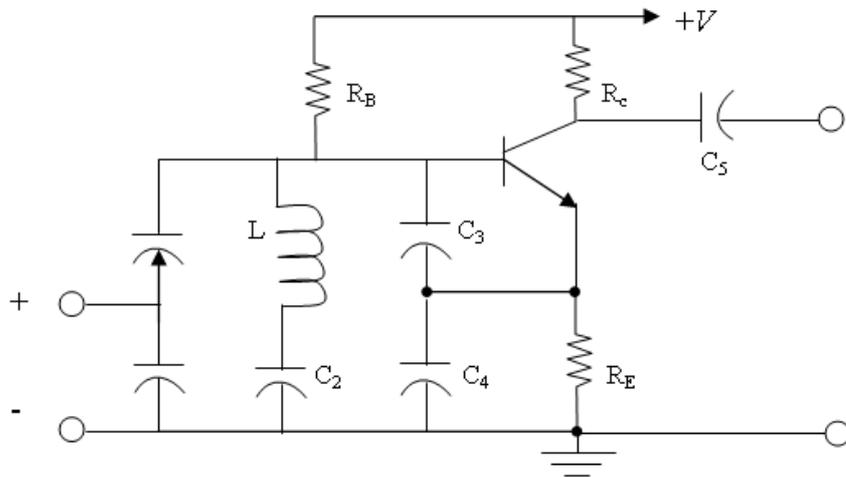
$$\Delta f = 125 \times 10 Hz = 1250 Hz.$$

$$\text{Το εύρος ζώνης του σήματος είναι } BW = f_m + 2\Delta f = 2.500 Hz.$$

Με την μίξη και το ζωνοπερατό φίλτρο το σήμα που περνάει έχει κέντρο τη συχνότητα $f_c = 1.635MHz$ και $\Delta f = 1250Hz$. Ο πολλαπλασιασμός μας δίνει $f_c = 60 \times 1.635 = 98,1MHz$ και $\Delta f = 1.250 \times 60 = 75KHz$ ένα σήμα στις συχνότητες και στο Δf των FM.

Έμμεσος τρόπος διαμόρφωσης FM

Για να κατασκευάσουμε ένα διαμορφωτή FM με άμεσο τρόπο απαιτείται η ύπαρξη συστημάτων που δέχονται σαν είσοδο ένα σήμα μιας ορισμένης συχνότητας και μας δίνουν στην έξοδο ένα σήμα που έχει συχνότητα ανάλογη της συχνότητας αυτής. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούμε συστήματα τα οποία έχουν χωρητικότητες που η τιμή τους αλλάζει ανάλογα με την τάση στα άκρα τους. Παρατηρώντας την συχνότητα συντονισμού σε κυκλώματα με τέτοιους πυκνωτές μπορούμε να πάρουμε συχνότητα που είναι ανάλογη της τάσης εισόδου. Ένα τέτοιο κύκλωμα φαίνεται στο Σχήμα 8.24.



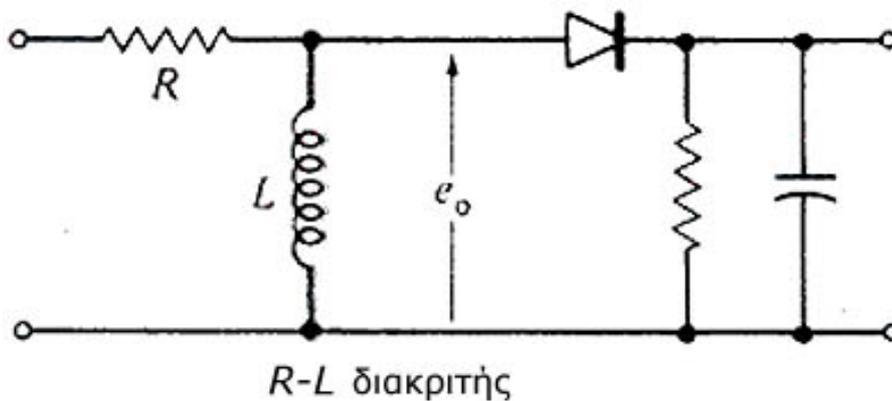
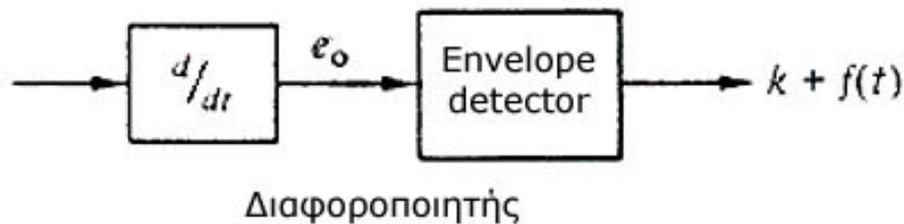
Σχήμα 8.24: Άμεσος τρόπος διαμόρφωσης FM.

8.5.6 Αποδιαμόρφωση σημάτων FM

Η αποδιαμόρφωση σημάτων FM στηρίζεται στην ιδιότητα της παραγώγου του μετασχηματισμού Fourier. Θυμηθείτε ότι

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = i\omega F(\omega)$$

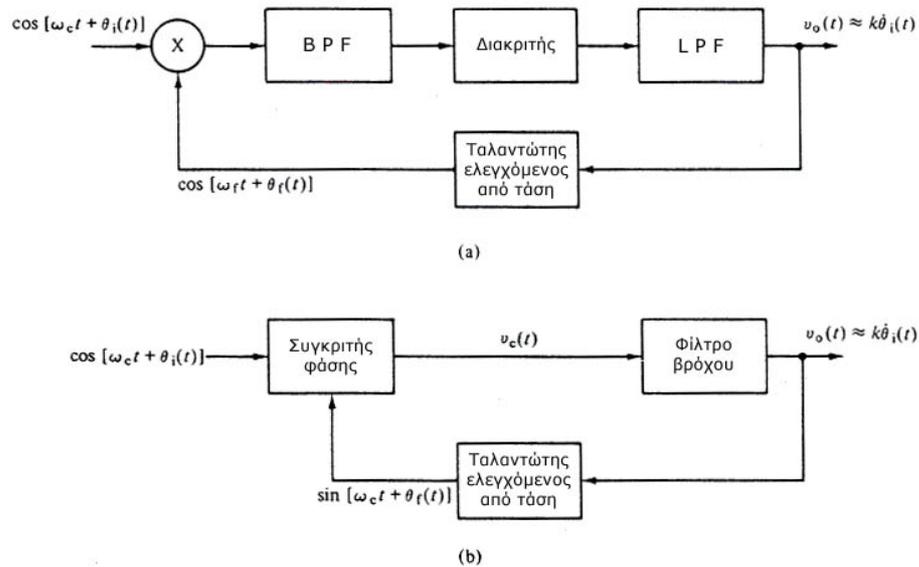
δηλαδή εάν παραγωγίσουμε ένα σήμα, έχουμε πάρει όρους πολλαπλάσιους της συχνότητας. Η ιδιότητα αυτή εφαρμόζεται σε αποδιαμορφωτές όπως αυτός του Σχήματος 8.25.



Σχήμα 8.25: Αποδιαμόρφωση σημάτων FM.

Άλλοι τρόποι περιλαμβάνουν τη χρήση των PLL (Phase Locked Loops) όπου ένα σύστημα VCO (Voltage Control Output) χρησι-

μποιείται στο βρόχο ανάδρασης ενός συστήματος που περιλαμβάνει ένα συγκριτή, ένα ανιχνευτή φάσης και ένα φίλτρο όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.26. Όπως είδαμε στην αρχή τα συστήματα FM και PM έχουν παρόμοιες ιδιότητες και έτσι εύκολα μπορούμε να πάμε από το ένα στο άλλο.



Σχήμα 8.26: Αποδιαμόρφωση σημάτων FM με τη χρήση PLL.

8.6 Διαμόρφωση Εύρους Παλμών

Η διαμόρφωση εύρους παλμών (Pulse Amplitude Modulation) αποτελεί έναν από τους δημοφιλέστερους τρόπους διαμόρφωσης με χρήση παλμών. Η βασική ιδέα πίσω από τη διαμόρφωση PAM είναι η δυνατότητα που μας δίνει το θεώρημα της δειγματοληψίας να μπορούμε να αναπαράγουμε πλήρως το σήμα αρκεί να παίρνουμε δείγματα με συχνότητα μεγαλύτερη του διπλασίου της μέγιστης συχνότητας του σήματος πληροφορίας.

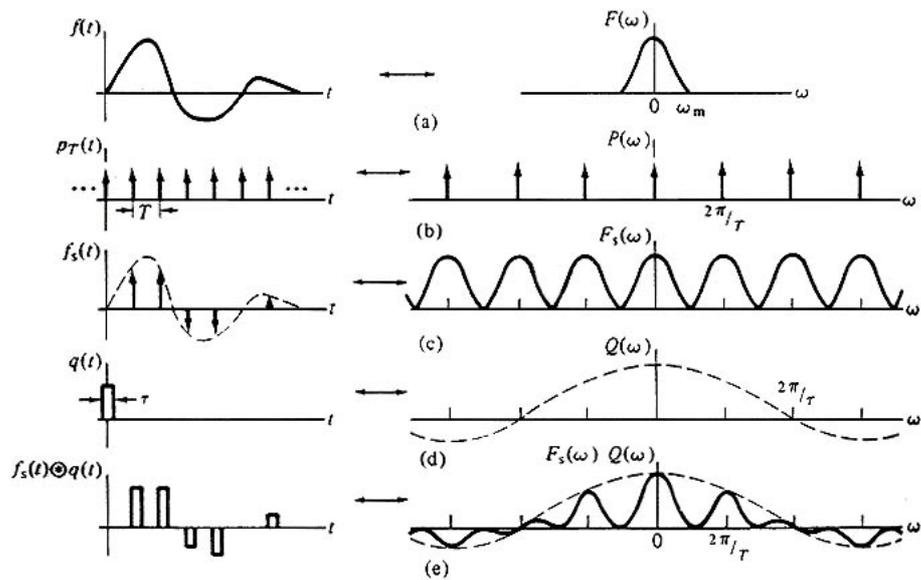
Επειδή τα περισσότερα σήματα έχουν συχνότητες ασθενείς μεν αλλά σε ένα μεγάλο εύρος, συνήθως πριν κάθε δειγματοληψία χρησιμοποιούμε ένα βαθυπερατό φίλτρο για να περιορίσουμε το εύρος ζώνης και τις παρεμβολές που η ύπαρξη υψηλότερων συχνοτήτων θα δημιουργούσε στο τελικό σήμα. Επίσης συχνά παίρνουμε δείγματα με συχνότητα μεγαλύτερη από αυτή που μας επιβάλλει το θεώρημα δειγματοληψίας.

Παράδειγμα: Θεωρείστε το σήμα φωνής σε μια τηλεφωνική συνδιάλεξη. Αν και η ανθρώπινη φωνή βρίσκεται στις συχνότητες 0–16 KHz στην τηλεφωνία χρησιμοποιούμε φίλτρα που περιορίζουν το εύρος ζώνης στα 3,1 KHz.

Σύμφωνα με το θεώρημα δειγματοληψίας πρέπει να πάρουμε δείγματα με συχνότητα $2 \times 3.1 \text{ KHz} = 6,2 \text{ KHz}$. Στην πραγματικότητα παίρνουμε 8.000 δείγματα το δευτερόλεπτο.

Φυσική Δειγματοληψία

Εάν ακολουθήσουμε τις ίδιες διαδικασίες διαμόρφωσης όπως στην διαμόρφωση συνεχούς κύματος, τότε πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το σήμα πληροφορίας με την περιοδική σειρά παλμών όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.5. Βλέπουμε ότι το σήμα το οποίο παράγεται είναι μια σειρά παλμών με συχνότητα ω_c , σταθερής διάρκειας και με κορυφές που μεταβάλλονται ανάλογα με το εύρος του σήματος πληροφορίας. Αν αναλύσουμε το σήμα στο επίπεδο της συχνότητας βλέπουμε ότι στο σήμα που αποστέλλεται υπάρχει το αρχικό σήμα, πολλαπλασιασμένο με μια σταθερά, γεγονός που επιτρέπει την αποδιαμόρφωση με τη χρήση ενός βαθυπερατού φίλτρου. Το πρόβλημα με το σήμα αυτό είναι το σχήμα των κορυφών των παλμών. Όταν το σήμα περάσει μέσα από διάφορα σημεία του καναλιού ο θόρυβος αλλοιώνει τις κορυφές και κάνει αδύνατη την επαναφορά τους στο αρχικό σήμα. Να θυμηθούμε ότι η πληροφορία που μας παρέχουν οι κορυφές δεν είναι

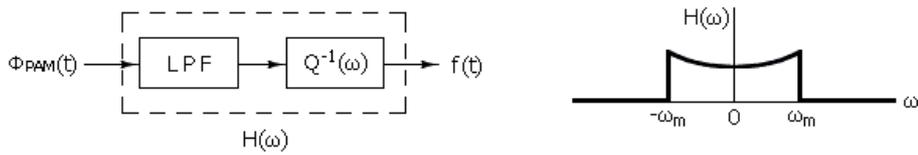


Σχήμα 8.27: Στάδια διαμόρφωσης PAM στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας.

απαραίτητη για την ανακατασκευή του σήματος. Απαιτείται μόνο μια τιμή κατά τη στιγμή της δειγματοληψίας.

Η διαμόρφωση εύρους παλμών χρησιμοποιεί την παραπάνω παρατήρηση αποστέλλοντας παλμούς με οριζόντιες κορυφές τιμής ίσης με την τιμή του σήματος κατά τη στιγμή της δειγματοληψίας. Το σήμα αυτό μπορεί να κατασκευαστεί παίρνοντας πρώτα δείγματα με συχνότητα που ορίζει το θεώρημα δειγματοληψίας και “κρατώντας” την τιμή αυτή για μια ορισμένη διάρκεια. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με ένα κύκλωμα sample-and-hold, δειγματοληπτώ και κρατώ. Το Σχήμα 8.27 παρουσιάζει τα στάδια που απαιτούνται για την δημιουργία του σήματος PAM στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας. Η αποδιαμόρφωση απαιτεί ένα φίλτρο όπως αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 8.28.

Στο Σχήμα 8.27 παρατηρούμε ότι το αρχικό σήμα πολλαπλασιάζεται με μια σειρά κρουστικών συναρτήσεων και μετά το αποτέλεσμα



Σχήμα 8.28: Σύστημα αποδιαμόρφωσης PAM.

συνελίσσεται με ένα παλμό $q(t)$.

Έστω $f(t)$ το αρχικό σήμα και $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ η σειρά των χρονικών συναρτήσεων. Τότε το σήμα που αποστέλλεται είναι

$$\Phi_{PAM} = [f(t) \cdot \delta(t - nT)] * q(t)$$

Στο πεδίο της συχνότητας ο πολλαπλασιασμός με τη σειρά των χρονικών συναρτήσεων οδηγεί στην μετατόπιση του φάσματος του συστήματος στις συχνότητες $n\omega_c$, η δε συνέλιξη στον πολλαπλασιασμό με τον μετασχηματισμό Fourier $Q(\omega)$ του παλμού $q(t)$, που είναι μια συνάρτηση δειγματοληψίας $Sa(\omega)$ (βλέπε Σχήμα 8.27).

Το φάσμα του τελικού σήματος είναι

$$\phi_{PAM}(\omega) = Q(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_c)$$

Παρατηρούμε ότι το φάσμα στην αρχή των συχνοτήτων, το $F(\omega)$ δηλαδή, είναι πολλαπλασιασμένο με το $Q(\omega)$ και όχι με μια σταθερά όπως στην περίπτωση της φυσικής δειγματοληψίας. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην ακόλουθη διαδικασία αποδιαμόρφωσης. Αφού λάβουμε το σήμα το περνάμε μέσα από ένα βαθυπερατό φίλτρο και μετά το πολλαπλασιάζουμε με το $Q^{-1}(\omega)$, το περνάμε δηλαδή από ένα φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $Q^{-1}(\omega)$. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται εξισορρόπηση (equalization) και παρουσιάζεται στο Σχήμα 8.28.

8.7 Συμπεριφορά συστημάτων παρουσία θορύβου

Για να μπορέσουμε να κάνουμε σύγκριση των συστημάτων AM και FM είναι αναγκαίο να συγκρίνουμε την επίδοσή τους υπό την παρουσία θορύβου. Υποθέτουμε ότι ο θόρυβος έχει ένα φάσμα ισχύος σταθερό σε όλες τις συχνότητες, είναι δηλαδή λευκός:

$$S_n(\omega) = \frac{N_0}{2} W/Hz.$$

Επίσης υποθέτουμε ότι ο θόρυβος σαν στοχαστικό σήμα έχει κατανομή κανονική (Gaussian) με μέση τιμή 0. Επίσης ότι ο θόρυβος είναι προσθετικός δηλ. προστίθεται στο σήμα που αποστέλλεται. Συνήθως χρησιμοποιούμε τον όρο σηματοθορυβική σχέση (SNR:Signal-to-Noise Ratio) για να υποδηλώσουμε το λόγο της ισχύος του σήματος ως προς την ισχύ του θορύβου:

$$SNR = \frac{\text{ισχύς σήματος εξόδου}}{\text{ισχύς θορύβου στην έξοδο}}.$$

Εάν P_r είναι η ισχύς του ληφθέντος σήματος τότε μπορούμε να δείξουμε ότι :

α) Στα συστήματα DSB-SC, ο σηματοθορυβικός λόγος στην έξοδο είναι:

$$SNR_o = \frac{P_r}{N_0 f_m}$$

όπου f_m η μέγιστη συχνότητα του σήματος.

Στην είσοδο η σηματοθορυβική σχέση δίνεται από:

$$SNR_i = \frac{P_r}{N_0 f_m}$$

δηλαδή η διαμόρφωση διπλασιάζει το SNR.

β) Στα συστήματα SSB

$$SNR_o = SNR_i \frac{P_r}{N_0 f_m}$$

γ) Στα συστήματα DSB/LC ή AM:

$$SNR_o = \frac{P_r}{N_o f_m} \frac{P_s}{P_s + 1}$$

όπου P_s η ισχύς στις δύο πλευρικές συχνότητες.

Δηλαδή τα συστήματα AM έχουν την χειρότερη επίδοση κάτω από την παρουσία θορύβου.

δ) Στα συστήματα FM:

$$SNR_o = \frac{P_r}{N_o f_m} \beta^2 P_m,$$

όπου P_m η ισχύς του σήματος.

ε) Στα συστήματα PM:

$$SNR_o = \frac{P_r}{N_o f_m} \Delta\theta^2 P_m,$$

όπου $\Delta\theta$ η μέγιστη απόκλιση φάσης ίση με β στα συστήματα ΠΜ.

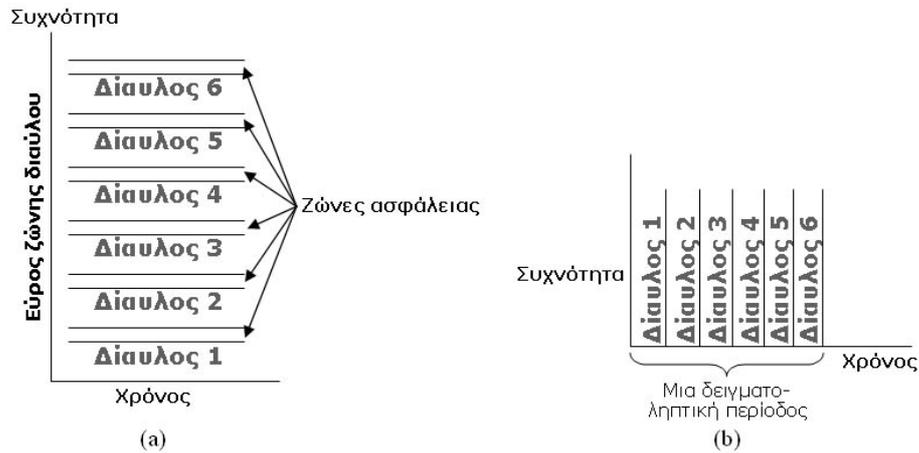
8.8 Πολύπλεξη (Multiplexing)

Η πολύπλεξη επιτρέπει σε πολλά ανεξάρτητα σήματα να συνδυάζονται σε ένα κανάλι. Στο ραδιόφωνο, παραδείγματος χάριν, έχουμε έναν μεγάλο αριθμό σταθμών που εκπέμπουν σε ένα εύρος ζώνης που προκαθορίζεται από την Εθνική Επιτροπή Τηλεπικοινωνιών. Όλοι οι σταθμοί συνυπάρχουν - χωρίς να δημιουργούν παρεμβολές ο ένας στον άλλο- και μπορούν με μια απλή κίνηση ενός επιλέκτη να ακουστούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

Διακρίνουμε τρεις τύπους πολύπλεξης:

1. Πολύπλεξη με διαίρεση συχνότητας
2. Πολύπλεξη με διαίρεση χρόνου
3. Πολύπλεξη με διαίρεση κώδικα

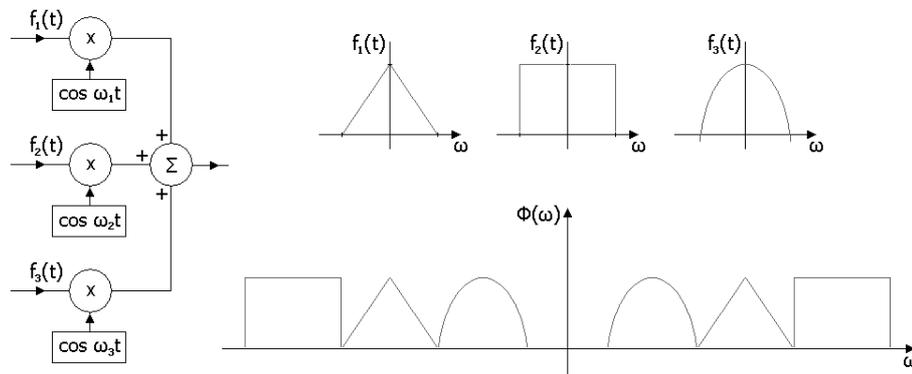
8.8.1 Πολύπλεξη με διαίρεση συχνότητας FDM: Frequency Division Multiplexing



Σχήμα 8.29: Δύο βασικές μορφές πολύπλεξης. α) Πολύπλεξη με διαίρεση συχνότητας, β) Πολύπλεξη με διαίρεση χρόνου.

Στην πολύπλεξη με διαίρεση συχνότητας τα σήματα χωρίζονται σε διαφορετικές ζώνες συχνότητας όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.29. Ένα σύστημα που πετυχαίνει την πολύπλεξη με διαίρεση συχνότητας φαίνεται στο Σχήμα 8.30. Πριν διαμορφώσουμε ένα σήμα το περνάμε από ένα βαθυπερατό φίλτρο για να μειώσουμε την πιθανότητα παρεμβολών. Τα φιλτραρισμένα αυτά σήματα διαμορφώνονται με μια από τις μεθόδους που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, χρησιμοποιώντας διαφορετικές συχνότητες φέροντος για κάθε σήμα. Η μέθοδος χρησιμοποιείται με τις μεθόδους διαμόρφωσης συνεχούς κύματος, μπορούμε δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε διαμόρφωση εύρους ή διαμόρφωση γωνίας. Μετά τη διαμόρφωση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ζωνοπερατά φίλτρα για να αποκλείσουμε την ύπαρξη σημάτων εκτός των επιτρεπόμενων ζωνών.

Στον δέκτη το λαμβανόμενο σήμα περνάει από ένα ζωνοπερατό φίλτρο και μετά αποδιαμορφώνεται με τη χρήση των συχνοτήτων



Σχήμα 8.30: Σύστημα Πολύπλεξης με διαίρεση συχνότητας.

φέρωντος ίδιες με αυτές που έγινε η διαμόρφωση. Τα βαθυπερατά φίλτρα χρησιμοποιούνται για να περάσουμε μόνο το $f(t)$ και όχι συχνότητες που πιθανόν να έχουν διεισδύσει λόγω θορύβου. Η συχνότητα φέρωντος στο ραδιόφωνο είναι η συχνότητα που εκπέμπει ο σταθμός.

Παράδειγμα: Χρησιμοποιούμε FDM για την απόπλεξη 24 σημάτων φωνής με διαμόρφωση SSB. Εάν κάθε σήμα φωνής χρησιμοποιεί 4 KHz, ποιο είναι το απαιτούμενο εύρος ζώνης;

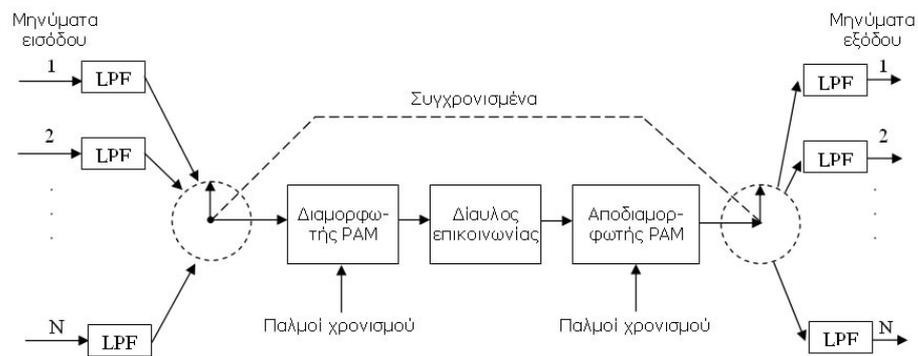
Απάντηση: Η διαμόρφωση SSB απαιτεί 4 KHz για κάθε σήμα. Συνεπώς απαιτούνται συνολικά $24 \times 4 = 96$ KHz. Συνήθως μεταξύ των ζωνών χρησιμοποιούμε και ένα 10% του εύρους ζώνης για την αποφυγή παρεμβολών, απαιτώντας ένα συνολικό εύρος ζώνης $BW = 24 \times 4 \times 1.1 = 105.6$ KHz

8.8.2 Πολύπλεξη με διαίρεση χρόνου (TDM: Time Division Multiplexing)

Η πολύπλεξη με διαίρεση χρόνου δίνει στο κάθε σήμα την δική του χρονική στιγμή για αποστολή. Έτσι μεταξύ δύο χρονικών στιγμών

δειγματοληψίας μπορούμε να στείλουμε παλμούς από διαφορετικά σήματα (βλέπε Σχήμα 8.29). Η μορφή αυτή της πολύπλεξης χρησιμοποιείται σε συστήματα διαμόρφωσης παλμών.

Το Σχήμα 8.31 δείχνει ένα διάγραμμα ενός συστήματος πολυπλεξίας με διαίρεση χρόνου. Βασικό στοιχείο αποτελεί ο διακόπτης πολύπλεξης (commutator) ο οποίος παίρνει τα δείγματα με την απαιτούμενη συχνότητα και σειρά από τα διάφορα σήματα εισόδου και τα προσφέρει στην είσοδο, στον διαμορφωτή παλμών, π.χ. ένα διαμορφωτή PAM.



Σχήμα 8.31: Διάγραμμα ενός TDM συστήματος, με τα βασικά μέρη του πομπού και του δέκτη.

Στον δέκτη πρώτα γίνεται η αποδιαμόρφωση του σήματος και μετά μέσω ενός διακόπτη λαμβάνονται τα σήματα.

Η πολύπλεξη αυτή φέρνει πολλούς παλμούς τον ένα κοντά στον άλλο αυξάνοντας το εύρος ζώνης κατά N φορές (αν υποθέσουμε N παρόμοια σήματα). Επίσης απαιτείται πλήρης συγχρονισμός των διαδικασιών διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης. Στην πράξη αυτό γίνεται με την εισαγωγή πρόσθετων παλμών συγχρονισμού σε τακτά χρονικά διαστήματα.

Παράδειγμα: Θέλουμε να πολυπλέξουμε 10 σήματα φωνής τα οποία έχουν δημιουργηθεί μετά την δειγματοληψία με ρυθμό 8 KHz.

Μελετήστε το σύστημα πολύπλεξης.

Απάντηση: Δειγματοληψία με ρυθμό 8 KHz σημαίνει ότι πρέπει να παίρνονται συνεχή δείγματα από ένα σήμα κάθε $\frac{1}{8\text{KHz}} = 125\mu\text{sec}$. Στα 125 μsec πρέπει να πάρουμε δείγματα από δέκα σήματα. Άρα οι παλμοί θα απέχουν μεταξύ τους 12,5 μsec .

Η έννοια του εύρους ζώνης στα συστήματα αυτά εξαρτάται από τον τρόπο που στέλνεται το τελικό σήμα. Μια πρώτη προσέγγιση είναι ότι το εύρος ζώνης $B_x \geq \frac{1}{2 \cdot T_x}$ όπου T_x είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο παλμών. Σύμφωνα με τη σχέση αυτή το εύρος ζώνης ενός σήματος του προηγούμενου παραδείγματος είναι $B_x \geq \frac{1}{2 \cdot 125\mu\text{sec}} = 4\text{KHz}$, δηλαδή ίση με το εύρος ζώνης του σήματος SSB. Για τα δέκα σήματα μαζί: $B'_x \geq \frac{1}{2 \cdot \frac{125}{10}} = 40\text{KHz}$

8.8.3 Πολύπλεξη με Διαίρεση Κώδικα (CDMA)

Η μορφή αυτή πολύπλεξης στηρίζεται στην αρχή ότι με την χρήση μιας ψευδοτυχαίας ακολουθίας το σήμα μπορεί να κρυφτεί και να φαίνεται σαν θόρυβος σε όλους του χρήστες πλην αυτού που διαθέτει την ακολουθία και μπορεί να αποκρυπτογραφήσει το σήμα. Η μέθοδος αυτή στηρίχτηκε σε στρατιωτικές εφαρμογές όπου είναι απαραίτητο όχι μόνο να κρυφτεί το περιεχόμενο του σήματος, αλλά πολλές φορές να κρυφτεί και η ύπαρξη του σήματος αυτού καθ' αυτού.

Η πολύπλεξη αυτή βρίσκει σήμερα ευρύτατη εφαρμογή στα συστήματα προσωπικής επικοινωνίας (PCS :Personal Communication Systems).

Κεφάλαιο 9

Συστήματα Ψηφιακών Επικοινωνιών

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η μετάδοση σημάτων σε ψηφιακή μορφή έχει μια σειρά προτερημάτων σε σχέση με την αναλογική μετάδοση. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τους διάφορους τρόπους ψηφιακής διαμόρφωσης.

Ξεκινάμε τη συζήτησή μας αυτή συνεχίζοντας το παράδειγμα της διαμόρφωσης εύρους παλμών (PAM). Στο σύστημα αυτό η πληροφορία μεταδίδεται σε μορφή παλμών μεταβλητού ύψους/εύρους. Τα ύψη αυτά παίρνουν συνεχείς τιμές. Για να πετύχουμε την μετάδοση σε ψηφιακή μορφή πρέπει να κβαντώσουμε το σύστημα σε μια σειρά διακριτών τιμών και μετά να το κωδικοποιήσουμε για να είναι έτοιμο για αποστολή. Η σειρά των διαδικασιών αυτών φαίνεται στο Σχήμα 9.1. Η διαδικασία της δειγματοληψίας, κβάντωσης και μετάδοσης παλμών εισάγει διάφορες τιμές θορύβου στο σήμα. Τέτοιοι θόρυβοι είναι οι εξής :

- Θόρυβος κβάντωσης: οι τιμές του σήματος από συνεχείς γίνονται διακριτές και μη αντιστρέψιμες
- Κορεσμός κβάντωσης: οι επιτρεπόμενες διακριτές τιμές έχουν ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο, τιμές του σήματος μεγαλύτε-

ρες του μεγίστου και μικρότερες του ελαχίστου πιέζονται στις αντίστοιχες ακραίες τιμές.

- Διαφορά χρονισμού (timing jitter): τα διάφορα δείγματα φτάνουν με διαφορές χρόνου από τις θεωρητικά υπολογισμένες δημιουργώντας αβεβαιότητα για την θέση των παλμών
- Θόρυβος καναλιού: μπορεί να είναι θερμικός θόρυβος ή παρεμβολή από άλλους χρήστες ή άλλα συστήματα
- Παρεμβολές από άλλα σήματα: επειδή όλα τα κανάλια έχουν κάποιο περιορισμένο εύρος ζώνης κανένας παλμός δεν φτάνει τετραγωνικός αλλά συνήθως ακουμπάει και τους άλλους γύρω από αυτόν.

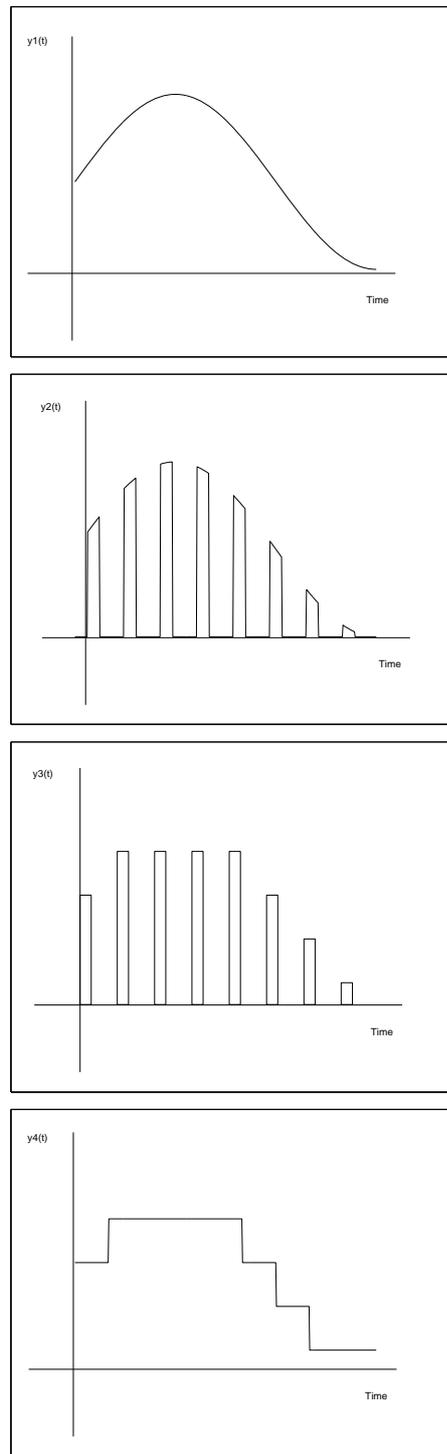
9.1 Παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM: Pulse Code Modulation)

Η παλμοκωδική διαμόρφωση προέρχεται από την διαμόρφωση PAM με την κωδικοποίηση των κβαντισμένων δειγμάτων σε ψηφιακές λέξεις.

Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ακόλουθη :

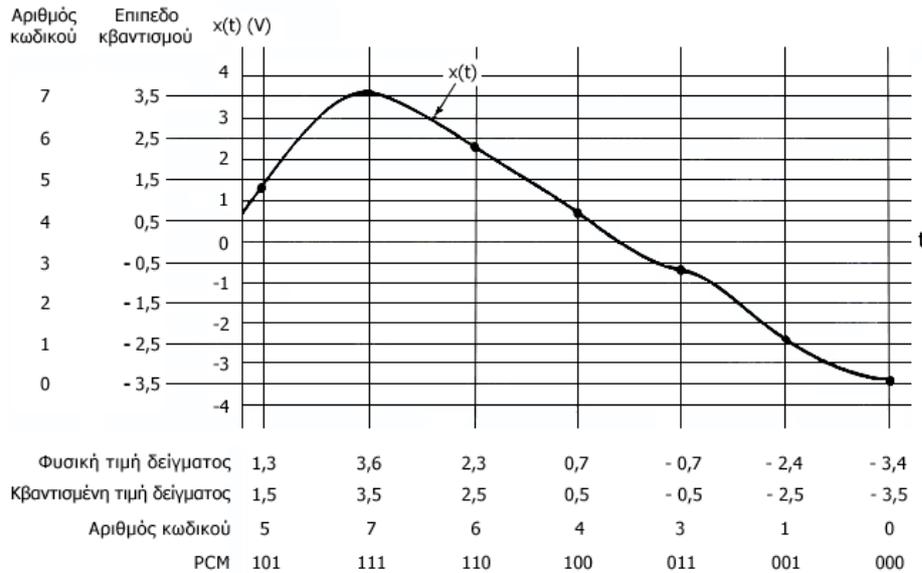
- Δειγματοληψία
- Κβάντωση σε L επίπεδα
- Κωδικοποίηση κάθε δείγματος σε μια λέξη l bit ($l = \log_2 L$).

9.1 Παλμοκωδική διαμόρφωση (PCM: Pulse Code Modulation) 179



Σχήμα 9.1: (α) Αρχική αναλογική μορφή, (β) Φυσικά δειγματοποιημένα δεδομένα, (γ) Κβαντισμένα δείγματα, (δ) Αποστολή μέσω ενός συστήματος "Δειγματοληπτώ και κρατώ".

Το Σχήμα 9.2 παρουσιάζει την διαδικασία για τη δημιουργία ενός σήματος PCM.



Σχήμα 9.2: Φυσικά δείγματα, Κβαντισμένα δείγματα και Παλμοκωδική διαμόρφωση.

Επειδή το σήμα παίρνει τιμές μεταξύ του 3,5 και του -3,5 διαλέγουμε τα επίπεδα να καλύπτουν τις τιμές από -3,5 μέχρι 3,5. Η επιλογή των ακραίων τιμών είναι σημαντική γιατί έχει άμεσο αποτέλεσμα στον θόρυβο κβάντωσης και στον θόρυβο λόγω κορεσμού. Μετά επιλέγεται ο αριθμός των επιπέδων. Ο αριθμός αυτός είναι συνήθως δύναμη του 2. Όσο πιο μεγάλος ο αριθμός των επιπέδων τόσο μικρότερος ο θόρυβος κβάντωσης, αλλά και μεγαλύτερο το απαιτούμενο εύρος ζώνης για την μετάδοση του σήματος.

Στο παράδειγμα του σχήματος επιλέγονται 8 επίπεδα τα οποία είναι ομοιόμορφα κατανομημένα μεταξύ των ακραίων τιμών. Κάθε επίπεδο παίρνει έναν κωδικό αριθμό (από 0 μέχρι 7 στο παράδειγμα

μας), ο οποίος μετά αντιστοιχίζεται σε μια ακολουθία δυαδικών ψηφίων 3 bit ($\log_2 8$). Εάν το σήμα είχε 16 επίπεδα θα χρειαζόμασταν 4 bit/ δείγμα κ.ο.κ.

9.1.1 Ομοιόμορφη - Μη ομοιόμορφη κβάντωση

Στο προηγούμενο παράδειγμα τα επίπεδα ήταν κατανομημένα ομοιόμορφα –σε ίσες αποστάσεις δηλαδή– μεταξύ των ακραίων τιμών. Πολλές φορές είναι απαραίτητο να έχουμε μεγαλύτερη ευκρίνεια σε κάποιο εύρος τιμών για διάφορους λόγους όπως: στο εύρος ζώνης αυτό συναντώνται οι τιμές του δείγματος συχνότερα, ή στο εύρος αυτό μικρά λάθη μπορεί να οδηγήσουν σε μεγάλη παραμόρφωση του σήματος. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε μη ομοιόμορφη κβάντωση. Η διαφορά στην ποιότητα του δυνατού σήματος είναι συνήθως ασήμαντη ενώ στο αδύνατο σήμα η μη ομοιόμορφη κβάντωση μας δίνει σημαντικά καλύτερη πιστότητα.

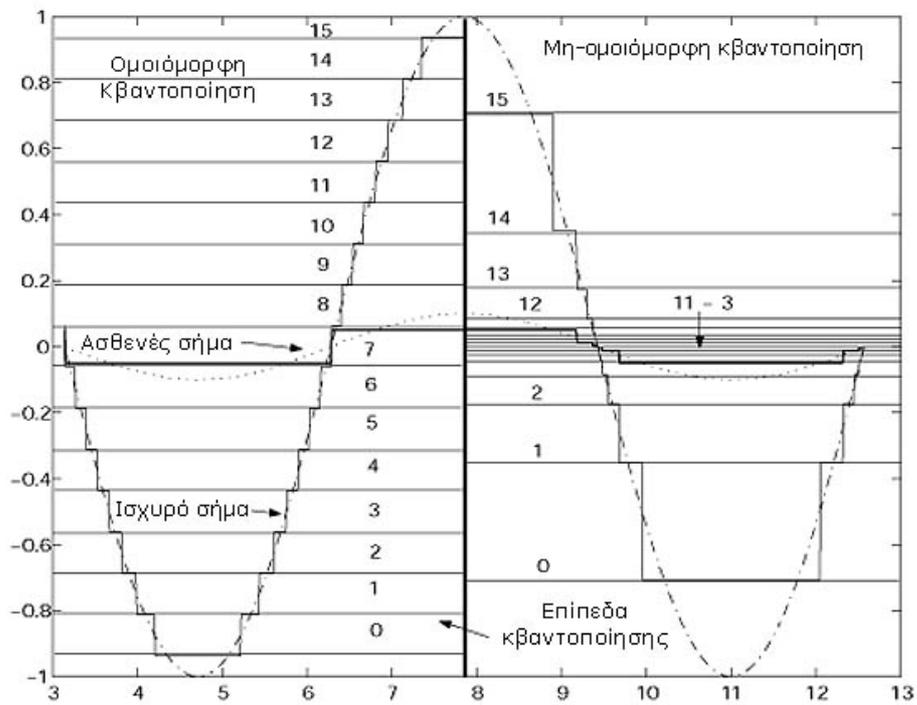
Για να πετύχουμε μη ομοιόμορφη κβάντωση πρώτα συμπιέζουμε το σήμα με μια λογαριθμική συνάρτηση κβάντωσης και μετά κάνουμε ομοιόμορφη κβάντωση. Στον δέκτη πρέπει να γίνει αποσυμπίεση. Ο συνδυασμός συμπίεσης – αποσυμπίεσης είναι γνωστός σαν *companding*. Το Σχήμα 9.3 δείχνει ένα παράδειγμα χρήσης μη ομοιόμορφης κβάντωσης.

Στα συστήματα τηλεπικοινωνίας χρησιμοποιούνται δύο τρόποι λογαριθμικής συμπίεσης. Στην Β. Αμερική χρησιμοποιείται ο νόμος μ της συμπίεσης. Η έξοδος y στην συνάρτηση της εισόδου x δίνεται από τη σχέση

$$y = y_{\max} \frac{\log_e[1 + m(|x|/x_{\max})]}{\log_e(1 + m)} \operatorname{sgn} x$$

όπου $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{για } x \geq 0 \\ -1, & \text{για } x < 0 \end{cases}$ μ μια θετική σταθερή (ίση με 255) και x_{\max} , y_{\max} οι μέγιστες τιμές εισόδου και εξόδου αντίστοιχα (βλέπε Σχήμα 9.4).

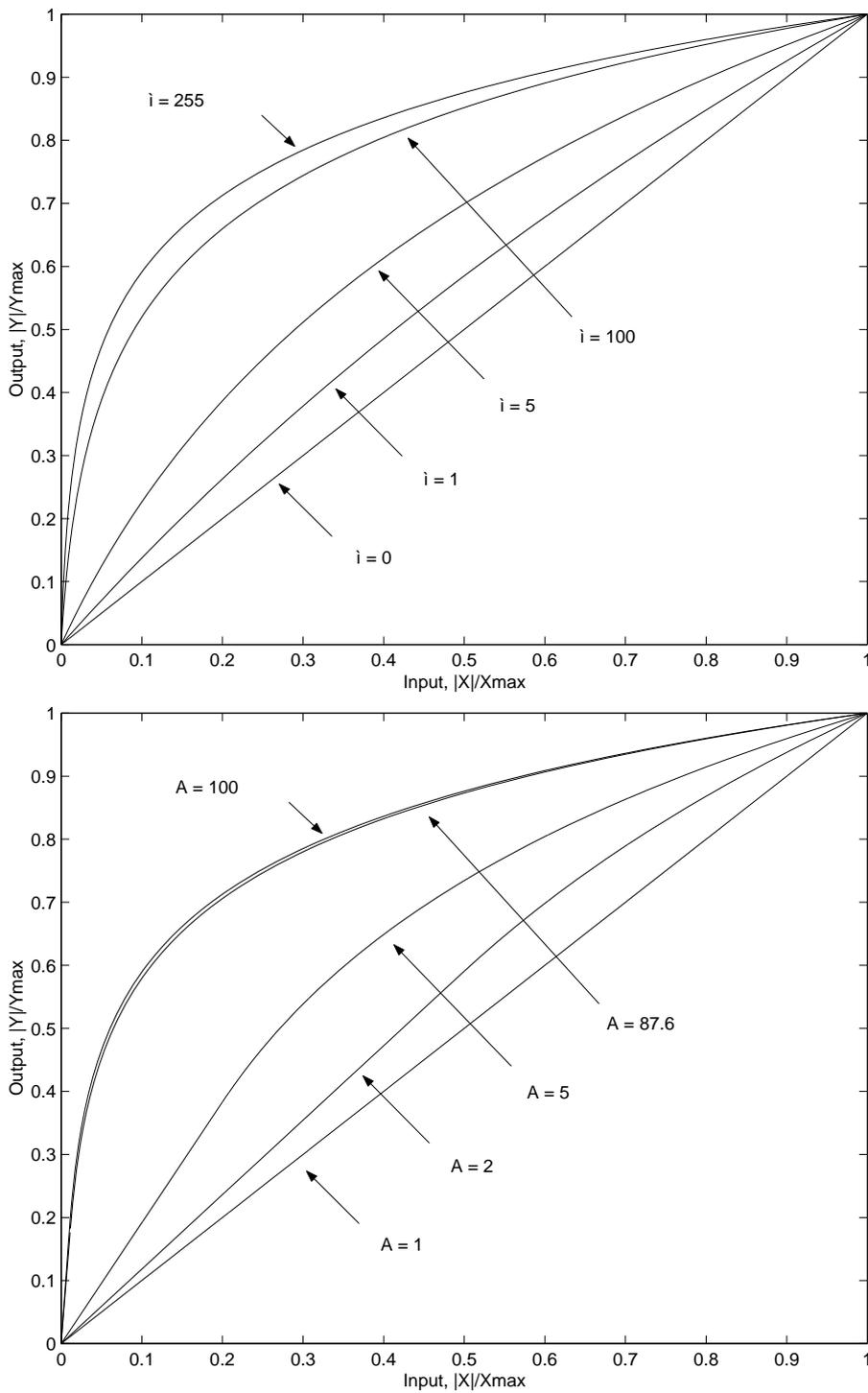
Στην Ευρώπη χρησιμοποιείται ο νόμος A , σύμφωνα με τον οποίο



Σχήμα 9.3: Ομοιόμορφη και μη-ομοιόμορφη κβάντωση σημάτων.

$$y = \begin{cases} y_{\max} \frac{A(|x|/x_{\max}) \operatorname{sgn}x}{1 + \log_e A}, & \text{για } 0 < \frac{|x|}{x_{\max}} \leq \frac{1}{A} \\ y_{\max} \frac{1 + \log_e [A(|x|/x_{\max})]}{1 + \log_e A}, & \text{για } 1/A < \frac{|x|}{x_{\max}} < 1 \end{cases}$$

όπου A μια θετική σταθερά (ίση με 87.6).



Σχήμα 9.4: Χαρακτηριστικά Συμπίεσης. (α) Χαρακτηριστικά νόμου μ , (β) Χαρακτηριστικά νόμου A .

9.2 Μετάδοση δυαδικών ψηφίων

Η μετάδοση των δυαδικών ψηφίων (βιτ) που προέκυψαν από την διαμόρφωση PCM μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Στους τρόπους αυτούς μπορούμε να διακρίνουμε δύο μεγάλες κατηγορίες:

- τη μετάδοση στη βασική ζώνη (baseband transmission) και
- τη μετάδοση στην ευρεία ζώνη ή ευρυζωνική μετάδοση (broadband transmission).

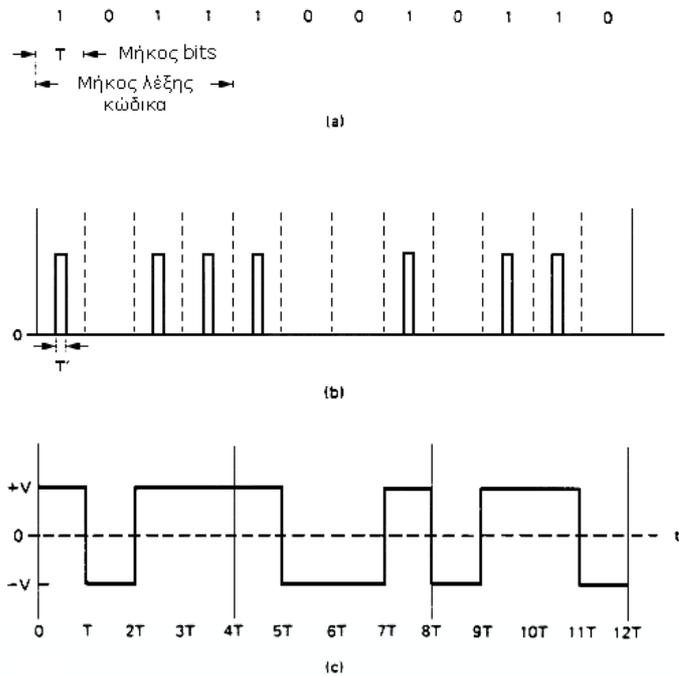
Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την πρώτη κατηγορία, ενώ θα συζητήσουμε την δεύτερη κατηγορία στο επόμενο κεφάλαιο.

Στην μετάδοση στη βασική ζώνη τα σήματα μεταδίδονται σαν παλμοί (ηλεκτρικοί ή οπτικοί). Η μετάδοση μπορεί να γίνει ξεχωριστά για κάθε ψηφίο ή περισσότερα του ενός ψηφία μπορούν να σχηματίσουν μια λέξη κώδικα (codeword) και να μεταδοθούν σαν ένα σήμα. Στο Σχήμα 9.5a φαίνονται οι τιμές του σήματος PCM. Στο Σχήμα 9.5b φαίνεται η παρουσίαση του σήματος μέσω παλμών περιορισμένης διάρκειας και τέλος στο Σχήμα 9.5c χρησιμοποιούνται κύματα υπό μορφή παλμών που αντιπροσωπεύουν το σήμα ($+V$ volts για το 1 και $-V$ volts για το 0) και καλύπτουν όλο το χώρο αποστολής.

Στο δέκτη πρέπει να αποφασίσουμε για το εάν εστάλη $+V$ ή $-V$, συνήθως μετρώντας την ενέργεια του παλμού. Για τον λόγο αυτό προσπαθούμε οι παλμοί να έχουν μεγάλη διάρκεια, ώστε να παίρνουμε τις καλύτερες δυνατές αποφάσεις. Θα προτιμούσαμε λοιπόν τη μετάδοση που φαίνεται στο Σχήμα 9.6 αντί της μετάδοσης του Σχήματος 9.5β.

Η κωδικοποίηση που εμφανίζεται στο Σχήμα 9.5 δεν είναι μοναδική. Μια άλλη μορφή κωδικοποίησης φαίνεται στο Σχήμα 9.6. Στην πράξη συναντάμε πληθώρα τρόπων μετάδοσης που διαφέρουν ως προς το απαιτούμενο εύρος ζώνης, την δυνατότητα συγχρονισμού, την δυνατότητα αναγνώρισης λαθών, την ύπαρξη συνεχούς ρεύματος, και την αντιμετώπιση του θορύβου.

Στο Σχήμα 9.7 βλέπουμε μια σειρά από τέτοιες κωδικοποιήσεις. Μπορούμε να κατατάξουμε τις κωδικοποιήσεις σε τέσσερις γενικές



Σχήμα 9.5: Αποστολή στη βασική ζώνη. a Αρχικό σήμα, b Μετάδοση ενός ψηφίου ανά σήμα c Μετάδοση ψηφίων με πλήρη κάλυψη.

κατηγορίες:

1. NRR: Nonreturn to Zero. Μη επιστροφή στο μηδέν
2. RZ: Return to Zero. Επιστροφή στο μηδέν.
3. Phase encoded. Κωδικοποίηση φάσης.
4. Multilevel Binary. Δυαδική κωδικοποίηση πολλαπλών επιπέδων.

Digit	Binary code	A binary pulse code
0	000	
1	001	
2	010	
3	011	
4	100	
5	101	
6	110	
7	111	

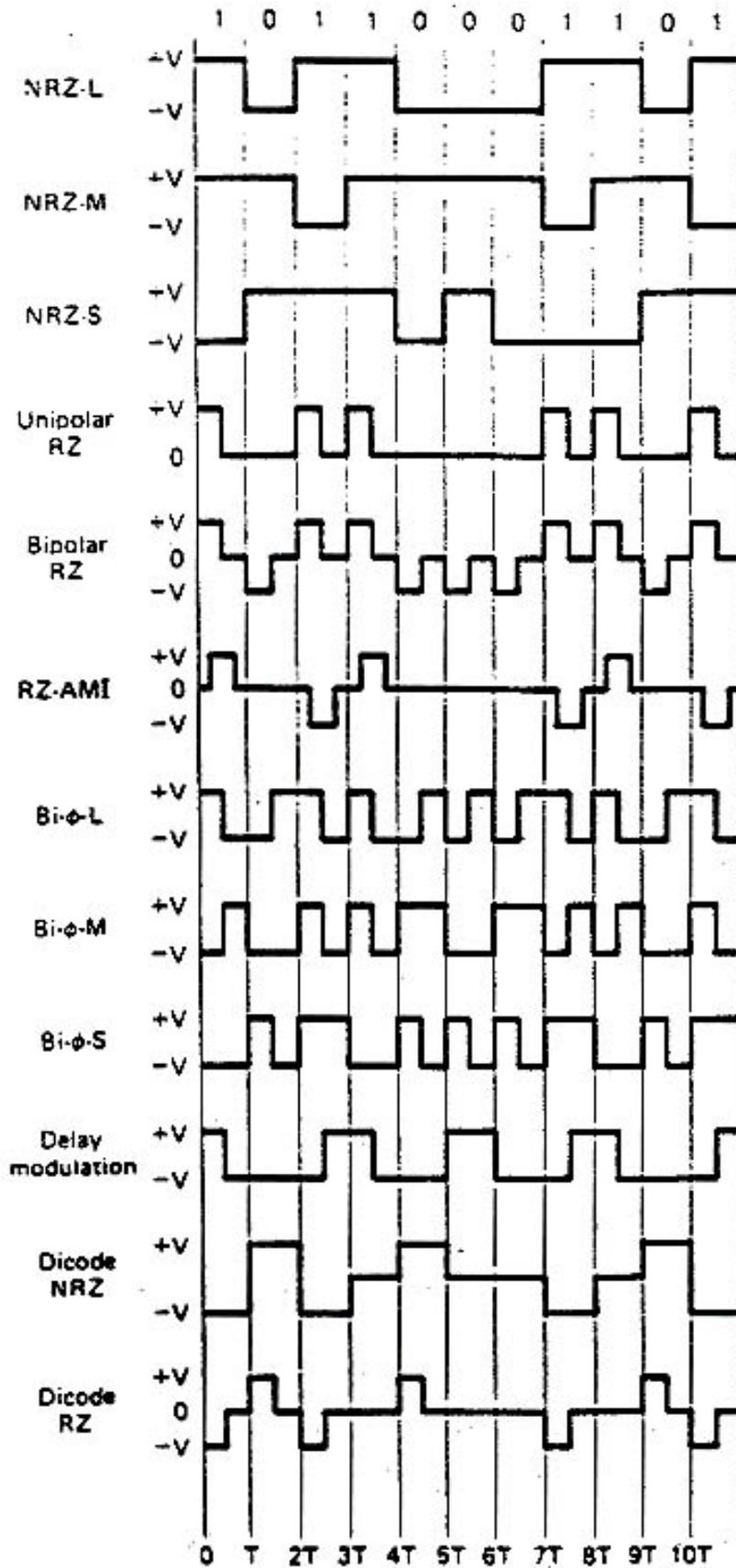
Σχήμα 9.6: Αποστολή στη βασική ζώνη. a Αρχικό σήμα, b Μεταδιδόμενο σήμα.

9.3 Το θεώρημα των Shannon-Hartley

Ένα από τα βασικότερα θεωρήματα στο χώρο των τηλεπικοινωνιακών είναι το θεώρημα των Shannon-Hartley (ή κοινώς γνωστό σαν θεώρημα Shannon) το οποίο ορίζει την μέγιστη χωρητικότητα ενός καναλιού κάτω από την επίδραση θορύβου AWGN.

Εάν μας δοθεί ένα κανάλι εύρους ζώνης W σε Hz, στο οποίο ισχύει η σηματοθορυβική σχέση (S/N) τότε η χωρητικότητα C του καναλιού σε bps δίνεται από τον τύπο $C = W \log_2(1 + S/N)$.

Είναι θεωρητικά αδύνατο να μεταδώσουμε πληροφορία με ταχύτητα μεγαλύτερη της χωρητικότητας ενός καναλιού. Δηλαδή $R \leq C$. Δηλαδή αν προσπαθήσουμε να βρούμε ένα κώδικα που να μεταδίδει με $R > C$ η προσπάθεια μας θα καταλήξει σε αποτυχία ή ισοδύναμα δεν θα μπορέσουμε να μεταφέρουμε πληροφορία με πιθανότητα σφάλματος μικρότερη του 50%.



Σχήμα 9.7: Διάφοροι τρόποι μετάδοσης στη βασική ζώνη.

Παράδειγμα: Έστω ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι εύρους ζώνης 4 KHz και σηματοθορυβικής σχέσης $S/N = 30dB$. Τότε η χωρητικότητα του καναλιού είναι $C' = 4 \cdot \log_2(1 + S/N) = 4 \cdot \log_2(1 + 1000) = 4 \cdot 9 = 36.000$ bps.

Δηλαδή η μέγιστη ταχύτητα που μπορούμε να πετύχουμε είναι 36 kbps. (θυμηθείτε ότι $10 \log_{10} S/N = (S/N)$ dB).

9.4 Ανίχνευση δυαδικών σημάτων

Εάν μεταδοθεί ένα σήμα $s_1(t)$, $0 \leq t \leq T$, ο δέκτης λαμβάνει το σήμα

$$r(t) = s_1(t) + n(t),$$

όπου $n(t)$ είναι ο θόρυβος, που μπορεί να προέρχεται από παρεμβολές από άλλα συστήματα, θερμικό θόρυβο, κτλ. Στα περισσότερα επικοινωνιακά συστήματα θεωρούμε ότι ο θόρυβος είναι μια στοχαστική ανέλιξη με μέση τιμή μηδέν, είναι προσθετικός και λευκός (AWGN: Additive White Gaussian Noise)¹.

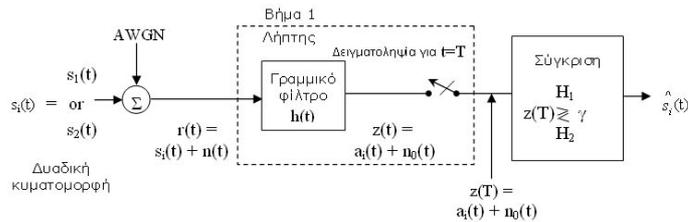
Η διαδικασία ανίχνευσης του σήματος περιλαμβάνει δύο βήματα. Στο πρώτο βήμα από την κυματομορφή που λαμβάνεται παίρνουμε μόνο μια τιμή την $z(t = T)$. Στο δεύτερο βήμα η τιμή $z(T)$ συγκρίνεται με μια τιμή κατωφλιού γ και εξετάζεται αν το σήμα προήλθε από το σήμα s_1 ή το σήμα s_2 - αληθεύει η υπόθεση H_1 ή η υπόθεση H_2 αντίστοιχα. Στο πρώτο βήμα χρησιμοποιούμε ένα συσχετιστή ή ένα φίλτρο ταιριάσματος (matched filter), το οποίο αποτελείται από ένα γραμμικό φίλτρο και ένα δειγματολήπτη όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.8. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η κρουστική απόκριση του βέλτιστου φίλτρου δίνεται από τη σχέση

$$h(t) = \begin{cases} K s(T - t), & \text{για } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

¹Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τη σχέση $p(n_0) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n_0}{\sigma_0} \right)^2 \right]$, όπου σ_0 είναι η διασπορά του θορύβου.

όπου K μία σταθερά. Ισοδύναμα η όλη διαδικασία του πρώτου βήματος αντιστοιχεί στο ακόλουθο ολοκλήρωμα.

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau)d\tau.$$



Σχήμα 9.8: Ανίχνευση ψηφιακού σήματος στη βασική ζώνη.

Στο δεύτερο βήμα η τιμή αυτή συγκρίνεται με ένα κατώφλι γ_0 και παίρνεται η απόφαση εάν εστάλη το σήμα s_1 ή το σήμα s_2 ($z(T) > \gamma_0$ ή $z(T) < \gamma_0$ αντίστοιχα).

Η διαδικασία αυτή εγγυάται την ελάχιστη πιθανότητα σφάλματος. Σφάλμα μπορεί να προκύψει αν δεχτούμε ότι εστάλη το s_2 ενώ είχε σταλεί το s_1 και αντίστροφα. Τα γεγονότα αυτά συμβαίνουν με πιθανότητα $p(s_1)$ και $p(s_2)$ αντίστοιχα. Η πιθανότητα σφάλματος P_β δίνεται από τη σχέση:

$$P_\beta = P(s_1)P(H_2/s_1) + P(s_2)P(H_1/s_2).$$

Εάν $P(s_1) = P(s_2) = 1/2$ τότε η πιθανότητα σφάλματος δίνεται από τη σχέση $P_\beta = Q\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\sigma_0}\right)$ όπου α_1, α_2 είναι τα συστατικά του σήματος όταν μεταδίδεται το s_1 και το s_2 αντίστοιχα, σ_0 η διασπορά του θορύβου, και $Q(x)$ είναι γνωστή σαν συνάρτηση λάθους. Η συνάρτηση αυτή συνήθως δίνεται από πίνακες, (όπως ο Πίνακας του σχήματος 9.9), και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

		Q(x)									
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641	
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247	
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859	
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483	
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121	
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776	
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451	
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2168	0.2148	
0.8	0.2169	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867	
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611	
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379	
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170	
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985	
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823	
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681	
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559	
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455	
1.8	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367	
1.9	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294	
2.0	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233	
2.1	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183	
2.2	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143	
2.3	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	
2.4	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084	
2.5	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064	
2.6	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048	
2.7	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	
2.8	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	
2.9	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	
3.0	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	
3.1	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	
3.2	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	
3.3	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	
3.4	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	
3.5	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	

Σχήμα 9.9: Η συνάρτηση Q(x).

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και την προσέγγιση (για $x > 3$)

$$Q(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

9.4.1 Παραδείγματα επίδοσης ψηφιακών σημάτων

Παράδειγμα 1: Σήματα μονής πόλωσης

Στα σήματα μονής πόλωσης, $s_1(t) = A$, $0 \leq t \leq T$, για το ψηφίο 1, και $s_2(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$, για το ψηφίο 0.

Στο Σχήμα 9.10 φαίνεται η αποστολή και η αποδικοποίηση ενός σήματος μονής πόλωσης. Το κατώφλι γ_0 για $P(s_1) = P(s_2)$ δίνεται από την τιμή $\gamma_0 = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$ όπου

$$\alpha_1 = E\{Z(T)\} = E\left\{\int_0^T A^2 + An(t)dt = A^2T\right\}$$

και $\alpha_2 = 0$. Άρα $\gamma_0 = \frac{A^2T}{2}$.

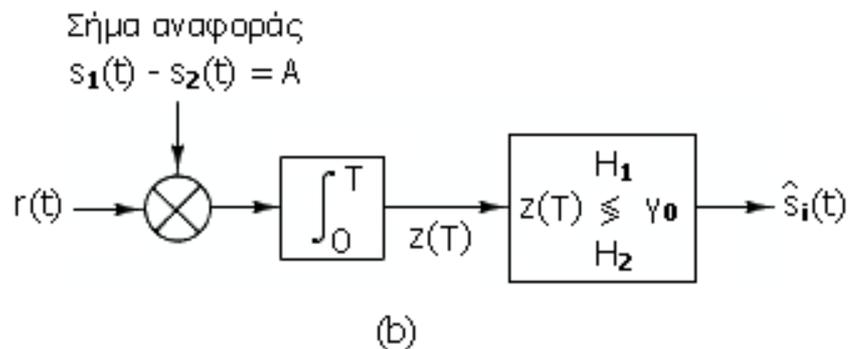
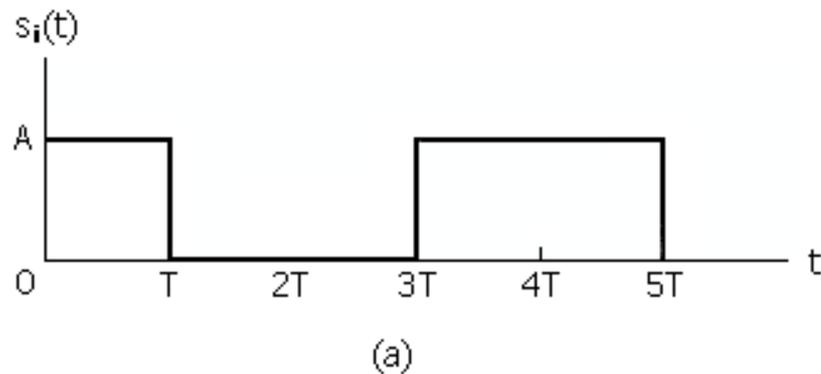
Να παρατηρήσουμε ότι A^2T είναι η ενέργεια του σήματος s_1 . Τότε

$$P_\beta = Q\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

όπου $N_0/2$ είναι η πυκνότητα του φάσματος ισχύος του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου και E_b η μέση ενέργεια ενός bit $\left(\frac{A^2T}{2}\right)$.

Παράδειγμα 2: Διπολικό σήμα

Στα διπολικά σήματα ή σήματα διπλής πόλωσης, $s_1(t) = +A$, $0 \leq t \leq T$, για το ψηφίο 1, και $s_2(t) = -A$, $0 \leq t \leq T$, για το ψηφίο 0.



Σχήμα 9.10: Ανίχνευση σήματος μονής πόλωσης.

Στο Σχήμα 9.11 φαίνεται η αποστολή και η αποδικοποίηση ενός σήματος μονής πόλωσης. Το κατώφλι γ_0 για $P(s_1) = P(s_2)$ δίνεται από την τιμή $\gamma_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 0$ και η πιθανότητα σφάλματος

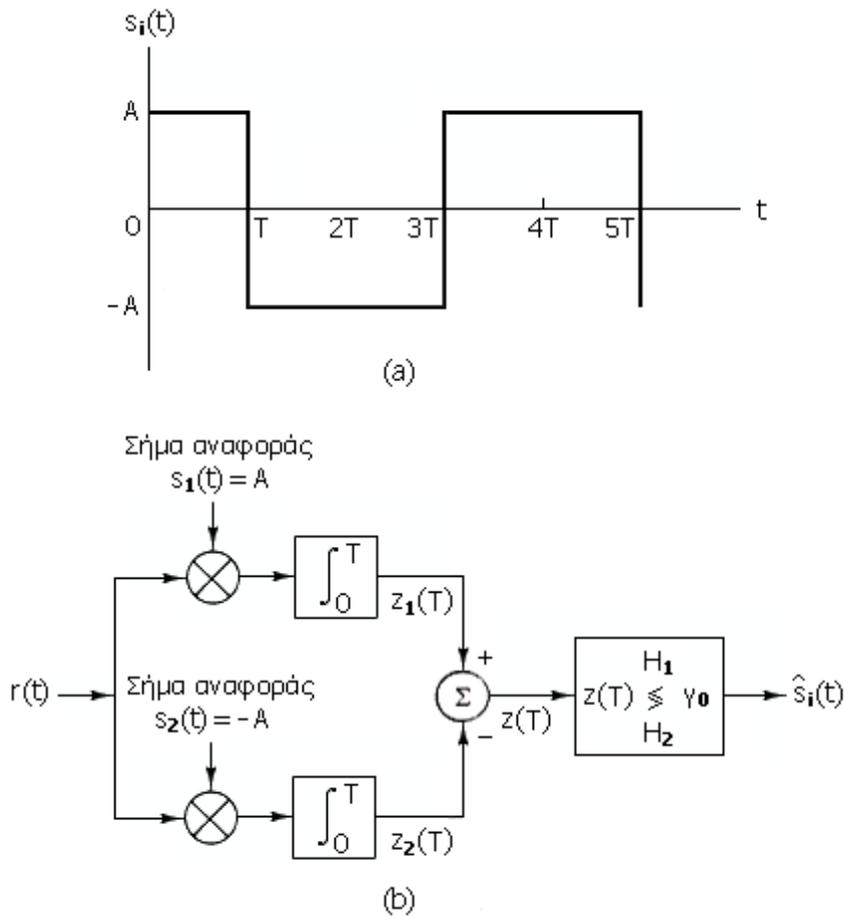
$$P_\beta = Q\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\frac{2A^2T}{N_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right),$$

όπου E_b η μέση ενέργεια ενός bit (A^2T).

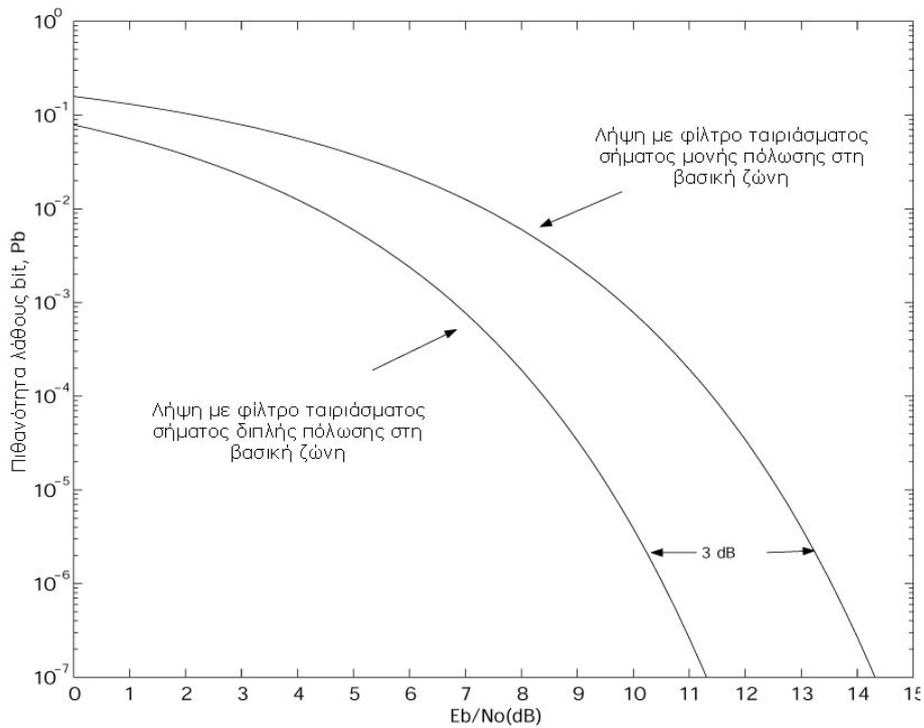
Στο Σχήμα 9.12 βλέπουμε την επίδοση των δύο συστημάτων. Στον κάθετο άξονα έχουμε την πιθανότητα λάθους σε λογαριθμική κλίμακα ενώ στον οριζόντιο άξονα τον λόγο E_b/N_0 σε decibel.

Παρατηρούμε ότι η χρήση διπολικών σημάτων παρέχει μια βελτί-

ωση 3dB σε σχέση με τα μονοπολικά σήματα. Παρόμοια βελτίωση θα δούμε στην περίπτωση και στην ευρυζωνική μετάδοση όταν συγκρίνουμε σήματα BPSK με σήματα FSK. Τα σήματα BPSK συμπεριφέρονται σαν τα μονοπολικά σήματα ενώ τα FSK σαν τα διπολικά.



Σχήμα 9.11: Ανίχνευση σήματος διπλής πόλωσης.



Σχήμα 9.12: Επίδοση συστημάτων μονής και διπλής πόλωσης.

9.4.2 Μετάδοση στη βασική ζώνη με πολλαπλά επίπεδα

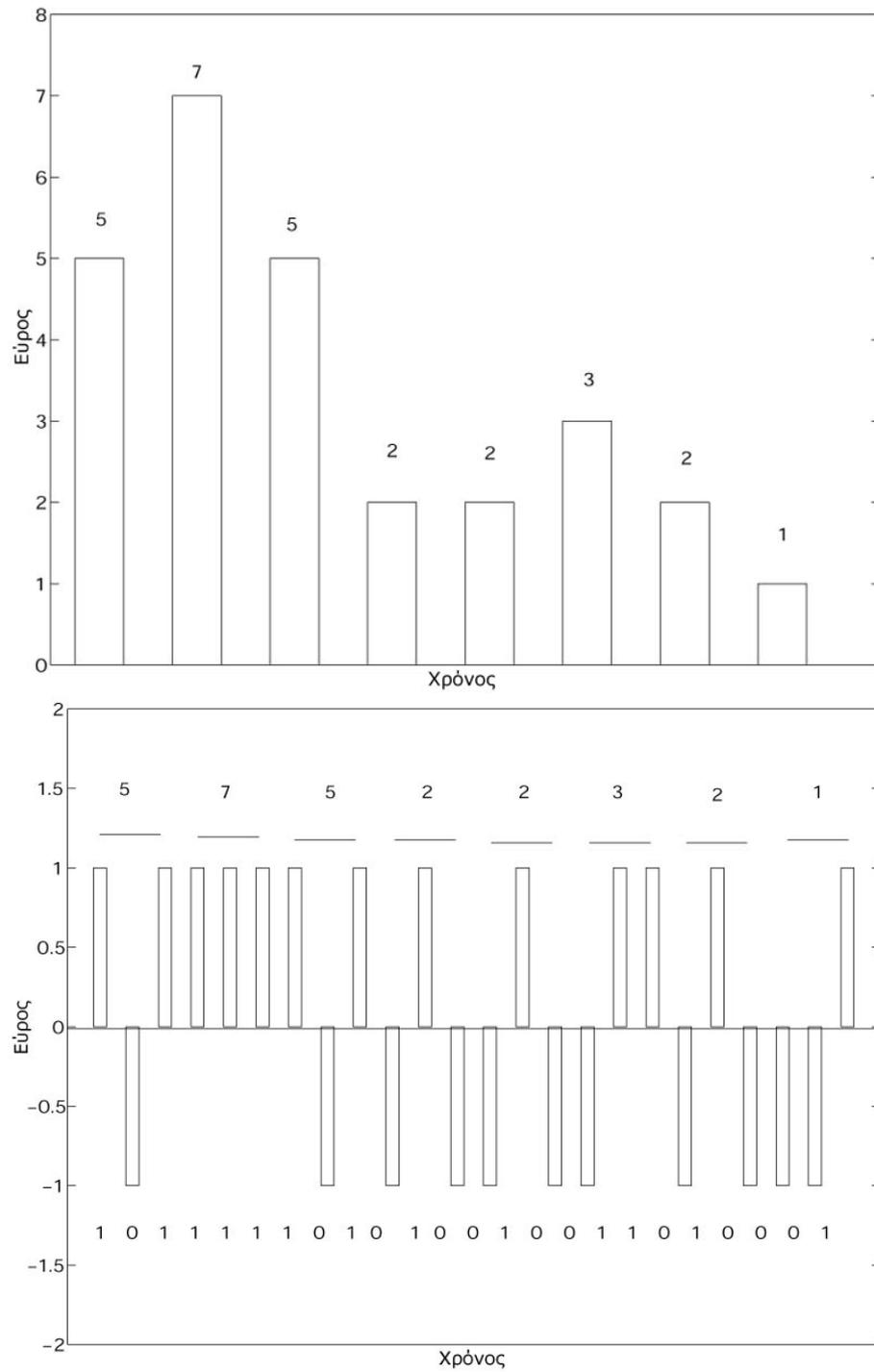
Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι όταν κωδικοποιηθεί ένα σήμα μετά από την μετατροπή του σε bit μεταδίδεται στην βασική ζώνη ψηφίο προς ψηφίο. Η μετάδοση με δυαδική μορφή συχνά οδηγεί σε πολύ μεγάλα εύρη ζώνης. Για το λόγο αυτό σε πολλά συστήματα ομαδοποιούμε μια σειρά των k bit σε μια λέξη και μεταδίδουμε τη λέξη σαν ένα σύνολο. Για να πετύχουμε την μετάδοση στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε παλμούς οι οποίοι έχουν $M = 2^k$ επίπεδα - ώστε να μας δίνεται η δυνατότητα να μεταδίδουμε κάθε λέξη των k bit σαν ένα παλμό ενός συγκεκριμένου επιπέδου. Με τον τρόπο αυτό μια μετάδοση που θα απαιτούσε ταχύτητα R bps, απαιτεί τώρα ταχύτητα R/k

συμβόλων (λέξεων) το δευτερόλεπτο, μειώνοντας έτσι τις απαιτήσεις σε εύρος ζώνης.

Η μετάδοση με πολλαπλά επίπεδα φαίνεται στο Σχήμα 9.13. Στο πάνω μέρος του σχήματος φαίνεται μετάδοση με 8 επίπεδα, ενώ στο κάτω με δύο επίπεδα. Να παρατηρήσουμε ότι στο δέκτη πρέπει να γίνει διαχωρισμός μεταξύ δύο επιπέδων στην δυαδική περίπτωση, ενώ στην περίπτωση των οκτώ επιπέδων ο διαχωρισμός αυτός είναι δυσκολότερος καθώς πρέπει να διακρίνουμε μεταξύ οκτώ επιπέδων. Υποθέτοντας ότι χρησιμοποιούμε την ίδια ενέργεια (για να κάνουμε ακριβοδίκαιη σύγκριση) και τα σήματα διαρκούν τον ίδιο χρόνο (δεν υπάρχει καθυστέρηση στη μια περίπτωση έναντι της άλλης) η τεχνική PCM μας δίνει ευκολότερη αποκωδικοποίηση, ενώ η τεχνική κωδικοποίησης με πολλαπλά επίπεδα χαμηλότερες ταχύτητες (δηλαδή μικρότερα απαιτούμενα εύρη ζώνης)

9.4.3 Άλλες τεχνικές μείωσης εύρους ζώνης

Το εύρος ζώνης (ή φάσμα) είναι ένας πόρος του συστήματος που πρέπει να χρησιμοποιούμε με φειδώ. Σε όλα τα συστήματα υπάρχει ένας ανώτατος ρυθμός μετάδοσης που μπορούμε να πετύχουμε (γνωστός σαν χωρητικότητα του καναλιού). Για το λόγο αυτό υπάρχει έντονο ενδιαφέρον για την μείωση του ρυθμού μετάδοσης σε ένα κανάλι κατά τη στιγμή της παραγωγής του σήματος. Μια τέτοια περίπτωση είναι η μετάδοση φωνής μέσα από το τηλεφωνικό δίκτυο. Σε συνηθισμένες εφαρμογές ψηφιακής φωνής, η φωνή χρησιμοποιεί ένα εύρος ζώνης μικρότερο των 4 KHz το οποίο απαιτεί, σύμφωνα με το θεώρημα της δειγματοληψίας, τουλάχιστον 8000 δείγματα το δευτερόλεπτο. Κάθε δείγμα κωδικοποιείται με 8 bit ανά δείγμα, δίνοντας μας μια ταχύτητα ίση με 64 Kbps. Παρατηρώντας ότι οι αλλαγές στο σήμα της φωνής δεν είναι συχνά πολύ μεγάλες ή χρησιμοποιώντας τρόπους πρόβλεψης του σήματος φωνής μπορούμε να επιτύχουμε σημαντικά μικρότερους ρυθμούς μετάδοσης της φωνής. Τέτοιους τρόπους θα δούμε στην ενότητα αυτή.

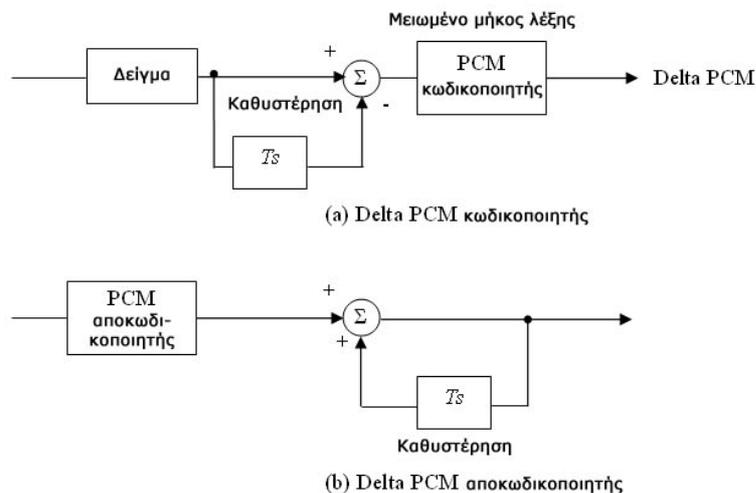


Σχήμα 9.13: Μετάδοση παλμοκωδικής διαμόρφωσης. (α) Μετάδοση οκτώ επιπέδων, (β) Μετάδοση δύο επιπέδων.

Διαμόρφωση Δέλτα PCM

Μια τεχνική η οποία οδηγεί στην μείωση του ρυθμού μετάδοσης είναι η χρήση των μεταβολών μεταξύ των διαφόρων δειγμάτων αντί της αποστολής ολοκλήρου του δείγματος. Η απλούστερη μορφή ενός τέτοιου συστήματος λέγεται Δέλτα PCM. Επειδή η διαφορά μεταξύ διαδοχικών σημάτων δεν είναι μεγάλη μπορούμε να την κωδικοποιήσουμε χρησιμοποιώντας μικρότερο αριθμό επιπέδων κατά την κωδικοποίηση PCM. Μπορούμε να επιτύχουμε μια τέτοια κωδικοποίηση με ένα κύκλωμα όπως αυτό του Σχήματος 9.14. Με την τεχνική αυτή μπορούμε να μειώσουμε τον απαιτούμενο αριθμό bit τουλάχιστον κατά 1 bit/δείγμα. Στο παράδειγμα της φωνής που αναφέραμε παραπάνω μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 7 bits αντί για 8 bits, με τελική ταχύτητα $7 \times 8 = 56$ kbps.

Να προσέξουμε εδώ ότι η μείωση αυτή έχει κάποιο κόστος στην ποιότητα του σήματος στις περιπτώσεις που έχουμε μεγάλες αλλαγές στο σήμα, γιατί παρατηρείται συχνότερα το φαινόμενο του κορεσμού του κωδικοποιητή.



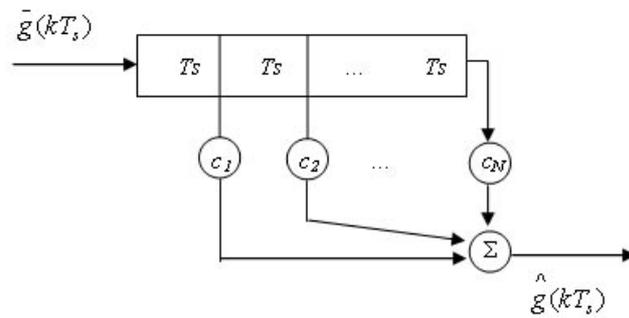
Σχήμα 9.14: Πομπός και δέκτης Δέλτα PCM.

Διαφορικό PCM (Differential PCM, DPCM)

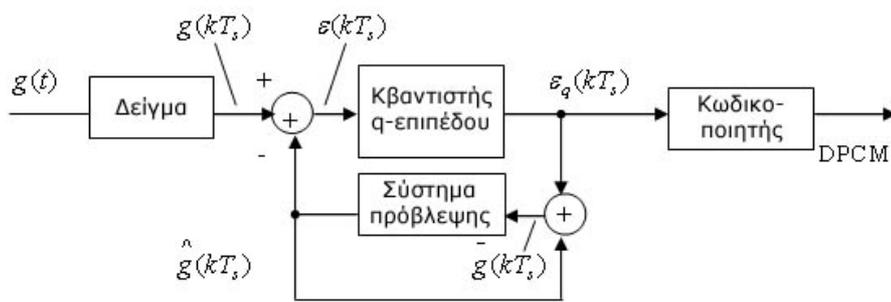
Στα περισσότερα σήματα υπάρχει μια αλληλοσυσχέτιση μεταξύ διαδοχικών δειγμάτων. Δηλαδή η ίδια ή παρόμοια πληροφορία μεταδίδεται σε διαδοχικά δείγματα. Η τεχνική του Διαφορικού PCM (Differential PCM, DPCM) χρησιμοποιεί ένα αλγόριθμο ο οποίος προβλέπει την μέλλουσα τιμή της πληροφορίας με βάση την τωρινή τιμή. Περιμένει την καινούρια τιμή και τότε μεταδίδει τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της προβλεπόμενης τιμής. Η διαφορά αυτή είναι συνήθως μικρότερη από την τιμή του σήματος και μπορεί να κωδικοποιηθεί με λιγότερα bit/δείγμα δίνοντάς μας σημαντικά μειωμένους ρυθμούς μετάδοσης. Στον δέκτη χρησιμοποιούμε τον ίδιο αλγόριθμο πρόβλεψης και προσθέτουμε στη ληφθείσα τιμή την τιμή της πρόβλεψης. Στο Σχήμα 9.15 βλέπουμε ένα διάγραμμα κωδικοποίησης και ένα αποκωδικοποίησης με Διαφορικό PCM).

Προσαρμοζόμενο DPCM (Adaptive DPCM, ADPCM)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αλγόριθμους πρόβλεψης οι οποίοι προσαρμόζονται στις στατιστικές ιδιότητες του σήματος που λαμβάνεται. Δηλαδή το σύστημα πρόβλεψης δεν έχει σταθερούς συντελεστές αλλά συντελεστές που προσαρμόζονται στις τιμές του εισερχόμενου σήματος. Έτσι μπορούμε να παρακολουθήσουμε καλύτερα χρονικά διαστήματα όπου το σήμα αυξάνει ή μειώνεται γρήγορα ή στιγμές που το σήμα δεν παρουσιάζει σημαντικές μεταβολές. Στο Σχήμα 9.16 βλέπουμε ένα κωδικοποιητή και ένα αποκωδικοποιητή ADPCM σύμφωνα με το πρότυπο ITU G.721. Ο κωδικοποιητής αυτός χρησιμοποιεί λέξεις κώδικα 15 επιπέδων, 4 bits για να μεταφέρει την πληροφορία της διαφοράς του σήματος εισόδου και του εκτιμημένου σήματος. Η ποιότητα ενός σήματος 32 kbps ADPCM για μετάδοση φωνής είναι ίδια με αυτή του συστήματος PCM των 64 kbps. Για συστήματα που εισάγουν λάθη κατά τη μετάδοση το ADPCM παρέχει ακόμη καλύτερη υποκειμενική ποιότητα στη φωνή.

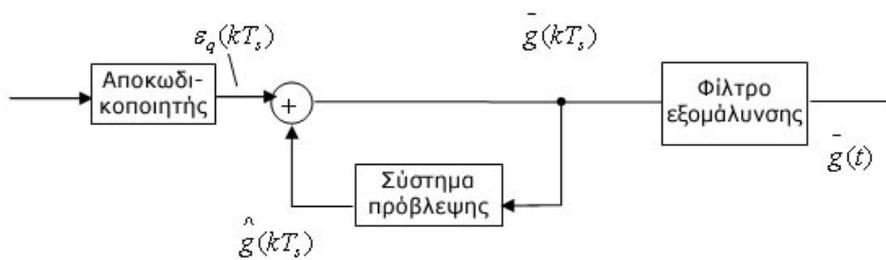


(a)



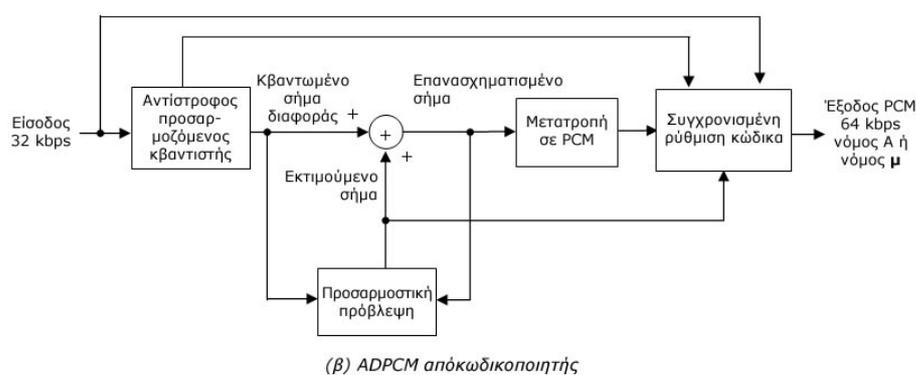
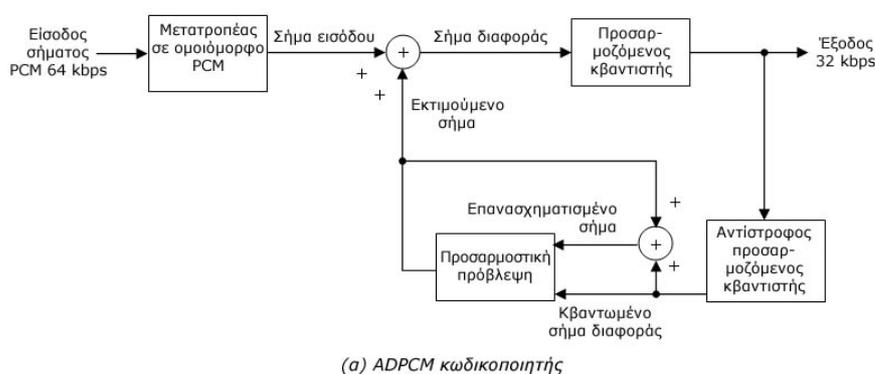
(1) DPCM κωδικοποιητής

(β)



(2) DPCM αποκωδικοποιητής

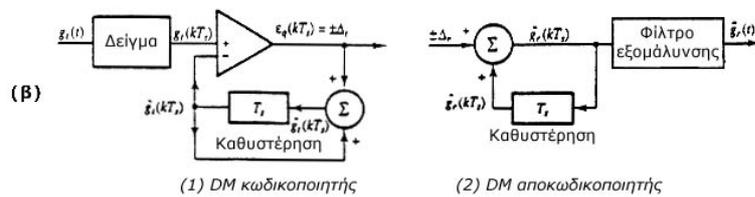
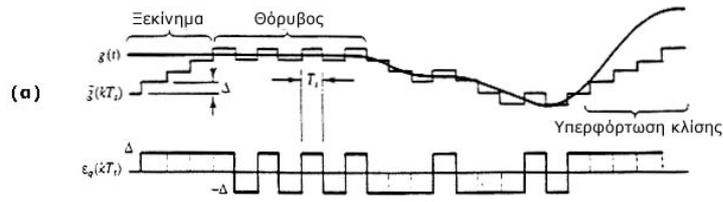
Σχήμα 9.15: Πομπός και δέκτης DPCM.



Σχήμα 9.16: Πομπός και δέκτης ADPCM.

9.4.4 Διαμόρφωση Δέλτα

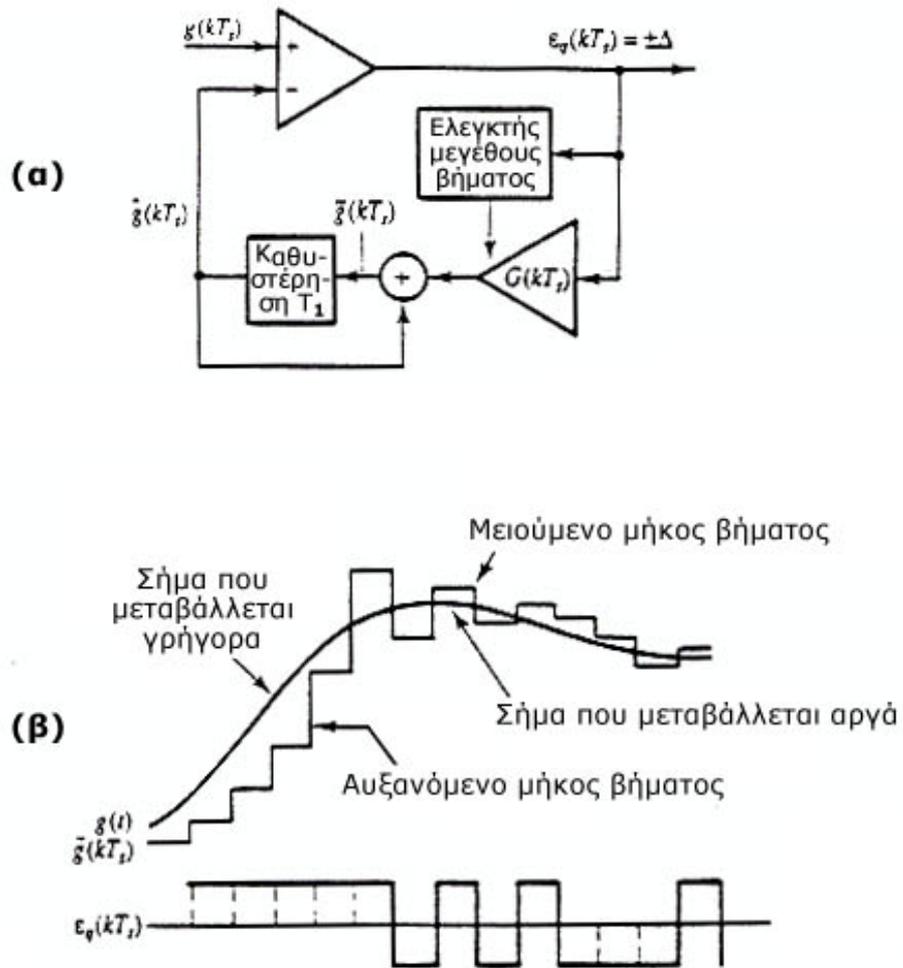
Όταν οι αλλαγές σ' ένα σήμα δεν είναι μεγάλες μπορούμε να στείλουμε μόνο 1 bit/δείγμα, δείχνοντας έτσι την αύξηση ή τη μείωση της τιμής του δείγματος. Μπορούμε να το κάνουμε αυτό με την αντικατάσταση του συστήματος κβάντωσης και διαφοράς στο κύκλωμα του DPCM με ένα απλό συγκριτή (βλέπε Σχήμα 6.15α). Βέβαια όταν το σύστημα αλλάζει πολύ γρήγορα η τεχνική αυτή δεν μπορεί να παρακολουθήσει τις αλλαγές αποτελεσματικά εισάγοντας μεγάλο θόρυβο. Η κατάσταση αυτή είναι γνωστή σαν υπερφόρτωση της κλίσης (slope overload).



Σχήμα 9.17: Πομπός και δέκτης Delta.

9.4.5 Προσαρμοσμένη διαμόρφωση Δέλτα (Adaptive Delta Modulation, ADM)

Για να πετύχουμε καλύτερη απόδοση από την απλή διαμόρφωση Δέλτα μπορούμε να κάνουμε δειγματοληψία με ρυθμό μεγαλύτερο του Nyquist. Συνήθως ο ρυθμός αυτός είναι πολλαπλάσιος του ελαχίστου. Θα μπορούσαμε επίσης να έχουμε μεταβλητό μήκος βήματος, ώστε σε περιπτώσεις συνεχούς αύξησης να καταφέρνουμε να πλησιάζουμε το σήμα γρηγορότερα. Η τεχνική αυτή είναι γνωστή σαν προσαρμοσμένη Διαμόρφωση Δέλτα και φαίνεται στο Σχήμα 9.18. Το ADM έχει συμπεριφορά καλύτερη από το απλό DM κατά 8 με 14 db. Σε σύστημα φωνής μπορεί να πετύχουμε ρυθμούς της τάξεως των 32 Kbps και συχνά των 16 kbps.



Σχήμα 9.18: Πομπός και δέκτης ADM.

9.5 Ζωνοπερατές ψηφιακές τεχνικές διαμόρφωσης

Στις ψηφιακές τεχνικές διαμόρφωσης που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το σήμα μεταδίνονταν στις συχνότητες που είχε δημιουργηθεί με την διαμόρφωση ενός ψηφίου (bit ή συμβόλου) σε ένα άλλο που είχε ορισμένα χαρακτηριστικά που βοηθούν στον συγχρονισμό, την εύκολη αποκωδικοποίηση κτλ.

Όπως αναφέραμε και στην περίπτωση των αναλογικών επικοινωνιών για να μπορέσουμε να στείλουμε το σήμα σε μεγάλες αποστάσεις και να χρησιμοποιήσουμε κεραίες λήψης μικρού μεγέθους χρησιμοποιούμε συχνότητες υψηλότερες των συχνοτήτων του σήματος πληροφορίας. Τέτοιες τεχνικές χρησιμοποιούνται συχνά και στις ψηφιακές επικοινωνίες. Ξεκινάμε δηλαδή από ένα φέρον κύμα –συνήθως– ένα συνημιτονοειδές κύμα της μορφής

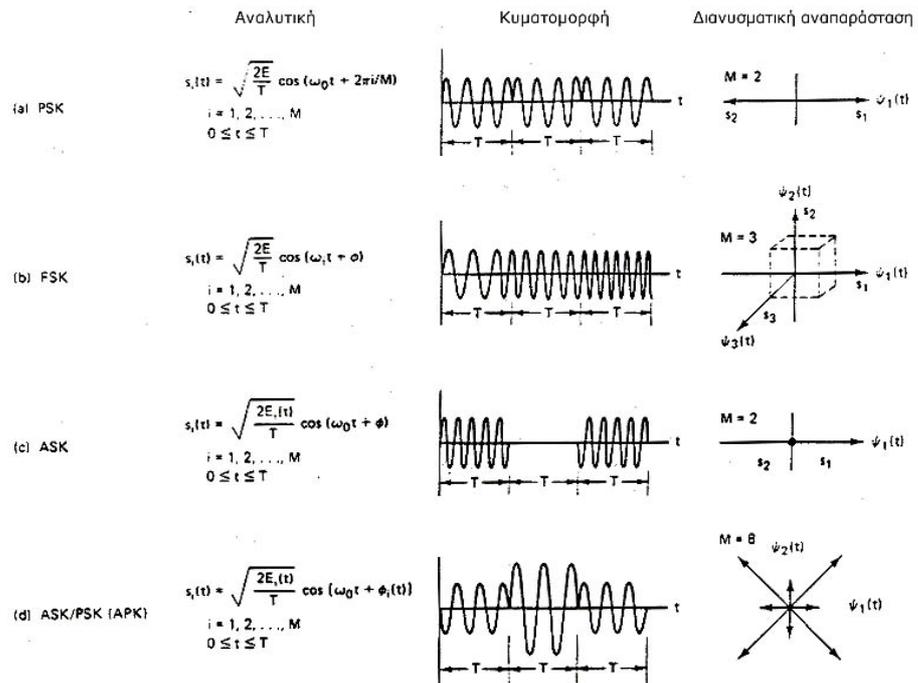
$$s(t) = A(t) \cos(\omega_c t + \theta(t))$$

και διαμορφώνουμε το πλάτος του, την συχνότητά του ή τη φάση του σύμφωνα με το σήμα πληροφορίας². Οι ψηφιακές μορφές διαμόρφωσης είναι γνωστές με τον όρο Shift Keying και μπορούν να διακριθούν σε:

- Amplitude Shift Keying (ASK): όταν διαμορφώνουμε το πλάτος,
- Frequency Shift Keying (FSK): όταν διαμορφώνουμε τη συχνότητα, και
- Phase Shift Keying (PSK): όταν διαμορφώνουμε τη φάση.

²Συνήθως χρησιμοποιούμε τη μορφή $s(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_c t + \theta(t))$, όπου E η ενέργεια και T η διάρκεια του σήματος. Η μορφή αυτή διευκολύνει τους υπολογισμούς της ενέργειας και τις συγκρίσεις μεταξύ των διαφόρων μορφών διαμόρφωσης.

Συχνά συναντάμε συνδυασμούς των παραπάνω τεχνικών, ιδιαίτερα συνδυασμό του ASK με το PSK που μας δίνει το APK, όπως επίσης και συνδυασμό αναλογικών και ψηφιακών μορφών, όπως στην περίπτωση των τεχνικών Continuous Phase Modulation (CPM). Οι διάφοροι τρόποι διαμόρφωσης φαίνονται στο Σχήμα 9.19.



Σχήμα 9.19: Διάφορες μορφές ζωνοπερατών ψηφιακών μορφών διαμόρφωσης.

Η αποδιαμόρφωση ενός ψηφιακά διαμορφωμένου σήματος μπορεί να γίνει με τη χρήση της συχνότητας και της φάσης του φέροντος κύματος, οπότε έχουμε ομόδυνη ανίχνευση ή αποδιαμόρφωση ή μπορεί να γίνει χωρίς γνώση της φάσης οπότε έχουμε μη ομόδυνη (noncoherent) αποδιαμόρφωση. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε πολύπλοκους αποδιαμορφωτές ενώ στη δεύτερη έχουμε απλούστερους αποδιαμορφωτές αλλά χειρότερη απόδοση.

Για να γίνει ευκολότερη η κατανόηση της διαμόρφωσης και ιδιαίτερα της αποδιαμόρφωσης των ψηφιακών σημάτων χρησιμοποιούμε ένα διανυσματικό τρόπο παράστασης των σημάτων. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι κάθετοι άξονες αντιστοιχούν σε σήματα διαφορετικής συχνότητας. Δηλαδή κάθε άξονας παριστάνει το πλάτος του αντίστοιχου συνημιτόνου. Θυμηθείτε ότι δύο συνημίτονα διαφορετικής συχνότητας αποτελούν δύο ορθογώνια μεταξύ τους σήματα, όπως ορθογώνια μεταξύ τους σήματα αποτελεί ένα συνημίτονο και ένα ημίτονο της ίδιας συχνότητας.

Στην περίπτωση του σχήματος 6.17, στο PSK: $y_1(t) = \cos \omega_c t$, ενώ στο FSK: $y_1(t) = \cos \omega_{c1}(t)$, $y_2(t) = \cos \omega_{c2}(t)$ και $y_3(t) = \cos \omega_{c3}(t)$. Στην περίπτωση του ASK/PSK κάθε διάνυσμα παριστάνει ένα σήμα της μορφής $A_k \cos(\omega_c t + \theta_k)$, όπου A_k το πλάτος του σήματος και θ_k η φάση.

Phase Shift Keying

Η τεχνική αυτή διαμόρφωσης είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη τεχνική. Το σήμα δίνεται από τη σχέση

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_c t + \theta_i(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

όπου η φάση παίρνει M διακριτές τιμές οι οποίες συνήθως δίνονται από τη σχέση:

$$\theta_i(t) = \frac{2\pi i}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Στην περίπτωση που $M = 2$ έχουμε το Binary PSK ή BPSK. Στο σύστημα αυτό έχουμε δύο φάσεις, τη φάση 0° και τη φάση 180° , δηλαδή το λογικό 0 παριστάνεται σαν φάση 0° και το λογικό 1 σαν φάση 180° , με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα.

Εάν έχουμε PSK με πολλαπλά επίπεδα, το γνωστό σαν M-ary PSK ή MPSK τότε τα διάφορα επίπεδα του σήματος παριστάνονται στον διανυσματικό χώρο σαν διανύσματα ίσου πλάτους, αλλά με φάσεις $\frac{2\pi i}{M}$, $i = 1, 2, \dots, M$.

Frequency Shift Keying

Τα σήματα στην τεχνική αυτή δίνονται από τη σχέση

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(\omega_i t + \theta), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

όπου οι συχνότητες ω_i παίρνουν M διακριτές τιμές. Η φάση θ είναι τυχαία και μπορεί να την υποθέσουμε ίση με το μηδέν. Σε διανυσματική μορφή μπορεί να περιγράψουμε συστήματα μέχρι $M = 3$, οπότε κάθε άξονας αντιστοιχεί σε μία διακριτή συχνότητα. Συνήθως οι συχνότητες είναι δυνάμεις του 2 (δηλαδή $M = 2, 4, 8, 16$, κτλ). Τα σήματα αυτά λέγονται ορθογώνια, σε αντίθεση με τα σήματα *BPSK* όπου το ένα σήμα βρίσκει τους αντίποδες του άλλου.

Amplitude Shift Keying (ASK)

Ένα σήμα διαμορφωμένο με την τεχνική ASK δίνεται από τη σχέση

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_i t + \theta),$$

όπου το εύρος $\sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}}$ μπορεί να παίρνει M διακριτές τιμές, και θ είναι μία φάση την οποία θα θεωρήσουμε ίση με το μηδέν.

Εάν $M = 2$ μπορεί να έχουμε δύο πλάτη: ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο. Εάν το ελάχιστο είναι ίσο με μηδέν τότε το σήμα $s_i(t)$ έχει ένα μέγιστο πλάτος ενώ το δεύτερο σχήμα είναι μηδενικό. Η μορφή αυτή γνωστή και σαν on-off keying είναι από τις πρώτες μορφές ψηφιακής διαμόρφωσης και χρησιμοποιήθηκε στον τηλεγράφο. Συνήθως ASK συνδυάζεται με PSK και μας δίνει το APK.

Amplitude Phase Keying (APK)

Η μορφή αυτή ψηφιακής διαμόρφωσης συνδυάζει ASK και PSK, δίνοντας μας σήματα που έχουν την ακόλουθη έκφραση

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_i(t)}{T}} \cos(\omega_c t + \theta_i(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Αλλάζοντας ταυτόχρονα το πλάτος και την φάση μπορούμε να πετύχουμε μια μεγάλη ποικιλία τρόπων διαμόρφωσης. Οι τεχνικές αυτές χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε συστήματα όπως τα modem που μας επιτρέπουν την μετάδοση ψηφιακών σημάτων μέσα από το αναλογικό τηλεφωνικό δίκτυο.

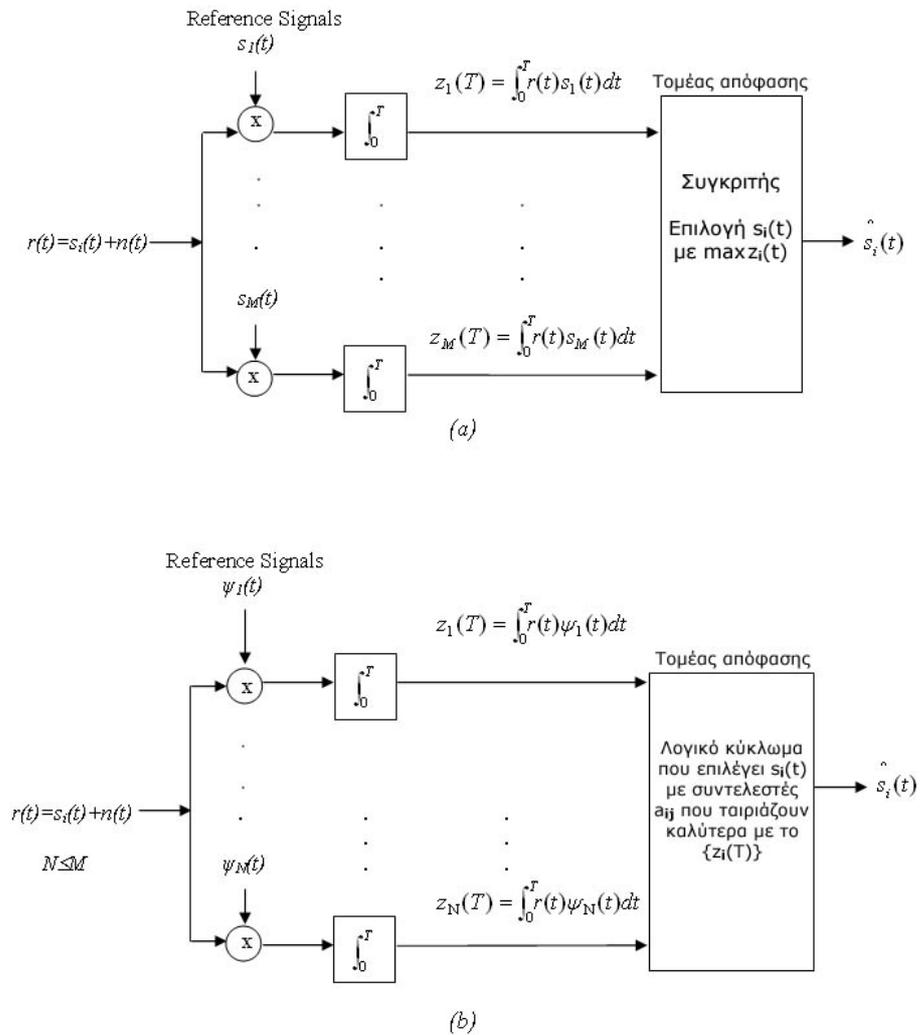
9.5.1 Ανίχνευση / Αποδιαμόρφωση ζωνοπερατών ψηφιακών σημάτων

Η ανίχνευση/αποδιαμόρφωση ζωνοπερατών ψηφιακών σημάτων ακολουθεί την ίδια λογική με αυτή που συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για την αποδιαμόρφωση ψηφιακών σημάτων διαμορφωμένων στην βασική ζώνη. Απαιτούνται δηλαδή δύο στάδια: το στάδιο του φίλτρου ταιριάσματος και το στάδιο της απόφασης (βλέπε Σχήμα 9.20).

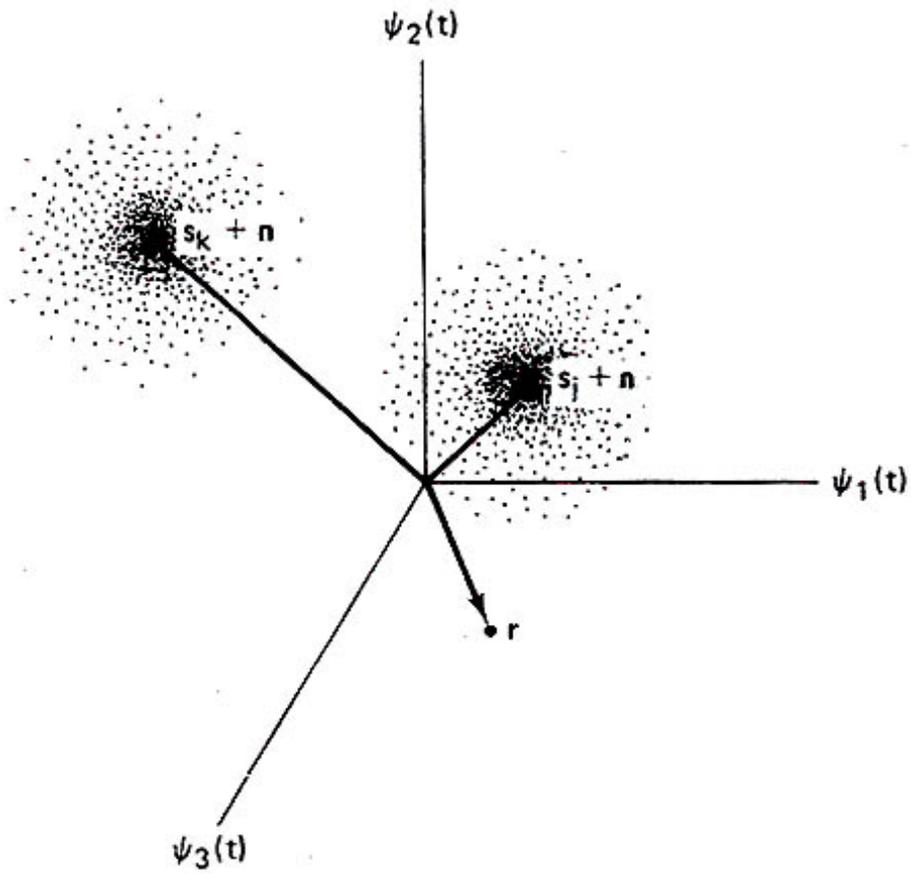
Στο φίλτρο ταιριάσματος χρησιμοποιούμε συσχετιστές (correlators) σε παράλληλους κλάδους ίσους με τον αριθμό των μηνυμάτων (ή συνήθως για να μειώσουμε τον αριθμό των κλάδων ίσο με τον αριθμό των σημάτων βάσης $\cos\omega_i(t)$).

Στο στάδιο της απόφασης χρησιμοποιούμε την γεωμετρική αναπαράσταση των σημάτων σαν σημεία στο χώρο. Ο θόρυβος μεταβάλλει την αρχική θέση του σημείου, οπότε κάθε σημείο δημιουργεί μια περιοχή επιρροής γύρω του. Αν λάβουμε κάποιο σήμα αναζητούμε το σημείο το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στο ληφθέν σήμα (βλέπε Σχήμα 9.21).

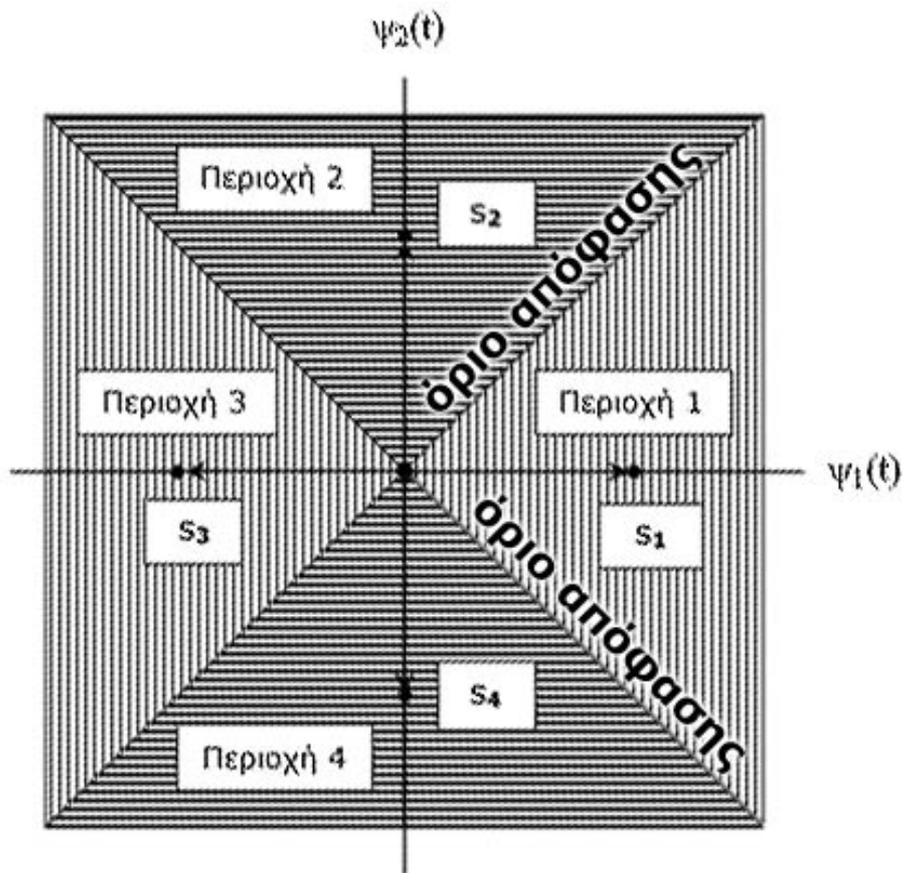
Στο Σχήμα 9.22 βλέπουμε τον διαχωρισμό των περιοχών σε ένα σύστημα Quadrature PSK, QPSK ($M = 4$). Βλέπουμε τα αρχικά σήματα s_1, s_2, s_3, s_4 και τις περιοχές επιρροής ή απόφασης. Αν ένα σήμα ληφθεί στην περιοχή 1 τότε αποκωδικοποιείται σαν s_1 και ούτω καθεξής.



Σχήμα 9.20: (α) Συσχετιστής δέκτης με σήματα αναφοράς $\{s_i(t)\}$
 (β) Συσχετιστής δέκτης με σήματα αναφοράς $\{\psi_i(t)\}$.

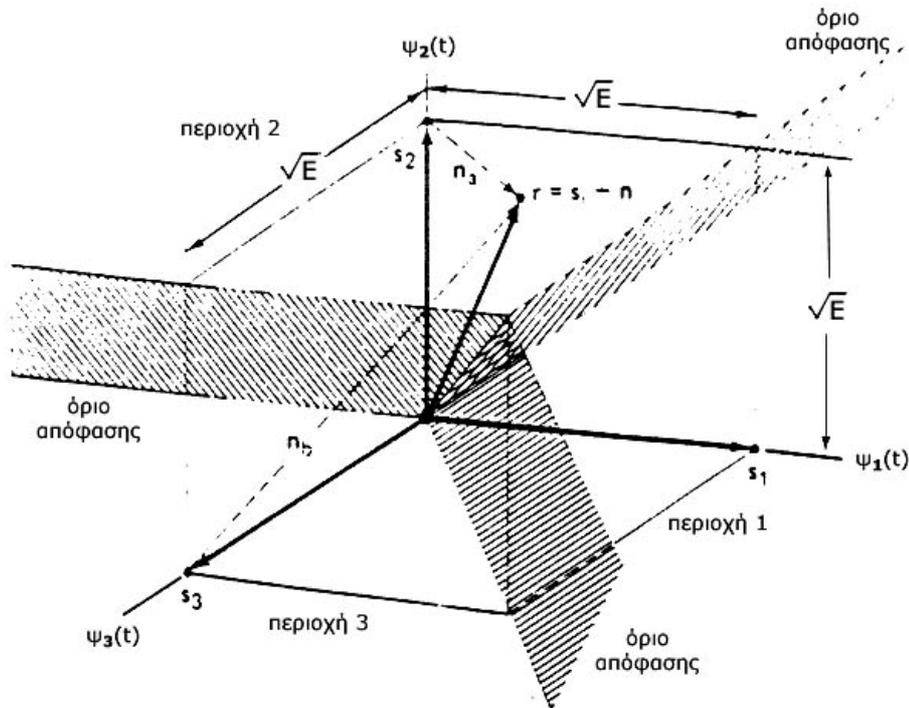


Σχήμα 9.21: Σήματα και θόρυβος: Περιοχές επιρροής.



Σχήμα 9.22: Χώρος σήματος και περιοχές απόφασης για ένα σύστημα QPSK.

Στο Σχήμα 9.23 βλέπουμε τον διαχωρισμό του χώρου σε περιοχές απόφασης σε ένα σύστημα FSK με $k = 3$.

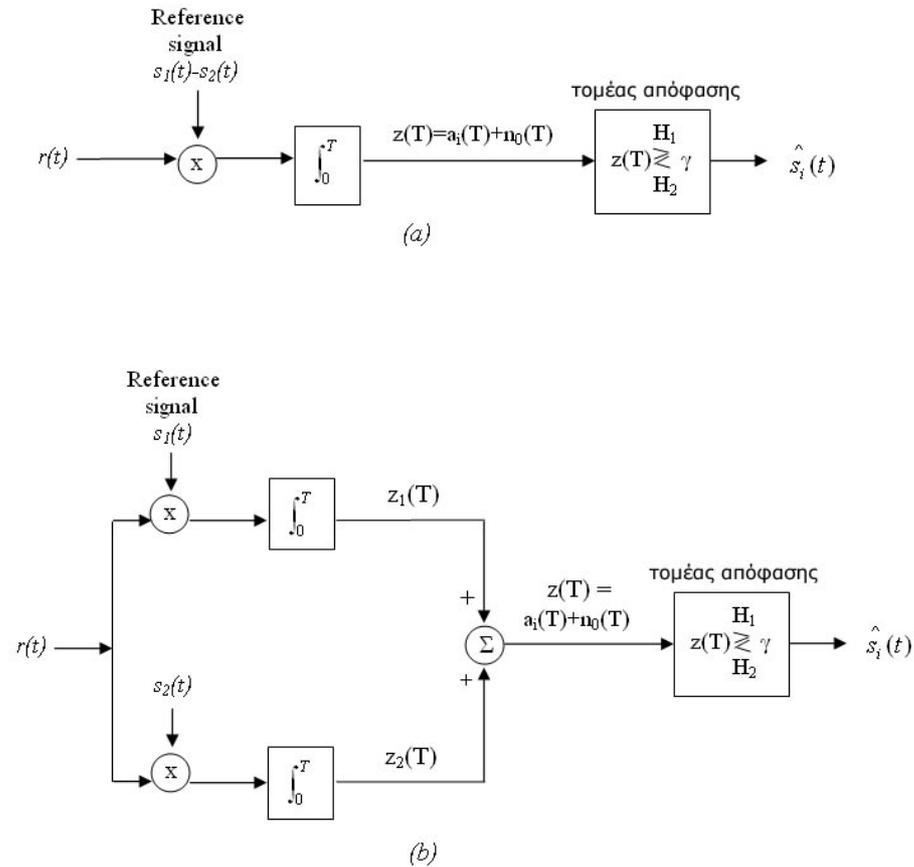


Σχήμα 9.23: Χώρος σήματος και περιοχές απόφασης για ένα σύστημα FSK με $k=3$.

Αποδιαμόρφωση ζωνοπερατών ψηφιακών συστημάτων

Στο Σχήμα 9.24 φαίνονται διάφοροι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να αποδιαφορφώσουμε σήματα στην ευρεία ζώνη. Ανάλογα με τα σήματα βάσης που χρησιμοποιούμε οι αποδιαμορφωτές μπορεί να έχουν ένα ή περισσότερους κλάδους και το σύστημα απόφασης να ελέγχει τις κατάλληλες παραμέτρους. Στο Σχήμα 9.25 βλέπουμε την ομόδυνη αποδιαμόρφωση ενός σήματος MPSK, όπου χρησιμοποιούνται δύο κλάδοι και στο στάδιο απόφασης συγκρίνονται οι γωνίες των

σημάτων.

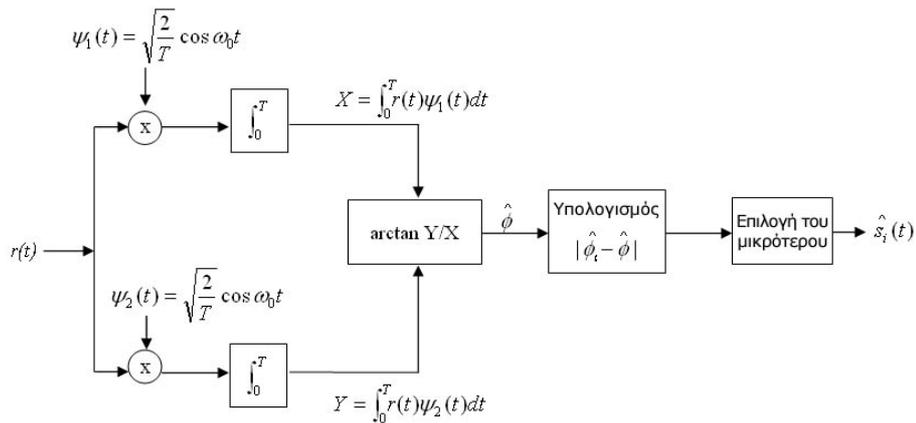


Σχήμα 9.24: Δυαδικός συσχετιστής δέκτης. (α) με τη χρήση ενός συσχετιστή (β) με τη χρήση δύο συσχετιστών.

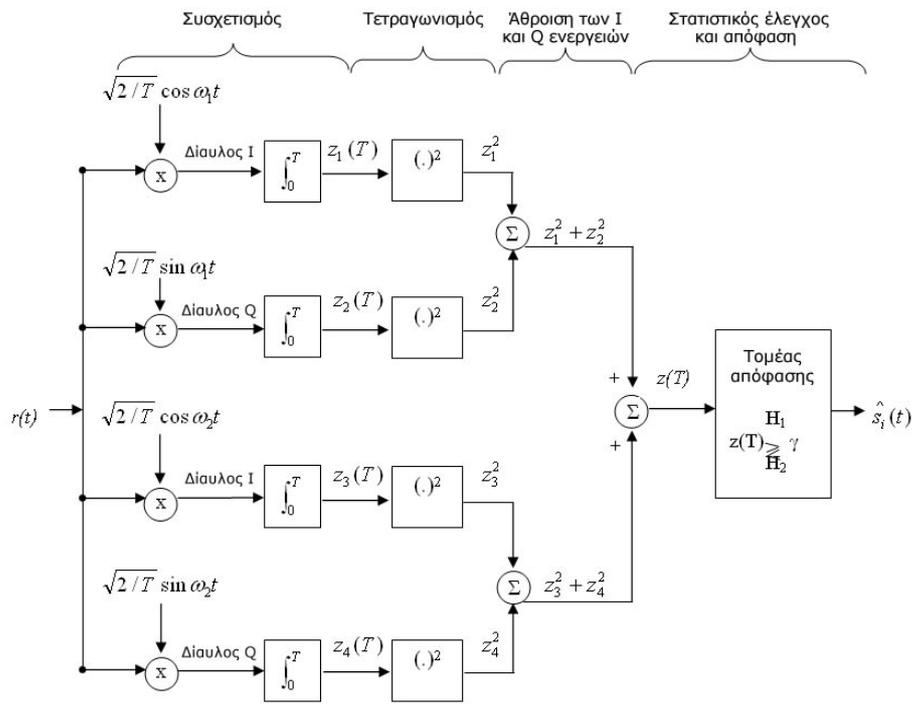
Εάν στο Σχήμα 9.25 χρησιμοποιήσουμε σαν σήματα αναφοράς τα $\cos\omega_i(t)$ τότε έχουμε ένα ομόδυνο αποδιαμορφωτή FSK.

Στα συστήματα PSK πολλές φορές χρησιμοποιούμε μη ομόδυνη αποδιαμόρφωση γνωστή σαν Differentially coherent detection όπου χρησιμοποιείται η διαφορά των φάσεων και όχι η ίδια η φάση για την αποδιαμόρφωση. Το σύστημα αυτό έχει απόδοση χειρότερη του PSK, αλλά ευκολότερη υλοποίηση.

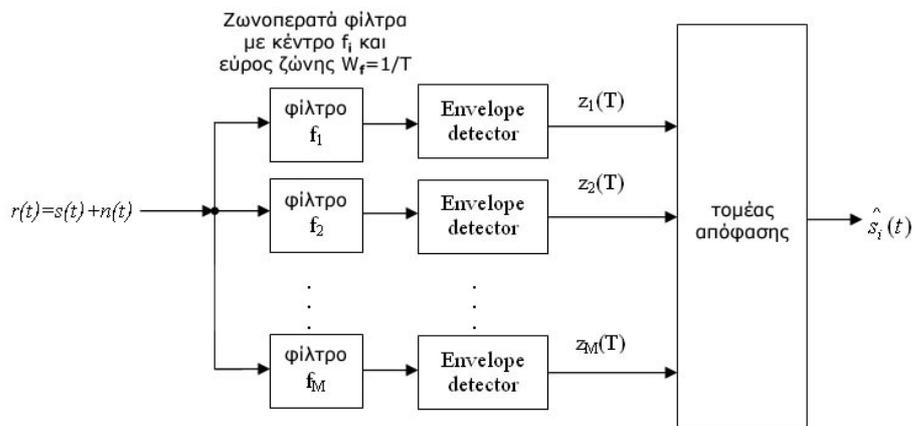
Άλλες φορές κωδικοποιούμε το σήμα PSK με χρήση των διαφορών των φάσεων και το αποκωδικοποιούμε με τη χρήση ομόδυνων ανιχνευτών. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για διαφορικά ομόδυνα αποδιαμορφωμένο PSK, differentially encoded PSK με ομόδυνη αποδιαμόρφωση για λόγους ελαχιστοποίησης της πολυπλοκότητας των χρησιμοποιούμενων κυκλωμάτων. Ένας τέτοιος αποδιαμορφωτής δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει πληροφορία για τη φάση και έτσι χρησιμοποιεί είτε την ενέργεια του σήματος (όπως ο αποδιαμορφωτής του Σχήματος 9.26 ή κάνει ανίχνευση της περιβάλλουσας του σήματος (όπως ο αποδιαμορφωτής του Σχήματος 9.27. Ο πρώτος αποδιαμορφωτής μπορεί να υλοποιηθεί ψηφιακά με συστήματα LSI ενώ ο δεύτερος συνήθως υλοποιείται αναλογικά -ψηφιακή υλοποίησή του απαιτεί τη χρήση του FFT.



Σχήμα 9.25: Αποδιαμορφωτής για σήματα MPSK.



Σχήμα 9.26: Αποδιαμορφωτής με χρήση ενέργειας.



Σχήμα 9.27: Αποδιαμορφωτής με ανίχνευση περιβάλλουσας.

9.5.2 Επίδοση ψηφιακών ζωνοπερατών σημάτων

Η επίδοση συστημάτων ψηφιακής διαμόρφωσης περιλαμβάνει τον υπολογισμό της πιθανότητας λάθους ενός bit αν υπάρχει θόρυβος, ο οποίος υποτίθεται ότι είναι AWGN. Ο υπολογισμός της πιθανότητας αυτής χρησιμοποιεί –όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο– τη συνάρτηση $Q(x)$.

Η πιθανότητα λάθους σε ένα bit ομόδυνα αποδιαμορφωμένο BPSK δίνεται από τη σχέση:

$$P_{\beta} = Q \left[\sqrt{\frac{E_b(1 - \rho)}{N_0}} \right]$$

όπου E_b η μέση ενέργεια ενός bit, $\rho = \cos \theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ των δύο σημάτων και $\frac{N_0}{2}$ η μέση ενέργεια του θορύβου.

Εάν έχουμε BPSK με $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 180$ τότε έχουμε

$$P_{\beta} = Q \left[\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right].$$

επίδοση που είδαμε στα διπολικά σήματα.

Παράδειγμα: Βρείτε την πιθανότητα λάθους σε ένα bit σε ένα σύστημα BPSK με ρυθμό μετάδοσης 1 Mbps. Χρησιμοποιούνται σήματα με $\theta = 0, 180^\circ$ και γίνεται ομόδυνα αποδιαμόρφωση. Η τιμή πλάτους είναι $10V$ και $N_0 = 10^{-1}$ w/Hz.

Απάντηση: $A = \sqrt{\frac{2E_b}{T}} = 10^{-2}V$ γιατί $T = \frac{1}{R} = 10^{-6}$ sec.

$$E_b = \frac{A^2}{2}T = 5 \times 10^{-11} J$$

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 3.16$$

$$P_\beta = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q(3.16) = 8 \times 10^{-4}$$

(χρησιμοποιώντας τον πίνακα για την $Q(x)$)

Πιθανότητα λάθους ενός *bit* για ομόδυνα αποδιαμορφωμένο διαφορικά κωδικοποιημένο PSK:

$$P_\beta = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right].$$

Πιθανότητα λάθους ενός *bit* για ομόδυνα αποδιαμορφωμένο FSK:

$$P_\beta = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

Παρατηρούμε ότι η επίδοση αυτή είναι χειρότερη της επίδοσης του BPSK και αντιστοιχεί με την επίδοση μονοπολικών σημάτων, που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

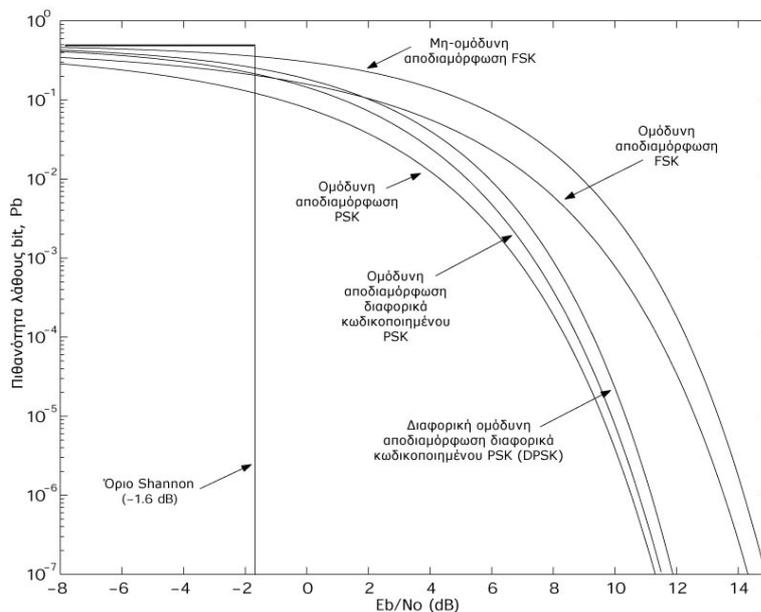
Πιθανότητα λάθους ενός *bit* για μη ομόδυνα αποδιαμορφωμένο FSK:

$$P_\beta = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$$

Πιθανότητα λάθους για ένα *bit* για σύστημα DPSK:

$$P_\beta = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$$

Το Σχήμα 9.28 μας δίνει τη γραφική παράσταση με τη σύγκριση των τρόπων διαμόρφωσης που παρουσιάσαμε παραπάνω. Μπορούμε να δούμε ότι για την τιμή $P_\beta = 10^{-4}$, το καλύτερο σύστημα (BPSK) διαφέρει από το χειρότερο (μη ομόδυνα FSK) κατά 4 dB. Ασφαλώς στο τελευταίο έχουμε ευκολότερη υλοποίηση. Η επιλογή του συστήματος που θα χρησιμοποιήσουμε εξαρτάται πάντα και από άλλους παράγοντες - όπως το εύρος ζώνης, η ποιότητα του καναλιού, κτλ.

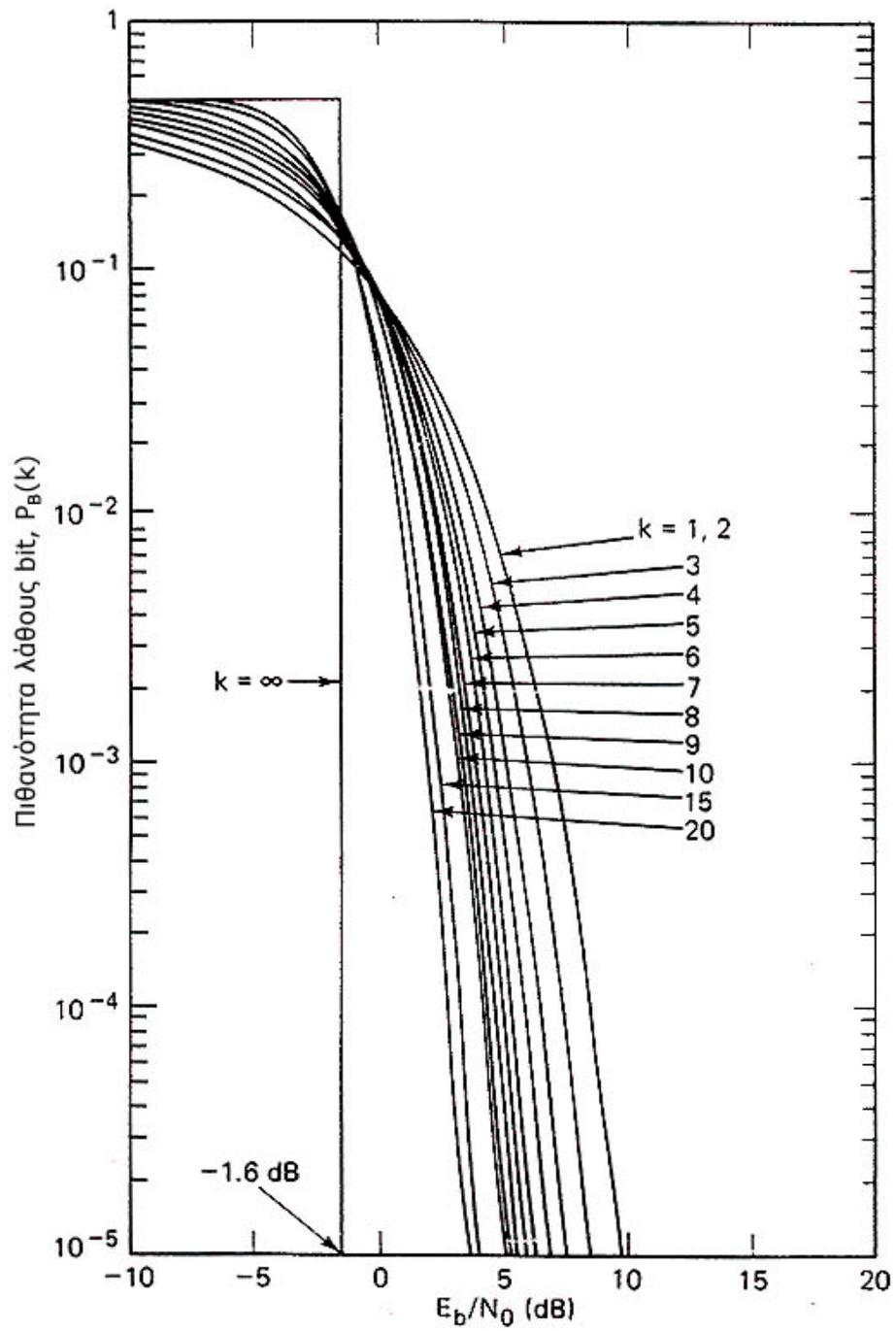


Σχήμα 9.28: Πιθανότητα λάθους ενός bit για διάφορους τύπους ανίχνευσης δυαδικών συστημάτων.

9.5.3 Σήματα με πολλαπλά επίπεδα

Εάν αντί για δυαδικές μορφές επιτρέψουμε και την μετάδοση M σημάτων (όπου $M > 2$) τότε μπορούμε να επιτύχουμε καλύτερους συνδυασμούς εύρους ζώνης, πιθανότητας λάθους και ταχύτητας μετάδοσης.

Στα Σχήματα 9.29 και 9.30 βλέπουμε την επίδοση M -ary FSK και M -ary BPSK. Βλέπουμε στο πρώτο η επίδοση βελτιώνεται με την αύξηση του $M = 2^k$ ενώ στο δεύτερο μειώνεται. Αυτό συμβαίνει γιατί στα συστήματα PSK η αύξηση του αριθμού των φάσεων φέρνει τα σήματα πιο κοντά ενώ στο FSK η απόσταση παραμένει η ίδια. Να παρατηρήσουμε επίσης ότι στο PSK, η χρήση $k = 1$ ή 2 μας δίνει την ίδια επίδοση. Όταν $k = 2$ έχουμε το QPSK (Quaternary PSK). Στην περίπτωση αυτή τα σήματα με $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ είναι ανεξάρτητα από τα σήματα $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ καθώς είναι ορθογώνια.



Σχήμα 9.29: Πιθανότητα λάθους για ομόδυνα αποδιαμόρφωση M-ary FSK.

Για να μπορέσουμε να έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της επίδοσης των συστημάτων διαμόρφωσης πρέπει να συγκρίνουμε και την πιθανότητα λάθους όχι μόνο στο ένα bit αλλά σε ολόκληρη τη λέξη /σύμβολο, $P(E)$ που αποτελείται από $k = \log_2 M$ bits.

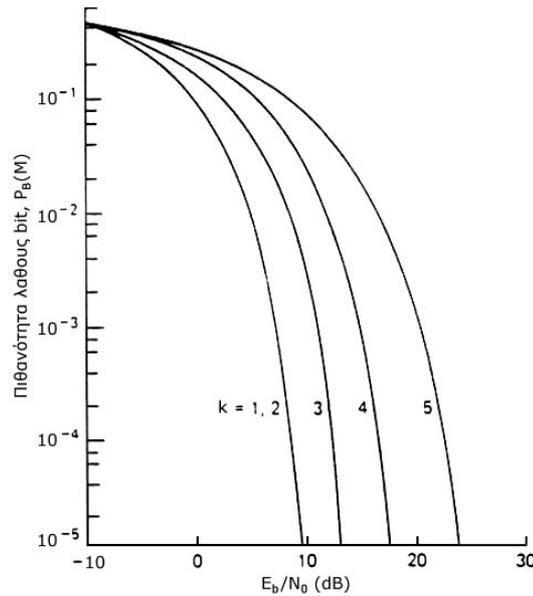
Τα Σχήματα 9.31 και 9.32 μας δίνουν μια γραφική παράσταση της επίδοσης αυτής. Για τα συστήματα MPSK έχουμε ότι:

$$P_E(M) \approx 2Q \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}$$

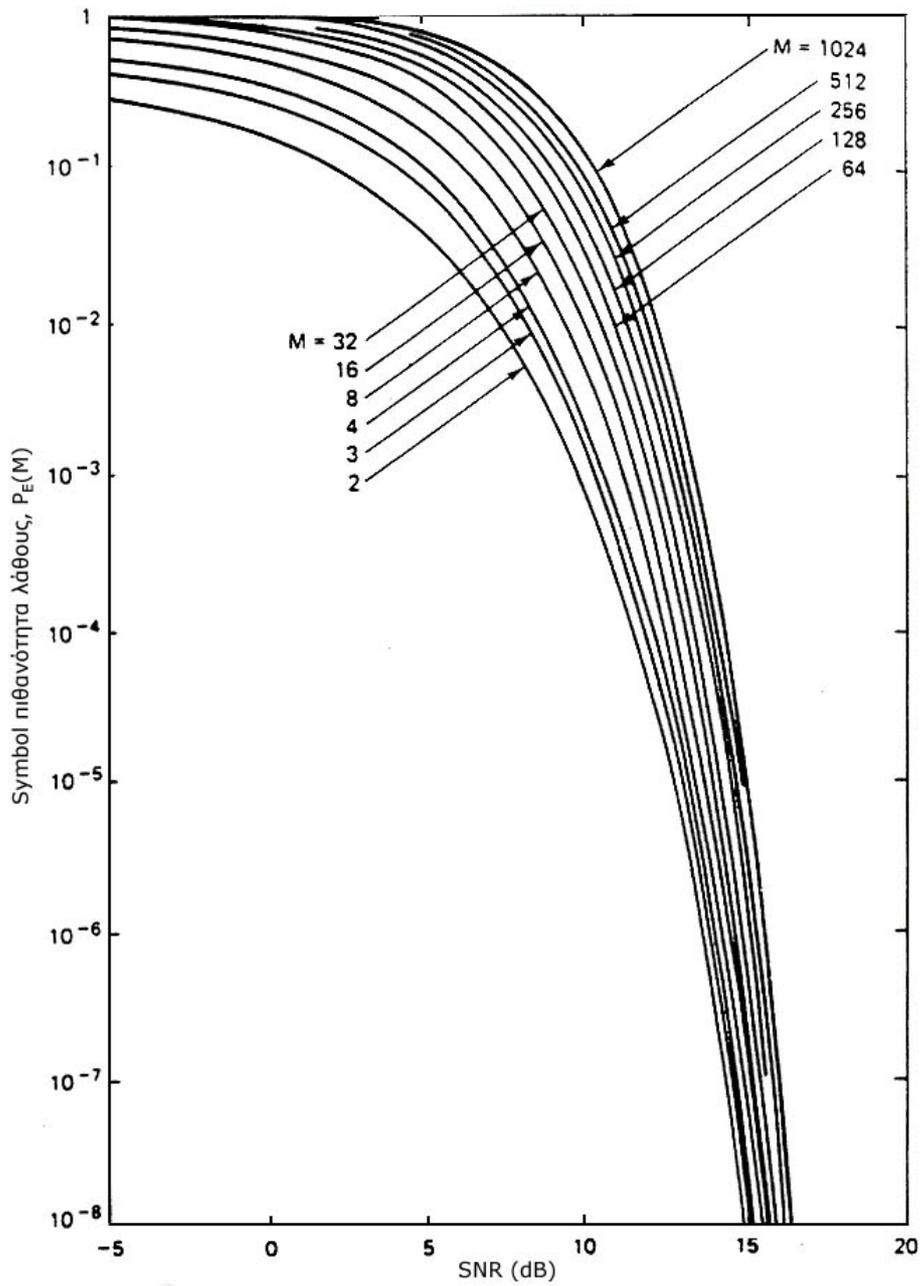
ενώ για τα συστήματα MFSK

$$P_E(M) \approx \frac{M-1}{2} \exp\left(-\frac{E_s}{2N_0}\right)$$

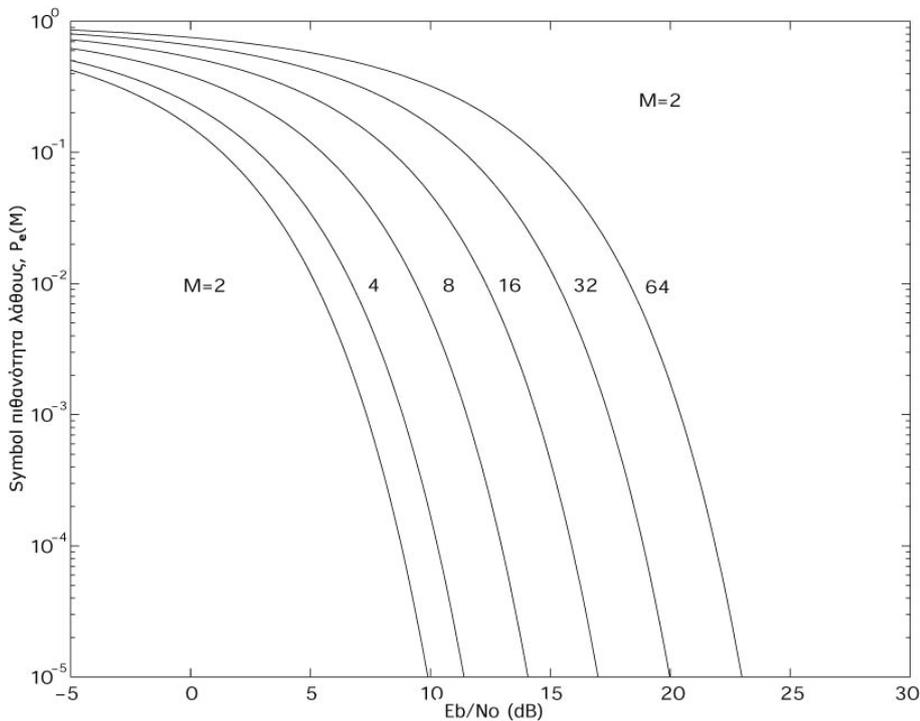
όπου E_s είναι η ενέργεια ενός συμβόλου/λέξης.



Σχήμα 9.30: Πιθανότητα λάθους για ομόδυνα αποδιαμόρφωση MPSK.



Σχήμα 9.31: Πιθανότητα λάθους συμβόλου σε M-ary FSK.



Σχήμα 9.32: Πιθανότητα λάθους συμβόλου για ομόδυνη αποδιαμόρφωση MPSK.

9.5.4 Χρήση εύρους ζώνης

Η σύγκριση των διαφόρων μορφών διαμόρφωσης μόνο σε σχέση με την πιθανότητα λάθους δεν μας δίνει μια πλήρη εικόνα της επίδοσης των μορφών αυτών. Απαιτείται και η σύγκρισή τους σε σχέση με το εύρος ζώνης που χρησιμοποιούν. Έστω R η ταχύτητα μετάδοσης σε bps και W το απαιτούμενο ελάχιστο εύρος ζώνης σε Hz.

Υποθέτοντας ότι χρησιμοποιούμε στις διαδικασίες διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης φίλτρα τα οποία μας δίνουν το ελάχιστο εύρος ζώνης μπορούμε να κάνουμε μερικές παρατηρήσεις σχετικά με το απαιτούμενο εύρος ζώνης σε συστήματα MPSK. Το ελάχιστο εύρος

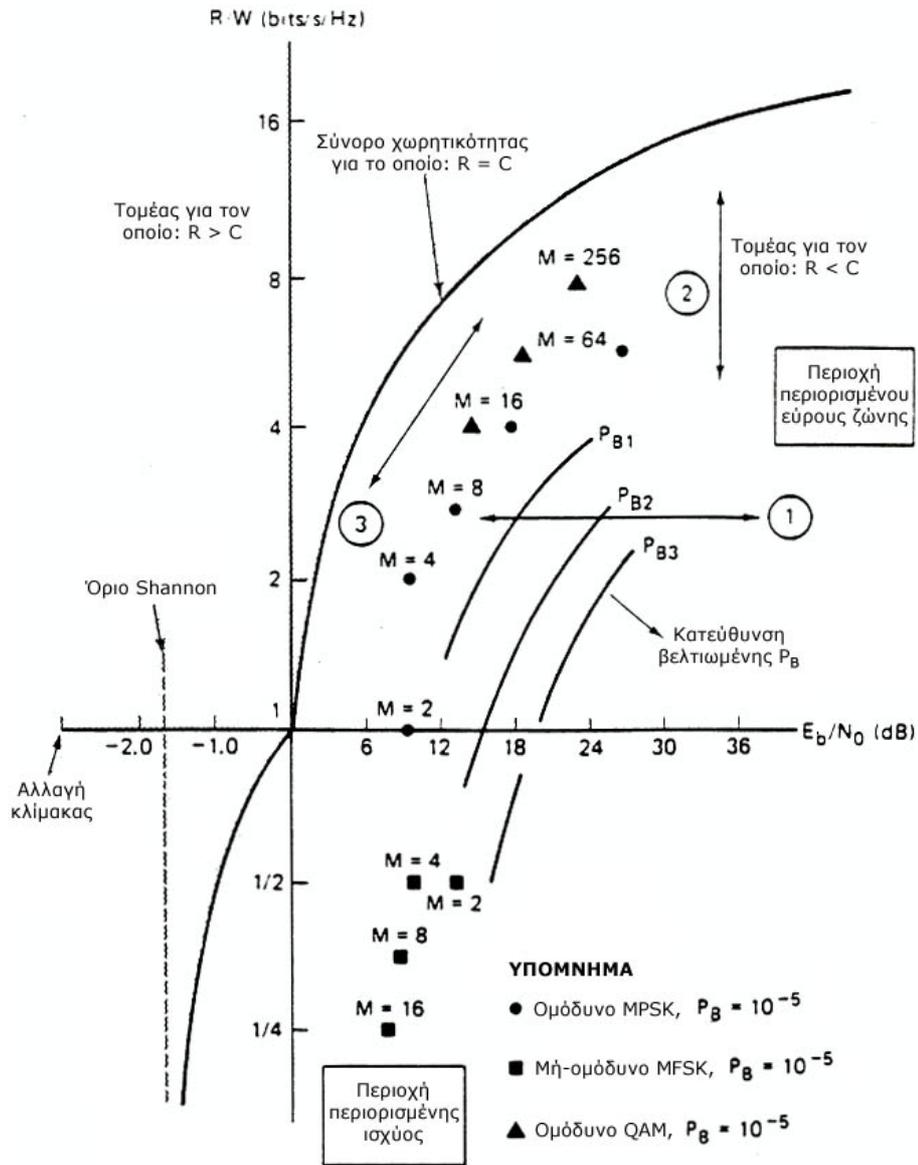
ζώνης στα συστήματα αυτά δίνεται από τη σχέση $W = R/\log_2 M$, όπου $M = 2^k$. Δηλαδή ο λόγος R/W αυξάνεται με αυξανόμενο M , κάτι που αναμένουμε γιατί όσο αυξάνει το M τόσο μικραίνει η απόσταση μεταξύ δύο συμβόλων.

Στα συστήματα MFSK το απαιτούμενο εύρος ζώνης δίνεται από τη σχέση $W = \frac{M \cdot R}{k}$, η οποία συνεπάγεται μείωση του R/W με την αύξηση του αριθμού των συμβόλων.

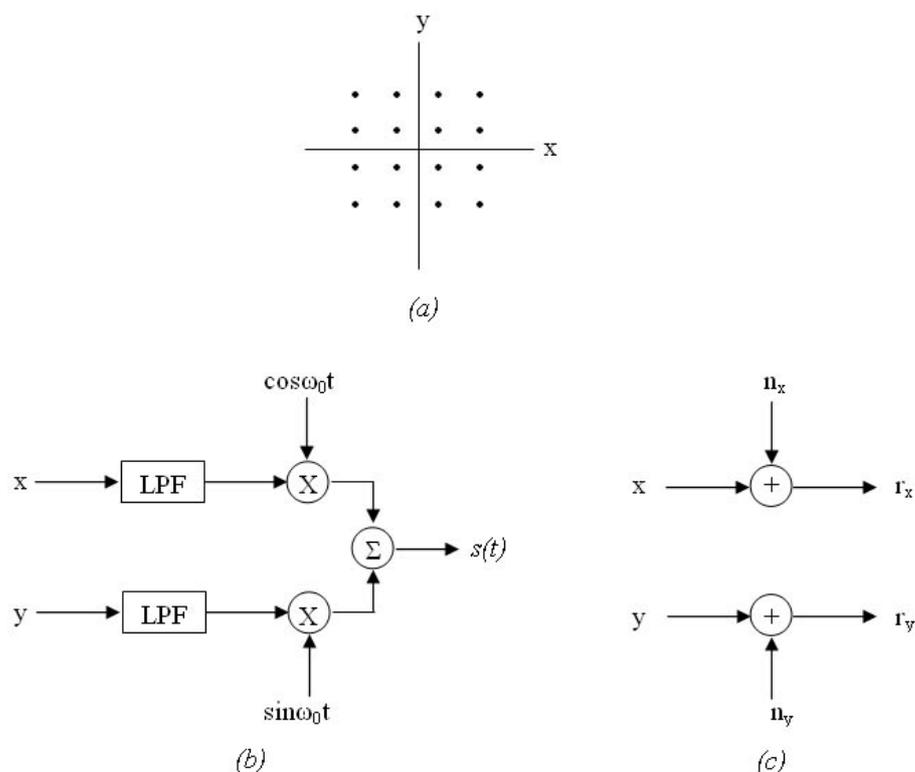
Στο Σχήμα 9.33 βλέπουμε διάφορα συστήματα διαμόρφωσης και την επίδοσή τους σε σχέση με τον αριθμό των Hz που χρειάζεται για να μεταδοθεί ένα bps. Βλέπουμε ότι για το BPSK και το QPSK έχουμε την ίδια πιθανότητα λάθους για $M = 2$ και $M = 4$ αντίστοιχα. Επίσης ότι το BPSK χρειάζεται 1 bit/sec/Hz ενώ το QPSK χρειάζεται 2 bits/sec/Hz.

Στο MPSK παρατηρούμε ότι για $M = 2$ παίρνουμε 1 bps/Hz και για $M = 4$ 2 bps/Hz, δηλαδή η απόδοση βελτιώνεται καθώς το M (και το k) αυξάνονται. Ας θυμηθούμε ότι στα συστήματα αυτά η πιθανότητα λάθους αυξάνεται με την αύξηση του M , ενώ στα MFSK παρατηρούμε αντίθετες ιδιότητες.

Εάν το ενδιαφέρον μας είναι τεχνικές αποδοτικές ως προς το εύρος ζώνης τότε ίσως πρέπει να διαλέξουμε άλλο σύστημα όπως το QAM (Quadrature Amplitude Modulation), η επίδοσή του οποίου φαίνεται στο Σχήμα 9.33 να υπερέρχει των άλλων μορφών ευρυζωνικής διαμόρφωσης. Η παραγωγή του σήματος QAM φαίνεται στο Σχήμα 9.34. Χρησιμοποιούνται διάφοροι συνδυασμοί φάσεων και εύρους για να πετυχαίνουμε τα βέλτιστα αποτελέσματα. τα σήματα μπορεί να θεωρηθούν σαν αθροίσματα συνημιτόνων και ημιτόνων. Ο θόρυβος στα σήματα αυτά μπορεί και αυτός να αναλυθεί στους δύο κάθετους άξονες (η_x, η_y).



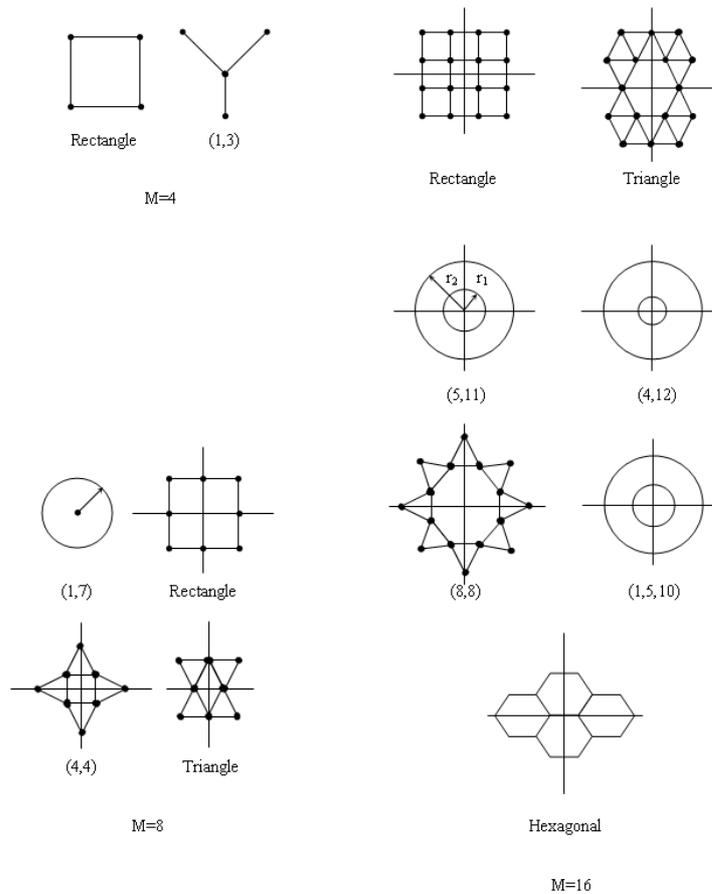
Σχήμα 9.33: Διαγράμματα χωρητικότητας, επίδοσης, εύρους ζώνης για διάφορες μορφές διαμόρφωσης.



Σχήμα 9.34: Διαμόρφωση QAM.

Τεχνικές QAM συνήθως χρησιμοποιούνται στο σχεδιασμό modem. Η έρευνα για τον εντοπισμό διατάξεων που επιτρέπουν ελαχιστοποίηση του εύρους ζώνης μας έχει δώσει πληθώρα διατάξεων με πολύ καλές ιδιότητες, ένα μέρος των οποίων φαίνεται στο Σχήμα 9.35. Τα σύγχρονα modem χρησιμοποιούν τεχνικές που περιλαμβάνουν χρήση κωδικών ελέγχου λαθών ή και κατάλληλη εκμετάλλευση του γεγονότος ότι μέρος του τηλεπικοινωνιακού δικτύου είναι ψηφιακό για να πετύχουν ταχύτητες μεγαλύτερες αυτών που φαίνονται στο Σχήμα 9.36. Το πρότυπο V.34 προτάθηκε το 1994 από το ITU (International Telecommunications Union) προσφέροντας υπηρεσίες αμφίδρομης μετάδοσης δεδομένων πάνω από το τηλεφωνικό δίκτυο σε ταχύτητες αρχικά 28,8 kbps και στη συνέχεια 33,6 kbps. Βασικά

Χαρακτηριστικά του προτύπου αποτελούν η χρήση των πιο μοντέρνων τεχνικών διαμόρφωσης αλλά και μια σειρά από πρόσθετες δυνατότητες που κάνουν το μόντεμ πιο ευφύες και προσαρμοστικό στις συνθήκες του δικτύου. Το μέγιστο εύρος ζώνης που χρησιμοποιεί το V.34 είναι τα 3429 Hz. Χρησιμοποιεί επίσης κωδικούς τεσσάρων διαστάσεων.



Σχήμα 9.35: Αστερισμοί συμβόλων για αποτελεσματική διαμόρφωση.

Χρόνος	Μοντέλο	Ταχύτητα (bps)	Εύρος Ζώνης (Hz)	Διαμόρφωση	R/W (bits/s/Hz)
1962	Bell 201	2400	1200	4-PSK	2
1967	Milgo 4400/48	4800	1600	8-PSK	3
1971	Codex 9600C	9600	2400	16-QAM	4
1980	Paradyne MP14400	14400	2400	64-QAM	6
1981	Codex SP14,4	14400	2400	64-QAM	6
1984	Codex 2660	14400	2400	Trellis-coded QAM	6
1985	Codex 2680	19200	2400	Trellis-coded QAM	8

Σχήμα 9.36: Χαρακτηριστικά modem.

Κεφάλαιο 10

Συστήματα Ασαφούς Λογικής

10.1 Εισαγωγή στην Ασαφή Λογική

Τα Ασαφή Σύνολα προτάθηκαν για πρώτη φορά το 1965 από τον Lofti Zadeh ως ένας νέος τρόπος αναπαράστασης της ασάφειας στην καθημερινή ζωή. Πρόκειται για μια γενίκευση της συμβατικής Θεωρίας Συνόλων, μιας από τις βασικές δομές που βρίσκονται στα θεμέλια των υπολογιστικών μαθηματικών και μοντέλων. Έκτοτε τα ασαφή σύνολα έχουν εφαρμοστεί σε μια πλειάδα επιστημονικών περιοχών που ασχολούνται με μεγέθη που εκ φύσεως είναι γνωστά ή εκτιμήσιμα με περιορισμένη μόνο ακρίβεια, όπως η αναγνώριση προτύπων και η θεωρία αυτομάτου ελέγχου. Τα τελευταία μάλιστα χρόνια κυκλοφορούν στην αγορά καταναλωτικά προϊόντα που χρησιμοποιούν αρχές Ασαφούς Λογικής, όπως ηλεκτρικά πλυντήρια ή φωτογραφικές μηχανές.

Ασαφή Σύνολα και Συναρτήσεις Μέλους

Η καθημερινή γλώσσα είναι ένα παράδειγμα των τρόπων με τους οποίους η ασάφεια εμφανίζεται και χρησιμοποιείται. Η ανακρίβεια στα δεδομένα και τις πληροφορίες για και από το περιβάλλον μας είναι είτε στατιστική (π.χ., το αποτέλεσμα όταν στρίβουμε ένα νόμισμα είναι θέμα τύχης) ή μη στατιστική (π.χ. η οδηγία “πάτα φρένο εγκαίρως”).

Ο δεύτερος τύπος αβεβαιότητας λέγεται *Ασάφεια* (Fuzziness).

Είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε και να χρησιμοποιήσουμε την ασάφεια όπως τη συναντούμε στην καθημερινή μας ζωή. Έτσι και τα υπολογιστικά μοντέλα πραγματικών συστημάτων θα έπρεπε να μπορούν να αναγνωρίζουν, να αναπαριστούν, να χειρίζονται, να ερμηνεύουν και να χρησιμοποιούν τόσο ασαφείς όσο και στατιστικές αβεβαιότητες. Τα στατιστικά μοντέλα έχουν να κάνουν με τυχαία γεγονότα και αποτελέσματα. Τα Ασαφή μοντέλα προσπαθούν να συλλάβουν και να χειριστούν τη μη τυχαία ανακρίβεια.

Ακόμη και όταν χρησιμοποιεί κανείς ένα μαθηματικό μοντέλο, πρέπει να δίδεται μεγάλη προσοχή στις αβεβαιότητες που παρεισφύρουν σ' αυτό είπε ο Richard Feynman σχολιάζοντας αστοχίες του διαστημικού λεωφορείου Challenger.

Τα συμβατικά (σαφή) σύνολα περιέχουν αντικείμενα που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι αυτά μέλη. Το σύνολο των αριθμών H από το 6 ως το 8 είναι σαφές. Γράφουμε $H = \{r \in \mathbb{R} | 6 \leq r \leq 8\}$. Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε μια *Συνάρτηση Μέλους*, m_H :

$$m_H(r) = \begin{cases} 1, & 6 \leq r \leq 8 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Κάθε πραγματικός αριθμός r είναι ή δεν είναι μέλος του H . Τα σαφή σύνολα ακολουθούν την λογική δύο τιμών: ναι ή όχι, λευκό ή μαύρο, 1 ή 0. Στη λογική αυτή, οι τιμές της m_H είναι τιμές αληθείας ως προς την ερώτηση: “είναι ο r στο H ;”. Η απάντηση είναι “ναι” αν και μόνο αν $m_H(r) = 1$. Διαφορετικά είναι “όχι”.

Τα Ασαφή Σύνολα, από την άλλη πλευρά, περιέχουν αντικείμενα που ικανοποιούν ανακριβείς ιδιότητες σε ποικίλους βαθμούς, για παράδειγμα, το σύνολο των αριθμών F που είναι “*κοντά στο 8*”. Το 1965 ο Zadeh πρότεινε την αναπαράσταση του F με μία συνάρτηση μέλους, ας την πούμε m_F , που αντιστοιχίζει αριθμούς σε όλο το διάστημα $[0,1]$. Η τιμή $m_F(r)$ ονομάζεται *Βαθμός Μέλους* του r στο F . Έχουμε πλέον να κάνουμε με λογική συνεχών τιμών: μπορούν

να αναπαρασταθούν όλες οι διαβαθμίσεις του γκρίζου μεταξύ λευκού και μαύρου.

Επειδή η ιδιότητα “κοντά στο 8” είναι ασαφής, δεν υπάρχει μία και μοναδική συνάρτηση μέλους για το F . Εναπόκειται στο σχεδιαστή να αποφασίσει τι τύπου m_F θα χρησιμοποιήσει, με βάση την εφαρμογή και τις ιδιότητες που πρέπει να έχει το F . Τέτοιες ιδιότητες περιλαμβάνουν:

1. Κανονικότητα: $m_F(8) = 1$.
2. Μονοτονικότητα: Καθώς το r πλησιάζει το 8, η τιμή $m_F(8)$ πρέπει να πλησιάζει το 1.
3. Συμμετρικότητα: Αριθμοί εξίσου δεξιά και αριστερά από το 8 πρέπει να έχουν ίδιες τιμές συνάρτησης μέλους.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων (βλέπε και Σχήμα 10.1):

- Τριγωνική συνάρτηση μέλους Η τριγωνική συνάρτηση μέλους καθορίζεται από τρεις παραμέτρους a, b, c :

$$\text{triangle}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & c \leq x \end{cases}$$

ή

$$\text{triangle}(x) = \max \left(\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right)$$

- Τραπεζοειδής συνάρτηση μέλους Η τραπεζοειδής συνάρτηση μέλους καθορίζεται από τέσσερις παραμέτρους a, b, c, d :

$$\text{trapezoid}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & d \leq x \end{cases}$$

ή

$$\text{trapezoid}(x) = \max \left(\min \left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right), 0 \right)$$

- Γκαουσιανή συνάρτηση μέλους

Η γκαουσιανή συνάρτηση μέλους καθορίζεται από δύο παραμέτρους c , σ :

$$\text{gaussian}(x) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2}$$

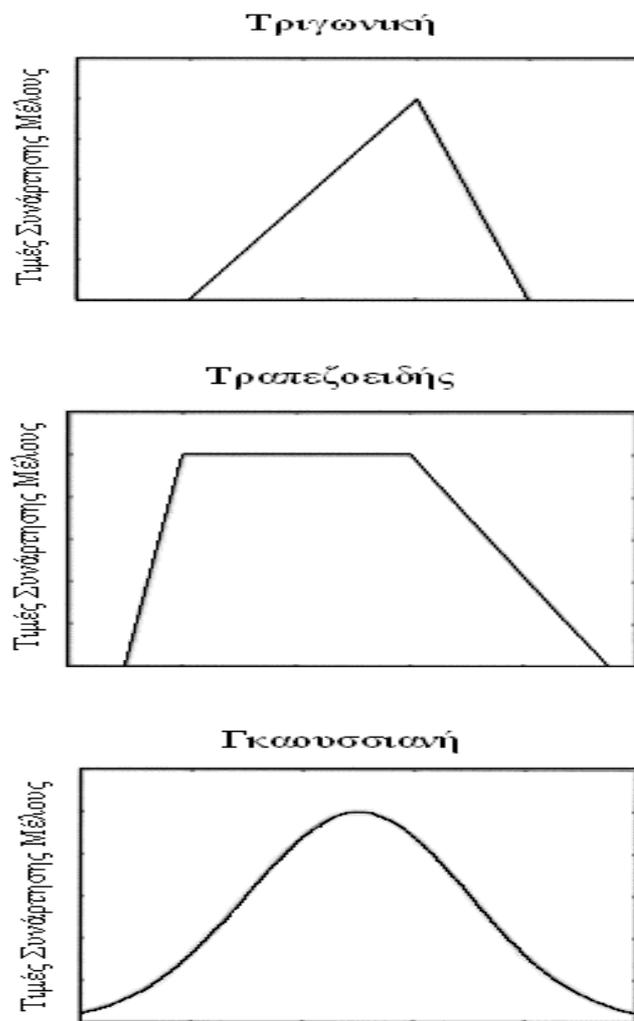
Οι τιμές της συνάρτησης μέλους καθορίζουν το βαθμό στον οποίο ένα μέγεθος ικανοποιεί ανακριβώς ορισμένες ιδιότητες. Προκειμένου να χειριστούμε ασαφή σύνολα, είναι απαραίτητες ορισμένες λειτουργίες που θα μας επιτρέπουν να τα συνδυάζουμε. Οι ιδιότητες που θα παρουσιαστούν αναφέρονται σε ένα σύνολο $F(X) = \text{'Όλα τα Ασαφή Υποσύνολα του } X$. Δηλαδή, $m \in F(X) \Leftrightarrow m : X \rightarrow [0, 1]$.

Έστω τα ασαφή σύνολα $m_A, m_B \in F(X)$. Ορίζουμε ($\forall x \in X$) τις θεωρητικές πράξεις συναρτήσεων:

Ισότητα	$A = B \Leftrightarrow m_A(x) = m_B(x)$
Εγκλεισμός	$A \subset B \Leftrightarrow m_A(x) \leq m_B(x)$
Συμπλήρωμα	$m_{A'}(x) = 1 - m_A(x)$
Τομή	$m_{A \cap B}(x) = \min m_A(x), m_B(x)$
Ένωση	$m_{A \cup B}(x) = \max m_A(x), m_B(x)$

Παράδειγμα: Έστω $P = \{\text{άνθρωποι}, p\}$, $x = h(p) = \text{ύψος του } p \in P$, και $X = h[P] = \{\text{ύψη των } p \in P\} = [0, 11]$ (σε πόδια, 1 πόδι = 30,48 εκατοστά).

Έχουμε τις συναρτήσεις μέλους για δύο ασαφή σύνολα:



Σχήμα 10.1: Συναρτήσεις μέλους.

$$\begin{array}{l|l}
 m_A \in F(X) = & (m_A \circ h) \in F(P) = \\
 = \{(\text{ύψη}) \text{ κοντά στα } 7 \text{ πόδια}\} & = \{(\text{άνθρωποι}) \text{ κοντά στα } 7 \text{ πόδια (ύψος)}\} \\
 m_B \in F(X) = & (m_B \circ h) \in F(P) = \\
 = \{(\text{ύψη}) \text{ κοντά στα } 3 \text{ πόδια}\} & = \{(\text{άνθρωποι}) \text{ κοντά στα } 3 \text{ πόδια (ύψος)}\}
 \end{array}$$

Αν η συνάρτηση m_A είναι τριγωνική με σημεία $(a, b, c) = (0, 7, 11)$ και η συνάρτηση m_B είναι τριγωνική με σημεία $(a, b, c) = (0, 3, 11)$, έχουμε:

$m_A(3) = 3/7 =$ ο βαθμός στον οποίο κάποιος με ύψος 3' έχει ύψος $\approx 7'$

$m_{A'}(3) = 1 - 3/7 =$ ο βαθμός στον οποίο κάποιος με ύψος 3' p ΔΕΝ έχει ύψος $\approx 7'$

$m_A(6) = 6/7 =$ ο βαθμός στον οποίο κάποιος με ύψος 6' p έχει ύψος $\approx 7'$

$m_B(6) = 5/8 =$ ο βαθμός στον οποίο κάποιος με ύψος 6' p έχει ύψος $\approx 3'$

$m_{A \cap B}(6) = \min\{6/7, 5/8\} = 5/8 =$ ο βαθμός στον οποίο το p είναι $\approx 3'$ ΚΑΙ έχει ύψος 7'

$m_{A \cup B}(6) = \max\{6/7, 5/8\} = 6/7 =$ ο βαθμός στον οποίο το p είναι $\approx 3'$ Η έχει ύψος 7'

Στη βιβλιογραφία προκύπτει συχνά το ερώτημα: τι σχέση έχουν τα ασαφή σύνολα με τη θεωρία πιθανοτήτων;

Η δήλωση $m_F(q) = 0.98$ μας λέει ότι το ύψος του q είναι "αρκετά κοντά" στα 7 πόδια. Προσέξτε πως δεν ερμηνεύουμε τη δήλωση αυτή ως: "η πιθανότητα ότι το ύψος του q να είναι αρκετά κοντά στα 7 πόδια είναι 0.98".

Επειδή τα ασαφή σύνολα είναι μια γενίκευση της κλασσικής θεωρίας συνόλων, η ενσωμάτωση συμβατικών μοντέλων σε ένα ευρύ-

τερο πλαίσιο παρέχει στα ασαφή σύνολα μεγαλύτερη ευελιξία στην αναπαράσταση διάφορων μορφών ατελειών ή ανακρίβειας σχετικά με οποιαδήποτε πληροφορία έχει να κάνει με μια πραγματική διαδικασία. Κατά κάποιο τρόπο παρέχουν ελαστικότητα.

Τα ασαφή μοντέλα έχουν θέση οπουδήποτε μπορούν να παράσχουν καλύτερη πληροφορία για μια φυσική διαδικασία. Η διωνυμική κατανομή είναι δίχως άλλο ο καλύτερος τρόπος να μοντελοποιήσουμε το στρίψιμο ενός νομίσματος. Από την άλλη πλευρά, ενώ μπορούμε να αναπαραστήσουμε την έννοια “αρκετά κοντά στο 7” με ένα στατιστικό μοντέλο, αυτό είναι πολύ λιγότερο ικανοποιητικό από το ασαφές μοντέλο που περιγράψαμε παραπάνω.

Στο ακόλουθο παράδειγμα θα δούμε τη διαφορά ασάφειας και πιθανότητας.

Παράδειγμα: Έστω L = το σύνολο όλων των υγρών, και το ασαφές υποσύνολο $\mathfrak{S} = \{\text{όλα (τα πόσιμα) υγρά}\}$. Ας υποθέσουμε πως κάποιος έχει περάσει μια εβδομάδα στην έρημο χωρίς νερό και συναντά ξαφνικά δυο μπουκάλια A και B με $m_L(B) = 0.91$ και $Pr(A \in L) = 0.91$. Ποιο από τα δύο θα επέλεγε να δοκιμάσει; Ενώ το B περιέχει κάτι που σίγουρα μοιάζει πολύ με νερό, το A περιέχει κάτι που κατά πάσα πιθανότητα είναι νερό. Με άλλα λόγια, το B μπορεί να περιέχει βαλτόνερο αλλά σίγουρα όχι υδροχλωρικό οξύ, ενώ το A μπορεί κάλλιστα (με πιθανότητα 9%) να περιέχει πράγματι κάτι τόσο βλαβερό όσο το υδροχλωρικό οξύ.

10.2 Εισαγωγή στα συστήματα ασαφούς λογικής

10.2.1 Αντικειμενική και υποκειμενική γνώση

Για πολλά προβλήματα υπάρχουν δύο είδη γνώσης:

- αντικειμενική γνώση, που χρησιμοποιείται κατά κόρον σε διατυπώσεις προβλημάτων θετικών επιστημών (π.χ. μαθηματικά

μοντέλα) και

- υποκειμενική γνώση, που αντιπροσωπεύει λεκτική πληροφορία που είναι συνήθως αδύνατο να αποτιμηθεί ποσοτικά χρησιμοποιώντας παραδοσιακά μαθηματικά (π.χ. κανόνες, πληροφορίες από εμπειρογνώμονες, σχεδιαστικές απαιτήσεις).

Παραδείγματα αντικειμενικής γνώσης είναι: εξισώσεις κίνησης ενός υποβρυχίου, διαστημοπλοίου, ρομπότ κτλ, ένα συνελικτικό μοντέλο που περιγράφει ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι ή ένα σεισμολογικό πείραμα ανάκλασης.

Παράδειγμα υποκειμενικής γνώσης είναι ο παρακάτω κανόνας που μπορεί να ισχύει για την παρακολούθηση ενός υποβρυχίου ή άλλου μεγάλου αργά κινούμενου αντικειμένου: “Αν ο στόχος έχει εντοπισθεί σε μία χρονική στιγμή, τότε δε θα είναι πολύ μακρύτερα την επόμενη χρονική στιγμή”. Η υποκειμενική γνώση, που συχνά αγνοείται στα αρχικά στάδια σχεδίασης ενός προβλήματος, πρέπει να συνδυάζεται με την αντικειμενική γνώση, και αυτό επιτυγχάνεται με λογικό τρόπο χρησιμοποιώντας ένα Σύστημα Ασαφούς Λογικής (ΣΑΛ).

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί δύο προσεγγίσεις για κάτι τέτοιο:

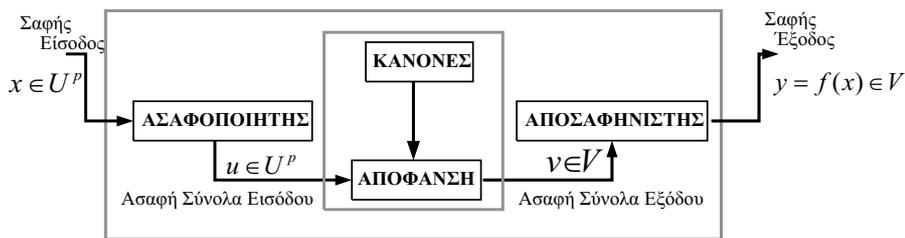
- προσέγγιση βασισμένη σε μοντέλο, όπου η αντικειμενική πληροφορία παριστάνεται από μαθηματικά μοντέλα και η υποκειμενική πληροφορία παριστάνεται με λεκτικές δηλώσεις που μετατρέπονται σε κανόνες, και
- προσέγγιση άνευ μοντέλων, όπου κανόνες εξάγονται από αριθμητικά δεδομένα και κατόπιν συνδυάζονται με λεκτικές πληροφορίες (που συλλέγονται από εμπειρογνώμονες) και τα δύο με χρήση ασαφούς λογικής (ΑΛ).

Η πλειοψηφία της βιβλιογραφίας στην ΑΛ αναφέρεται στην απεικόνιση ασαφών συνόλων σε ασαφή σύνολα. Σε πολλές όμως εφαρμογές της ΑΛ ενδιαφερόμαστε για απεικονίσεις αριθμών σε αριθμούς,

και έτσι είναι απαραίτητο να προσθέσουμε μπροστά από το σύνηθες σύστημα ΑΛ ένα “ασαφοποιητή” και πίσω από αυτό ένα “αποσαφηνιστή”.

10.2.2 Συστήματα Ασαφούς Λογικής (ΣΑΛ)

Γενικά, ένα ΣΑΛ είναι μια μη γραμμική απεικόνιση ενός διανύσματος δεδομένων εισόδου σε μια βαθμωτή έξοδο. Υπάρχει ένας τεράστιος αριθμός τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτή η απεικόνιση, όπως εξάλλου συμβαίνει και στα συμβατικά συστήματα που αντιμετωπίζει ένας μελετητής. Σ' αυτό το κεφάλαιο εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας σε μια γεωμετρική ερμηνεία ενός ΣΑΛ και στον τρόπο διατύπωσης μιας εξίσωσης εισόδου-εξόδου, ώστε να μπορούμε κατόπιν να γράψουμε αλγόριθμους και υπολογιστικά προγράμματα και να ενσωματώσουμε ένα ΣΑΛ σε μια εφαρμογή.



Σχήμα 10.2: Σύστημα Ασαφούς Λογικής (ΣΑΛ).

Θα συζητήσουμε τώρα για τα τέσσερα στοιχεία του ΣΑΛ του Σχήματος 10.2, ώστε να είμαστε σε θέση να γράψουμε μια μαθηματική σχέση που συνδέει την έξοδο του ΣΑΛ με τις εισόδους.

10.2.3 Κανόνες

Μια βάση Ασαφών Κανόνων αποτελείται από μια συλλογή κανόνων της μορφής AN-TOTE (IF-THEN), που μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

R^l : Αν u_1 είναι F_1^l και u_2 είναι F_2^l και ... u_p είναι F_p^l , ΤΟΤΕ το u είναι G^l

όπου $l = 1, 2, \dots, M$, F_i^l και G^l είναι ασαφή σύνολα στο $U_i \subset \mathbb{R}$ και $V \subset \mathbb{R}$ αντίστοιχα (το \mathbb{R} συμβολίζει το σύνολο των πραγματικών αριθμών), $u = \text{col}(u_1, \dots, u_p) \in U_1 \times \dots \times U_p$ και $u \in V$. Τα u και v είναι γλωσσικές μεταβλητές. Οι αριθμητικές τους τιμές είναι $x \in U$ και $y \in V$ αντίστοιχα. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει πώς μπορεί να σχηματιστούν κανόνες για διάφορα προβλήματα.

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε πως $x(k)$, $k = 1, 2, \dots$, είναι μια χρονική ακολουθία, όπως οι καθημερινές θερμοκρασίες της πόλης των Αθηνών ή οι ωριαίες καταγραφές του δείκτη ΧΑΑ ή μια χαοτική ακολουθία.

Το πρόβλημα της πρόβλεψης μιας χρονικής ακολουθίας (forecasting) ορίζεται ως εξής: με δεδομένο ένα παράθυρο n παρελθουσών μετρήσεων του $x(k)$, δηλαδή $x(k-n+1), x(k-n+2), \dots, x(k)$ να προσδιορίσουμε μια μελλοντική τιμή του x την $x(k+l)$, όπου n και l είναι σταθεροί θετικοί ακέραιοι. Στο παράδειγμα αυτό θα θεωρήσουμε πως $l = 1$, οπότε μιλάμε για πρόβλεψη ενός βήματος. Ας υποθέσουμε πως μας δίνουν D σημεία δεδομένων $x(1), x(2), \dots, x(D)$ οπότε υπάρχουν το πολύ $D - n$ ζεύγη εκπαίδευσης, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(D-n)}$, όπου $x^{(j)} = \text{col}[n \times 1 \text{ εισόδους: επιθυμητή έξοδος}]$ και $x^{(1)} = \text{col}[x(1), x(2), \dots, x(n) : x(n+1)]$, $x^{(2)} = \text{col}[x(2), x(3), \dots, x(n+1) : x(n+2)]$, ..., $x^{(D-n)} = \text{col}[x(D-n), \dots, x(D-1) : x(D)]$.

Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τρόποι να εξαχθούν κανόνες από αριθμητικά δεδομένα:

1. να αφήσουμε τα δεδομένα να προσδιορίσουν τα ασαφή σύνολα που εμφανίζονται στις εισόδους και τις εξόδους των κανόνων, ή
2. να προσδιορίσουμε εκ των προτέρων τα ασαφή αυτά σύνολα και τότε να συσχετίσουμε τα δεδομένα με τα ασαφή σύνολα.

Θα περιγράψουμε σύντομα αυτές τις δύο προσεγγίσεις.

Επειδή η προβλεπόμενη τιμή του x θα εξαρτάται από n παλαιότερες τιμές του x , θα υπάρχουν n εισόδοι σε κάθε κανόνα. Συμβολίζουμε τις εισόδους αυτές με u_1, u_2, \dots, u_n . Το ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτού του παραδείγματος είναι ότι αν και κάθε κανόνας έχει n εισόδους, όλες αυτές συνδέονται με την ίδια μεταβλητή, όπως και η έξοδος.

Προκειμένου να επιτύχουμε πρόβλεψη ενός βήματος, οι κανόνες όπως προκύπτουν από τα ζεύγη εκπαίδευσης είναι οι παρακάτω:

1. $R^{(1)}$: AN u_1 είναι F_1^l και u_2 είναι F_2^l και ... και u_n είναι F_n^l ΤΟΤΕ u είναι G^1 .

Στον κανόνα αυτό F_1^l είναι ένα ασαφές σύνολο του οποίου η συνάρτηση μέλους έχει ως κέντρο το $x(1)$, η F_2^l έχει ως κέντρο το $x(2)$ κτλ., και G^1 είναι ένα ασαφές σύνολο με συνάρτηση μέλους με κέντρο το $x(n+1)$.

2. $R^{(2)}$: AN u_1 είναι F_2^l και u_2 είναι F_2^l κτλ. ΤΟΤΕ u είναι G^2 .

Στον κανόνα αυτό F_2^l είναι ένα ασαφές σύνολο του οποίου η συνάρτηση μέλους έχει ως κέντρο το $x(2)$, η F_2^2 έχει ως κέντρο το $x(3)$ κτλ., και G^2 είναι ένα ασαφές σύνολο με συνάρτηση μέλους με κέντρο το $x(n+2)$.

3. ...

4. $R^{(D-n)}$: AN u_1 είναι $F_1^{(D-n)}$ και u_2 είναι $F_2^{(D-n)}$ κτλ. ΤΟΤΕ u είναι $G^{(D-n)}$. Στον κανόνα αυτό $F_1^{(D-n)}$ είναι ένα ασαφές σύνολο του οποίου η συνάρτηση μέλους έχει ως κέντρο το $x(D-n)$, η $F_2^{(D-n)}$ έχει ως κέντρο το $x(D-n+1)$ κτλ., και $G^{(D-n)}$ είναι ένα ασαφές σύνολο με συνάρτηση μέλους με κέντρο το $x(D)$.

Σ' αυτήν την πρώτη προσέγγιση εξαγωγής κανόνων από δεδομένα εκπαίδευσης παρατηρούμε πως οι συναρτήσεις μέλους των εισόδων και εξόδων προσαρμόζονται στις θέσεις των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των κανόνων.

Στη δεύτερη προσέγγιση ξεκινούμε με τον ορισμό ασαφών συνόλων για όλες τις εισόδους και τις εξόδους. Σε πρώτη φάση επιλέγουμε διαστήματα ορισμού για όλες τις μεταβλητές εισόδου και εξόδου. Στο παράδειγμά μας τα διαστήματα αυτά είναι όλα το ίδιο, αφού οι τιμές u_1, u_2, \dots, u_n είναι όλες δείγματα της ίδιας χρονικής ακολουθίας, $x(k)$. Σε άλλες περιπτώσεις κάθε είσοδος και κάθε έξοδος θα έχουν διαφορετικό διάστημα ορισμού. Ας υποθέσουμε πως, μετά από παρατήρηση της χρονικής ακολουθίας, βεβαιωνόμαστε πως $x(k) \in [X^-, X^+] = U$. Κατόπιν διαιρούμε κάθε διάστημα ορισμού σε ένα προκαθορισμένο αριθμό επικαλυπτόμενων περιοχών. Ο αριθμός αυτός δεν είναι απαραίτητο να είναι ο ίδιος για κάθε μεταβλητή, και τα μήκη των περιοχών αυτών μπορούν να είναι ίσα ή άνισα. Τότε κάθε περιοχή παίρνει ένα όνομα και μια συνάρτηση μέλους. Η διακριτική ικανότητα των ασαφών συνόλων που χαρακτηρίζουν το $x(k)$ προσδιορίζει και την ακρίβεια της πρόβλεψης. Οι συναρτήσεις μέλους θα μπορούσαν να είναι διαφορετικού τύπου για διαφορετικές μεταβλητές. Μετρηθείσες τιμές μιας μεταβλητής επιτρέπεται να βρίσκονται έξω από το διάστημα ορισμού της μεταβλητής, μια και αν $x(k) > X^+$ τότε $\mu_Q(x) = 1$.

Οι ασαφείς κανόνες κατασκευάζονται από τα δεδομένα εκπαίδευσης με την παρακάτω διαδικασία τριών βημάτων:

1. Προσδιορίζουμε τις τιμές της συνάρτησης μέλους των στοιχείων του $x(j)$.
2. Αναθέτουμε κάθε μεταβλητή στην περιοχή με το μεγαλύτερο βαθμό.
3. Σχηματίζουμε ένα κανόνα από κάθε ζεύγος επιθυμητών δεδομένων εισόδου-εξόδου (AN... - TOTE...).

Επειδή μπορεί να έχουμε πολλά δεδομένα, υπάρχει πιθανότητα να έχουμε αντιφάσκοντες κανόνες, π.χ. κανόνες με ίδιες εισόδους αλλά διαφορετικές εξόδους. Λύνουμε αυτό το πρόβλημα αναθέτοντας ένα βαθμό $D(R^{(j)})$ σε κάθε κανόνα και επιλέγοντας μόνο τον κανόνα με

το μεγαλύτερο βαθμό, όπου

$$D(R^{(j)}) = \mu_Q(x_1^{(j)})\mu_Q(x_2^{(j)})\dots\mu_Q(x_n^{(j)})\mu_Q(y^{(j)}).$$

Αυτή η διαδικασία τριών βημάτων ακολουθείται για όλα τα $D - n$ ζεύγη εκπαίδευσης. Το αποτέλεσμα είναι το πολύ $D - n$ γλωσσικοί κανόνες του τύπου που προέκυψε στο βήμα 3.

Ένας κανόνας πολλών εισόδων και πολλών εξόδων μπορεί πάντα να θεωρηθεί ως ένα σύνολο πολλών κανόνων μίας εξόδου, γι' αυτό και η βιβλιογραφία συγκεντρώνεται σε κανόνες μίας εξόδου. Αυτό προκύπτει από την σαφή λογική, δηλ.

$$(p \rightarrow (q1 \wedge q2 \wedge q3)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q1) \wedge (p \rightarrow q2) \wedge (p \rightarrow q3))$$

Είναι επίσης δυνατό “μη προφανείς” κανόνες να παρασταθούν με τη βασική μορφή που δόθηκε. Έξι τέτοιοι κανόνες συνοψίζονται παρακάτω:

1. **Κανόνες με Ατελές “AN”:** Ας υποθέσουμε πως έχουμε φτιάξει μια βάση από κανόνες οι οποίοι έχουν p εισόδους, μερικοί, όμως, κανόνες έχουν μόνο ένα υποσύνολο από τις εισόδους αυτές, π.χ. Αν u_1 είναι F_1^l και u_2 είναι F_2^l και ... και u_m είναι F_m^l ΤΟΤΕ u είναι G^l . Τέτοιοι κανόνες αποκαλούνται *Κανόνες με Ατελές “AN”* και εφαρμόζονται ανεξάρτητα από τα u_{m+1}, \dots, u_p . Μπορούν να έρθουν στη μορφή του πλήρους κανόνα αν θεωρήσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία εισόδου, δηλ. τα u_{m+1}, \dots, u_p ως μέλη του ασαφούς συνόλου “ΑΤΕΛΕΣ” (INCOMPLETE - IN), όπου εξ' ορισμού, $m_{IN}(u) = 1$ για όλα τα $u \in \mathbb{R}$, π.χ. $(AN \ u1 \text{ είναι } F_1^l \text{ και } u_2 \text{ είναι } F_2^l \text{ και } \dots \text{ και } u_m \text{ είναι } F_m^l \text{ ΤΟΤΕ } u \text{ είναι } G^l) \leftrightarrow (AN \ u_1 \text{ είναι } F_1^l \text{ και } u_2 \text{ είναι } F_2^l \text{ και } \dots \text{ και } u_m \text{ είναι } F_m^l \text{ και } u_{m+1} \text{ είναι } IN \dots \text{ και } u_p \text{ είναι } IN, \text{ ΤΟΤΕ } u \text{ είναι } G^l)$.
2. **Μεικτοί Κανόνες:** Δεν έχουν όλοι οι κανόνες τη σύζευξη “ΚΑΙ”. Μερικοί έχουν το “Η” και μερικοί έχουν και τα δύο. Αυτοί οι κανόνες αποκαλούνται “ΜΕΙΚΤΟΙ” και μπορούν να

διασπαστούν σε μια συλλογή ισοδύναμων κανόνων με τεχνικές δανεισμένες από την σαφή λογική. Ας υποθέσουμε, π.χ., πως έχουμε τον κανόνα $\text{AN } u_1 \text{ είναι } F_1^l \text{ και } u_2 \text{ είναι } F_2^l \text{ και } \dots \text{ και } u_m \text{ είναι } F_m^l \text{ TOTΕ } u \text{ είναι } G^l$ Η $u_{m+1} \text{ είναι } F_{m+1}^l \text{ και } \dots \text{ και } u_p \text{ είναι } F_p^l \text{ TOTΕ } u \text{ είναι } G^l$. Αυτός μπορεί να εκφραστεί από τους παρακάτω δύο κανόνες: $R^{(1)}: \text{AN } u_1 \text{ είναι } F_1^l \text{ και } u_2 \text{ είναι } F_2^l \text{ και } \dots \text{ και } u_m \text{ είναι } F_m^l \text{ TOTΕ } u \text{ είναι } G^l$ και $R^{(2)}: \text{AN } u_{m+1} \text{ είναι } F_{m+1}^l \text{ και } \dots \text{ και } u_p \text{ είναι } F_p^l \text{ TOTΕ } u \text{ είναι } G^l$.

3. **Κανόνες Ασαφών Δηλώσεων:** Μερικοί κανόνες δεν έχουν εισόδους, αλλά είναι απλές δηλώσεις που εμπλέκουν ασαφή σύνολα, γι' αυτό αποκαλούνται "Κανόνες Ασαφών Δηλώσεων". " $u \text{ είναι } G^l$ " είναι ένα παράδειγμα τέτοιου κανόνα. Πρόκειται για μια εκφυλισμένη μορφή ατελούς κανόνα, και μπορεί να γραφεί ως: $\text{AN } u_1 \text{ είναι IN και } u_2 \text{ είναι IN και } \dots \text{ και } u_p \text{ είναι IN, TOTΕ } u \text{ είναι } G^l$.
4. **Συγκριτικοί Κανόνες:** Μερικοί κανόνες είναι συγκριτικοί, π.χ. " $\text{όσο μικρότερο είναι το } u, \text{ τόσο μεγαλύτερο είναι το } u$ ". Ο κανόνας αυτός μπορεί να εκφραστεί ως εξής στην πλήρη μορφή: " $\text{AN } u \text{ είναι } S, \text{ TOTΕ } u \text{ είναι } B$ ", όπου το S είναι ένα ασαφές σύνολο που αντιπροσωπεύει το "μικρότερο" και B ένα ασαφές σύνολο που αντιπροσωπεύει το "μεγαλύτερο".
5. **Κανόνες "ΕΚΤΟΣ ΑΝ":** Ορισμένοι κανόνες εκφράζονται με χρήση του συνδετικού "εκτός εάν". Αυτοί μπορούν να έρθουν στη πλήρη μορφή χρησιμοποιώντας λογικούς τελεστές όπως οι νόμοι De Morgan. Για παράδειγμα ο κανόνας: $u \text{ είναι } G^l \text{ εκτός αν } u_1 \text{ είναι } F_1^l \text{ και } u_2 \text{ είναι } F_2^l \text{ και } \dots \text{ και } u_p \text{ είναι } F_p^l$ μπορεί να γραφεί ως εξής: $\text{AN } \text{όχι } (u_1 \text{ είναι } F_1^l \text{ και } u_2 \text{ είναι } F_2^l \text{ και } \dots \text{ και } u_p \text{ είναι } F_p^l)$. Με βάση τον κανόνα De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, μπορεί να ξαναγραφεί ως: $\text{AN } u_1 \text{ δεν είναι } F_1^l \text{ ή } u_2 \text{ δεν είναι } F_2^l \text{ ή } \dots \text{ ή } u_p \text{ δεν είναι } F_p^l, \text{ TOTΕ } u \text{ είναι } G^l$. Θεωρούμε το "όχι" ως ένα ασαφές σύνολο και αναλύουμε τον παραπάνω μεικτό κανόνα σε μια συλλογή από p ατελείς

κανόνες της μορφής: $\text{AN } u_i \text{ δεν είναι } F_i$, $\text{TOTE } u \text{ είναι } G^i$,
 $i = 1, 2, \dots, p$.

6. **Ποσοτικοί Κανόνες:** Ορισμένοι κανόνες περιλαμβάνουν τους προσδιορισμούς “μερικά” ή “όλα”. Εξαιτίας της δυαδικότητας μεταξύ λογικής και θεωρίας συνόλων, πρέπει να εφαρμόζουμε τον τελεστή ένωσης στις εισόδους για τις οποίες ισχύει το “μερικά” και τον τελεστή τομής στις εισόδους για τις οποίες ισχύει το “όλα”.

Φυσικά, σε πρακτικές εφαρμογές, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε συνδυασμούς των παραπάνω περιπτώσεων.

ΟΡΙΣΜΟΙ:

Ακολουθούν μερικοί ορισμοί, οι οποίοι είναι απαραίτητοι, για την κατανόηση των εννοιών που παρατίθενται στη συνέχεια.

Υποστήριξη

Η υποστήριξη ενός ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο όλων των σημείων x , ενός χώρου αντικειμένων Q , που ικανοποιούν τη συνθήκη $\mu_A(x) > 0$.

$$\text{υποστήριξη}(A) = \{x | \mu_A(x) > 0\}$$

T -νόρμα

Ένας τελεστής T -νόρμα είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί τα παρακάτω:

$$T(0, 0) = 0, \quad T(a, 1) = T(1, a) = a$$

$$T(a, b) \leq T(c, d), \quad \text{αν } a \leq c \quad \text{και} \quad b \leq d$$

$$T(a, b) = T(b, a)$$

$$T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$$

Τέσσερις από τους πιο συνηθισμένους τελεστές, τέτοιου είδους είναι οι:

$$\begin{array}{ll}
\text{Ελάχιστο:} & T_{\min}(a, b) = \min(a, b) = a \wedge b \\
\text{Αλγεβρικό Γινόμενο:} & T_{ap}(a, b) = ab \\
\text{Περιορισμένο Γινόμενο:} & T_{bp}(a, b) = 0 \vee (a + b - 1) \\
\text{Δραστικό Γινόμενο:} & T_{dp}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{αν } b = 1 \\ b, & \text{αν } a = 1 \\ 0, & \text{αν } a, b < 1 \end{cases}
\end{array}$$

T-συνόρμα

Ένας τελεστής *T*-συνόρμα (ή *S*-νόρμα) είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί τα παρακάτω:

$$\begin{array}{l}
S(1, 1) = 1, \quad S(0, a) = S(a, 0) = a \\
S(a, b) \leq S(c, d) \quad \text{αν} \quad a \leq c \quad \text{και} \quad b \leq d \\
S(a, b) = S(b, a) \\
S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)
\end{array}$$

Τέσσερις από τους πιο συνηθισμένους τελεστές, τέτοιου είδους είναι οι:

$$\begin{array}{ll}
\text{Ελάχιστο:} & S(a, b) = \max(a, b) = a \vee b \\
\text{Αλγεβρικό Άθροισμα:} & S(a, b) = a + b - ab \\
\text{Περιορισμένο Άθροισμα:} & S(a, b) = 1 \wedge (a + b) \\
\text{Δραστικό Άθροισμα:} & S(a, b) = \begin{cases} a, & \text{αν } b = 0 \\ b, & \text{αν } a = 0 \\ 1, & \text{αν } a, b > 0 \end{cases}
\end{array}$$

10.2.4 Ασαφής Αποφαντική Μηχανή

Σε μια Ασαφή Αποφαντική Μηχανή (AAM - Fuzzy Inference Engine) (που αναφέρεται ως “απόφαση” στο Σχήμα 10.2 εφαρμόζονται αρχές ασαφούς λογικής προκειμένου να συνδυαστούν ασαφείς κανόνες από μια βάση ασαφών κανόνων και να οδηγήσουν σε μια απεικόνιση ασαφών συνόλων εισόδου στο $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_p$ σε

ασαφή σύνολα εξόδου στο V . Σε σχέση με την πλήρη μορφή, έστω $F_1^l \times F_2^l \times \dots \times F_p^l \triangleq A$ και $G \triangleq B$. Θεωρούμε την AAM ως ένα σύστημα που απεικονίζει ασαφή σύνολα σε ασαφή σύνολα μέσω της $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού θεωρούμε πως αναφερόμαστε σε διακριτά πεδία ορισμού, και ως κάθε U_i ($i = 1, 2, \dots, p$) και G είναι πεπερασμένα, έτσι ώστε το $R^{(l)}$ δίδεται από μια διακριτή πολυμεταβλητή συνάρτηση $\mu_{R^{(l)}}(x, y)$, που περιγράφεται από $\mu_{R^{(l)}}(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y)$, όπου $x \triangleq \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Συνεπώς $\mu_{R^{(l)}}(x, y) = \mu_{R^{(l)}}[x_1, x_2, \dots, x_p, y]$ και

$$\mu_{R^{(l)}}(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \mu_{F_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{F_p^l}(x_p) * \mu_{G^l}(y) \quad (10.1)$$

όπου υποθέτουμε πως οι πολλαπλές εισοδοί συνδέονται με ΚΑΙ και συνεπώς με T -νόρμες, και ότι μόνο οι T -νόρμες γινομένου ή ελαχίστου χρησιμοποιούνται.

Η p -διάστατη είσοδος στο $R^{(l)}$ δίνεται από το ασαφές σύνολο A_x , του οποίου η συνάρτηση μέλους είναι (θυμηθείτε ότι το διακριτό ασαφές σύνολο A_x γράφεται ως

$$\sum \sum \dots \sum \mu_{A_x}(x)/x$$

όπου οι αθροίσεις ως προς p δηλώνουν τον τελεστή ένωσης):

$$\mu_{A_x}(x) = \mu_{x_1}(x_1) * \dots * \mu_{x_p}(x_p) \quad (10.2)$$

όπου $X_k \subset U_k$ ($k = 1, 2, \dots, p$) είναι τα ασαφή σύνολα που περιγράφουν τις εισόδους.

Κάθε κανόνας $R^{(l)}$ προσδιορίζει ένα ασαφές σύνολο $B^l = A_x \circ R^{(l)}$ έτσι ώστε

$$\mu_{B^l}^l(y) = \mu_{A_x \circ R^{(l)}}(y) = \sup_{x \in A_x} [\mu_{A_x}(x) * \mu_{A \rightarrow B}(x, y)] \quad (10.3)$$

Αυτή η εξίσωση είναι η σχέση εισόδου-εξόδου του Σχήματος 10.2 ανάμεσα στο ασαφές σύνολο που διεγείρει μια AAM ενός κανόνα και στο ασαφές σύνολο που αποτελεί την έξοδο της AAM.

Το τελικό ασαφές σύνολο $B = A_x \circ [R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(M)}]$, που προσδιορίζεται από όλους τους κανόνες στη βάση, εξάγεται με το συνδυασμό του B_l και της σχετικής συνάρτησης μέλους $\mu_{A_x \circ R^{(l)}}(y)$ για $l = 1, 2, \dots, M$. Οι περισσότεροι ερευνητές συνδέουν τους κανόνες με μια T -συνόρμα (δηλ. την ασαφή ένωση), πρακτική που δίνει καλά αποτελέσματα.

Δεν υπάρχει κανένας θεωρητικός λόγος που να μας υποχρεώνει να συνδυάσουμε κανόνες με μια T -συνόρμα. Έχουμε ήδη δει ότι οι περισσότερες εφαρμογές έχουν τη δική τους κατάλληλη συλλογιστική και συνεπώς και δικές τους τεχνικές συνδυασμού. Ο προσθετικός συνδυασμός είναι ένα παράδειγμα. Τέτοια ΣΑΛ ονομάζονται προσθετικά. Σημειώστε πως, από τον ορισμό που έχουμε δώσει στην T -συνόρμα, η αριθμητική πρόσθεση δεν είναι T -συνόρμα, ενώ το αλγεβρικό άθροισμα $x \oplus y = x + y - xy$ είναι.

10.2.5 Ασαφοποίηση

Ο Ασαφοποιητής απεικονίζει ένα σαφές σημείο $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_p) \in U$ σε ένα ασαφές σύνολο A^* στο U . Αυτός που χρησιμοποιείται συχνότερα είναι το μονοσύνολο το οποίο έχει υποστήριξη x' αν $\mu_{A^*}(x') = 1$ για $x = x'$ και $\mu_{A^*}(x) = 0$ για κάθε άλλο $x \in U$ με $x \neq x'$. Στην περίπτωση αυτή η λειτουργία μεγίστου φράγματος εξαφανίζεται, δηλαδή $\mu_B^l(y) = \mu_{A_x \circ R^{(l)}}(y) = \mu_{A \rightarrow B}(x', y)$.

Ο ασαφοποιητής μονοσυνόλου δεν είναι επαρκής σε περιπτώσεις που τα δεδομένα περιέχουν θόρυβο. Χρησιμοποιούμε έτσι ασαφή σύνολα στα οποία $\mu_{A^*}(x') = 1$ και η $\mu_{A^*}(x)$ μειώνεται καθώς το x απομακρύνεται από το x' . Παράδειγμα αποτελεί η γκαουσιανή και η τριγωνική συνάρτηση μέλους. Όσο πιο ευρείς είναι αυτές οι συναρτήσεις, τόσο πιο μεγάλη είναι η αβεβαιότητα για το x . Όσον αφορά τη σχέση (10.3): αντικαθιστώντας την (10.1) και την (10.2) στην (10.3), και κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι όλες οι ενώσεις, που σημειώνονται με \sum , στο A_x και $R^{(l)}$, i_k ($k = 1, \dots, p$) είναι πάνω στους ίδιους χώρους, μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση μέλους

εξόδου για το ασαφές σύνολο του 1ου κανόνα ως εξής:

$$\mu_B^l(y) = \sup_{x \in U} \mu_{X_1}(x_1) * \dots * \mu_{X_p}(x_p) * \mu_{F_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{F_p^l}(x_p) * \mu_{G^l}(y) \quad (10.4)$$

Καθώς το μέγιστο φράγμα αφορά μόνο το $x \in U$, τότε από την μεταβατική και μονοτονική ιδιότητα της T -νόρμας μπορούμε να ξαναγράψουμε $\mu_B^l(y)$ ως:

$$\mu_B^l(y) = \mu_{G^l}(y) * \sup_{x \in U} [\mu_{X_1}(x_1) * \dots * \mu_{X_p}(x_p) * \mu_{F_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{F_p^l}(x_p)] \quad (10.5)$$

Αυτό σημαίνει πως πρέπει να υπολογίσουμε ένα και όχι m μέγιστα φράγματα. Επειδή μια T -νόρμα είναι μια συνάρτηση δύο χώρων από $[0, 1] \times [0, 1]$, μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε T -νόρμα στην (10.5) ως ενεργούσα σε ένα ζεύγος συναρτήσεων μέλους. Έτσι,

$$\mu_B^l(y) = \mu_{G^l}(y) * \sup_{x \in U} [\mu_{X_1}(x_1) * \mu_{F_1^l}(x_1)] * \dots * [\mu_{X_p}(x_p) * \dots * \mu_{F_p^l}(x_p)] \quad (10.6)$$

10.2.6 Αποσαφήνιση

Η αποσαφήνιση παράγει μια σαφή έξοδο για το ΣΑΛ από το ασαφές σύνολο που προέκυψε ως έξοδος από την αποφαντική μηχανή του Σχήματος 10.2. Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλοί αποσαφηνιστές ωστόσο δεν υπάρχει επιστημονική βάση για κανένα από αυτούς, δηλαδή κανένας δεν έχει προκύψει με βάση κάποια αρχή, όπως η μεγιστοποίηση της ασαφούς πληροφορίας ή εντροπίας. Έτσι η αποσαφήνιση είναι περισσότερο μια τέχνη παρά μια επιστήμη. Ένα βασικό κριτήριο για την επιλογή του αποσαφηνιστή είναι η υπολογιστική απλότητα.

1. **Αποσαφηνιστής Μεγίστου:** Αυτός εξετάζει το ασαφές σύνολο B και επιλέγει ως έξοδο την τιμή του ψ που μεγιστοποιεί τη $\mu_B(y)$. Μερικές φορές οδηγεί σε περίεργα αποτελέσματα ή και σε αδιέξοδο.

2. **Αποσαφηνιστής Μέσου των Τοπικών Μεγίστων:** Εξετάζει το ασαφές σύνολο B και πρώτα προσδιορίζει τις τιμές του y για τις οποίες η $\mu_B(y)$ έχει τοπικό μέγιστο. Κατόπιν υπολογίζει το μέσο αυτών των τιμών ως την τελική έξοδο. Δυστυχώς και αυτή η μέθοδος οδηγεί σε περίεργα αποτελέσματα. Αν η $\mu_B(y)$ έχει μόνο ένα τοπικό μέγιστο, τότε η μέθοδος ανάγεται στην προηγούμενη, με όλες τις αναφερθείσες παρενέργειες.
3. **Αποσαφηνιστής Κεντροειδούς:** Δίνει ως έξοδο του ΣΑΛ το κέντρο βαρύτητας (κεντροειδές) \bar{y} του B . Γνωρίζουμε πως

$$\bar{y} = \left[\int_S y \mu_B(y) dy \right] / \left[\int_S \mu_B(y) dy \right] \quad (10.7)$$

όπου S παριστάνει την υποστήριξη της $\mu_B(y)$. Συχνά η S είναι διακριτή, και έτσι η μπορεί να υπολογιστεί ως άθροισμα αντί για ολοκλήρωμα:

$$\bar{y} = \left[\sum_{i=1}^I y_i \mu_B(y_i) \right] / \left[\sum_{i=1}^I \mu_B(y_i) \right]. \quad (10.8)$$

Ο Αποσαφηνιστής Κεντροειδούς έχει ως μοναδικό μειονέκτημα την πολυπλοκότητά του.

Έχει αποδειχτεί πως για συλλογιστική γινομένου και προσθετικό συνδυασμό η \bar{y} μπορεί να υπολογιστεί στη βάση πληροφοριών για το κεντροειδές των επιμέρους κανόνων. Αν και αυτό δεν επεκτείνεται σε άλλες T -νόρμες και T -συνόρμες, παρέχει κάποια βάση για την πιο διαδεδομένη μέθοδο αποσαφήνισης, αυτή των Υψών.

4. **Αποσαφηνιστής Υψών:** Έστω \bar{y}^l το κέντρο βαρύτητας του ασαφούς συνόλου B^l (το οποίο σχετίζεται με την ενεργοποίηση του κανόνα $R^{(l)}$). Ο αποσαφηνιστής πρώτα υπολογίζει τη $\mu_B^l(y)$ στο \bar{y}^l και μετά την έξοδο του ΣΑΛ ως:

$$y_h = \left[\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \mu_{B^l}(\bar{y}^l) \right] / \left[\sum_{l=1}^M \mu_{B^l}(\bar{y}^l) \right] \quad (10.9)$$

Η χρήση της (10.9) είναι απλή γιατί τα κέντρα βαρύτητας των κοινότερων συναρτήσεων μέλους είναι γνωστά εκ των προτέρων. Ανεξάρτητα αν χρησιμοποιούμε συλλογιστική ελαχίστου ή γινομένου, το κέντρο βαρύτητας για το B^l είναι: για συμμετρική τριγωνική συνάρτηση εξόδου, η κορυφή του τριγώνου, για γκαουσιανή συνάρτηση εξόδου, η κεντρική τιμή της γκαουσιανής, και για συμμετρική τραπεζοειδή συνάρτηση το μέσο σημείο της υποστήριξης.

Σημειώστε τη διαφορά των φαινομενικά ίδιων (10.8) και (10.9). Αν και εύχρηστη, η (10.9) έχει ένα ελάττωμα που δε φαίνεται αμέσως: Αν και η y_h κάνει χρήση όλου του εύρους κάθε συνάρτησης εισόδου, καθώς αυτό είναι ενσωματωμένο στο $\mu_B^l(\bar{y}^l)$, δεν κάνει το ίδιο για τις συναρτήσεις εξόδου. Χρησιμοποιεί μόνο το κέντρο της υποστήριξής τους, \bar{y}^l . Ανεξάρτητα από το πόσο στενή είναι μια συνάρτηση εξόδου, πράγμα που δείχνει μια εμπιστοσύνη στον κανόνα αυτό, ή από το πόσο ευρεία είναι μια άλλη, που δείχνει περιορισμένη εμπιστοσύνη, αντίστροφα, αυτός ο αποσαφηνιστής δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στον τελευταίο αποσαφηνιστή:

5. **Τροποποιημένος Αποσαφηνιστής Υψών:** Όπως και στον Αποσαφηνιστή Υψών, η \bar{y}^l είναι το κέντρο βαρύτητας του ασαφούς συνόλου B^l . Ο αποσαφηνιστής τώρα υπολογίζει την $\mu_B^l(y)$ στο \bar{y}^l και κατόπιν υπολογίζει την έξοδο του ΣΑΛ ως:

$$y_{mh} = \left[\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \mu_{B^l}(\bar{y}^l) / \delta^{l^2} \right] / \left[\sum_{l=1}^M \mu_{B^l}(\bar{y}^l) / \delta^{l^2} \right] \quad (10.10)$$

όπου δ^l είναι ένα μέτρο του εύρους της συνάρτησης μέλους εξόδου για τον κανόνα $R^{(l)}$. Για τριγωνικές και τραπεζοειδείς συναρτήσεις, το δ^l θα μπορούσε να είναι η υποστήριξη της συνάρτησης, ενώ για γκαουσιανές συναρτήσεις θα μπορούσε να είναι η τυπική απόκλιση. Οι υπολογισμοί είναι εξίσου εύκολοι με αυτούς του προηγούμενου αποσαφηνιστή, αρκεί να είναι γνωστές οι παράμετροι του δ^l καθώς και τα $\mu_B^l(y)$ και \bar{y}^l .

10.3 Εφαρμογή της Ασαφούς Λογικής σε Δίκτυα Υπολογιστών

10.3.1 Εισαγωγικά για τα δίκτυα ATM

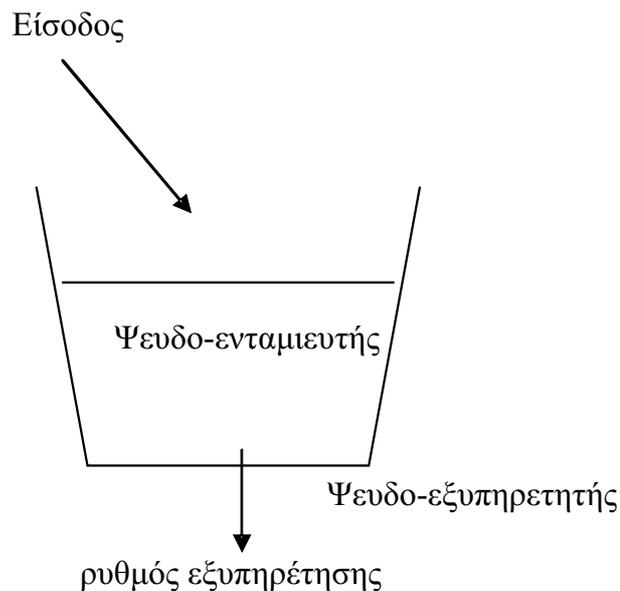
Ένα από τα πιο σημαντικά πρωτόκολλα στο χώρο των ευρυζωνικών επικοινωνιών είναι το ATM. Το ακρωνύμιο ATM σημαίνει "Asynchronous Transfer Mode" δηλαδή "ασύγχρονος τρόπος μεταφοράς". Το ATM έχει σχεδιαστεί με σκοπό να κάνει δυνατή τη μετάδοση πολυμεσικής κίνησης - δεδομένων, ήχου και εικόνας - μέσα από ένα ολοκληρωμένο δίκτυο, προσφέροντας στους χρήστες επιδόσεις αντίστοιχες με αυτές που θα εύρισκαν σε εξειδικευμένα δίκτυα ειδικού σκοπού. Βασικό συστατικό της ευελιξίας του ATM είναι ότι η πληροφορία μεταδίδεται σε μικρά τμήματα των 53 byte που ονομάζονται κελιά (cells). Από τα 53 byte 48 μεταφέρουν πληροφορία ενώ τα υπόλοιπα 5 αποτελούν την επικεφαλίδα (header), η οποία μεταφέρει πληροφορίες ελέγχου.

Η ανομοιομορφία των πηγών κίνησης που συνδέονται σε ένα δίκτυο ATM καθώς και η δυνατότητα που δίνει το πρωτόκολλο για μεταβλητό ρυθμό μετάδοσης φέρνει συχνά το δίκτυο σε κατάσταση συμφόρησης. Συμφόρηση προκύπτει κάθε φορά που ο ρυθμός εισόδου, πλησιάζει ή είναι μεγαλύτερος από την διαθέσιμη χωρητικότητα. Σε μία κατάσταση συμφόρησης, το μήκος των ενταμιευτών/ουρών μέσα στο δίκτυο ίσως γίνει πολύ μεγάλο σε μικρό χρονικό διάστημα, έχοντας ως αποτέλεσμα την υπερχείλιση των ενταμιευτών και την απώλεια κελιών. Συνεπώς ο έλεγχος συμφόρησης είναι απαραίτητος για να διαβεβαιώσει ότι οι χρήστες παίρνουν την ποιότητα υπηρεσιών που έχουν διαπραγματευτεί κατά την είσοδό τους στο δίκτυο. Η συμφόρηση είναι ένα δυναμικό πρόβλημα, για αυτό και οι στατικές λύσεις δεν είναι ικανές να λύσουν το πρόβλημα.

Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της συμφόρησης έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι. Σημαντικότερες είναι αυτές που ασχολούνται με την διαμόρφωση της κίνησης (traffic shaping) και την αστυνόμευση της κίνησης.

Η διαμόρφωση κίνησης δίνει τη δυνατότητα να “μορφοποιηθεί” η ροή μίας πηγής πακέτων με καταρρακτώδη ροή, δηλ. να ομαλοποιηθεί ο ρυθμός ροής πακέτων μέσω ενταμιευτών. Αυτό επιτυγχάνει πιο αποδοτική χρήση της υφιστάμενης σύνδεσης, αλλά εισάγει μια ανεπιθύμητη καθυστέρηση στο χρόνο μετάδοσης (λόγω του ενταμιευτή).

Ο πιο διάσημος αλγόριθμος για την διαμόρφωση κίνησης είναι ο αλγόριθμος του διαρρέοντος δοχείου (leaky bucket). Αυτή η μέθοδος παρέχει έναν ψευδο - ενταμιευτή (pseudo - buffer). Κάθε φορά που ο χρήστης στέλνει ένα κελί, η ουρά στον ψευδο - ενταμιευτή αυξάνει κατά ένα. Ο ψευδο - εξυπηρετητής (pseudo - server) εξυπηρετεί την ουρά και η κατανομή του χρόνου - εξυπηρέτησης είναι σταθερή. Επίσης υπάρχουν δύο παράμετροι ελέγχου στον αλγόριθμο: ο ρυθμός εξυπηρέτησης του ψευδο - εξυπηρετητή και το μέγεθος του ψευδο - ενταμιευτή.



Σχήμα 10.3: Η μέθοδος του διαρρέοντος δοχείου.

Η αστυνόμευση της κίνησης παρακολουθεί τους χρήστες και σε περιπτώσεις που αυτοί δεν συμμορφώνονται με τις τιμές που έχουν

δηλώσει στην αρχή της σύνδεσης παίρνει κάποια μέτρα - συνήθως αποκλεισμό ή μείωση της ροής.

10.3.2 Προβλήματα στον έλεγχο συμφόρησης και ροής κίνησης

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πώς οι αρχές της ασαφούς λογικής μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα του έλεγχου συμφόρησης. Χρησιμοποιώντας τους μηχανισμούς του Διαρρέοντος Δοχείου και του Κινούμενου Παράθυρου (Moving Window) σαν "οικοδομικά" μπλοκ, αναπτύσσουμε ένα σύστημα βασισμένο σε κανόνες ασαφούς λογικής το οποίο είναι διαφανές στις πηγές οι οποίες ακολουθούν τη σύμβαση κίνησης, αποτελεσματικό στην παύση των πηγών που παραβιάζουν την σύμβαση κίνησης και γρήγορο στην ανταπόκριση σε μέσους και μέγιστους ρυθμούς παραβάσεων, καθώς και σε μέγιστους ρυθμούς παραβάσεων, οι οποίοι δεν επηρεάζουν το μέσο ρυθμό συγκρίνοντας με μηχανισμούς που έχουν προταθεί προηγουμένως. Το σύστημα λειτουργεί με προφανείς κανόνες, είναι απλό σε εκτέλεση και υπολογιστικά εφικτό σύμφωνα με τους περιορισμούς που επιβάλλονται από το περιβάλλον των δικτύων υψηλής ταχύτητας στο οποίο λειτουργεί.

Για να προστατευτεί το δίκτυο και οι ήδη υπάρχουσες συνδέσεις, πρέπει να γίνουν ενέργειες από την λειτουργία αστυνόμευσης σχετικά με την ανακάλυψη παραβάσεων της συμφωνίας. Το πιο προφανές είναι να απορρίπτονται όλα τα κελιά για τα οποία η παραβίαση της συμφωνίας κίνησης έχει εντοπιστεί. Παρ' όλα αυτά, πρέπει ν' αναγνωριστεί ότι το σύνολο των παραμέτρων αστυνόμευσης που έχουν προταθεί στις διάφορες επιτροπές προτυποποίησης, συγκεκριμένα ο μέσος όρος του ρυθμού κελιού, ο μέγιστος ρυθμός κελιού, και διάρκεια της κορυφής, δεν είναι ικανά να περιγράψουν ολοκληρωτικά την συμπεριφορά όλων των ATM πηγών. Επίσης, μπορεί όλα αυτά τα χαρακτηριστικά να μην είναι γνωστά κατά την έναρξη της κλήσης με την απαιτούμενη ακρίβεια. Αύτη η αβεβαιότητα έχει σαν αποτέλεσμα μια σημαντική πιθανότητα ότι η λειτουργία αστυνόμευσης παίρνει

10.3 Εφαρμογή της Ασαφούς Λογικής σε Δίκτυα Υπολογιστών 251

λάθος απόφαση και απορρίπτει κελιά που προέρχονται από πηγή η οποία συμφωνεί με την συνθήκη εξυπηρέτησης, ή αντιστρόφως. Η απώλεια κελιού της “ευγενούς” πηγής συνεισφέρει στην απόδοση του δικτύου και πρέπει να διατηρείται κάτω από τη μέγιστη απώλεια κελιού την οποία μπορεί ν’ αντέξει κάθε συγκεκριμένη τάξη κίνησης. Για να επιτευχθεί αυτός ο σκοπός, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ένα συγκεκριμένο περιθώριο κατά τη διάρκεια αστυνόμευσης, έτσι ώστε μικρές παραβάσεις από τις αρχικές διαπραγματευτικές παραμέτρους να μην τιμωρούνται.

Μια δεύτερη κίνηση την οποία η λειτουργία αστυνόμευσης μπορεί να κάνει είναι να σημειώνει τα κελιά που κάνουν παραβάσεις για πιθανή απόρριψη κατά μήκος του δικτύου σε περίπτωση συνωστισμού.

Η λειτουργία αστυνόμευσης πρέπει να λειτουργεί σε κάθε σύνδεση κατά τη διάρκεια ολόκληρης της ενεργής φάσης και πρέπει να λειτουργεί σε πραγματικό χρόνο, συνεπώς πρέπει να είναι γρήγορη, απλή, φθηνή και πρέπει να προσφέρεται για υλοποίηση σε υλικό. Πρέπει να είναι γρήγορη, δηλαδή να ενεργεί σε κελιά που παραβιάζουν τη συμφωνία, έτσι ώστε να περιορίζονται οι επιπτώσεις μιας πηγής “κακής συμπεριφοράς” στην ποιότητα της εξυπηρέτησης που προσφέρεται σε όλες τις συνδέσεις που μοιράζονται τους πόρους του δικτύου, και από την άλλη πλευρά θα πρέπει να είναι διαφανής στις συνδέσεις που σέβονται τη συνθήκη κίνησης.

Η ιδανική καμπύλη πιθανότητας παραβάσεων δείχνει τιμές κοντά στο μηδέν ή πολύ χαμηλές παραβάσεις και πολύ υψηλές τιμές για σημαντικές παραβάσεις. Το βασικό πρόβλημα, σε σχέση προς το μέσο ρυθμό κελιού της αστυνόμευσης Leaky Bucket, LB, είναι ότι τα χαρακτηριστικά της πηγής πρέπει να εκτιμηθούν στην βάση του σχετικά μικρού δείγματος, το οποίο δίνει αύξηση σε συγκεκριμένη πιθανότητα λανθασμένων αποφάσεων αστυνόμευσης. Μια επέκταση της δειγματοληπτικής περιόδου, από την άλλη πλευρά, αυξάνει το χρόνο αντίδρασης των μηχανισμών. Ένα μεγαλύτερο περιθώριο ανάμεσα στον αστυνομευμένο ρυθμό κελιού και στον διαπραγματευόμενο ρυθμό κελιού μειώνει την ικανότητα των μηχανισμών να εντοπίσουν μια υπερφόρτωση πραγματικά μεγάλης διάρκειας και επί-

σης να οδηγήσουν σε περισσότερο δυσμενή συμπεριφορά χειρότερης περίπτωσης.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η αστυνόμευση του κορυφαίου και του μέσου ρυθμού είναι αδύνατη, καθώς καθένας από τους δύο στόχους απαιτεί διαφορετική έκταση. Ο μέσος ρυθμός αστυνόμευσης απαιτεί το ρυθμό μείωσης του μετρητή και το όριο του μετρητή να είναι μεγάλο, έτσι ώστε η απόφαση να παρθεί βασισμένη σ' ένα ικανά μεγάλο δείγμα της εισερχόμενης κίνησης. Αυτό υπονοεί ανεπιθύμητη εκτέλεση όσον αφορά τον κορυφαίο ρυθμό αστυνόμευσης, καθώς μια έκρηξη θα ξεπερνούσε εύκολα του αστυνομευμένο ρυθμό, παρ' όλο που ίσως να ήταν καλό μέσα στα όρια της διαπραγματευόμενης κίνησης. Από την άλλη πλευρά η αστυνόμευση του κορυφαίου ρυθμού απαιτεί έναν υψηλό ρυθμό μείωσης του μετρητή, κοντά στον αστυνομευμένο κορυφαίο ρυθμό, και μια μικρή τιμή ορίου του μετρητή, έτσι ώστε η απόφαση να παρθεί γρήγορα, καθώς η έκρηξη είναι ακόμα σε εξέλιξη. Μια μακράς διάρκειας παραβίαση του μέσου ρυθμού θα περνούσε προφανώς αδιάφορη, καθώς ο μετρητής θα μειωνόταν σε ρυθμό πολύ μεγαλύτερο από τον πραγματικό μέσο ρυθμό παραβίασης.

10.3.3 Έλεγχος συμφόρησης σε δίκτυα ATM χρησιμοποιώντας ένα Ασαφές Σύστημα

Τα μοντέλα κίνησης που χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση της επίδοσης πρέπει να είναι αρκετά προσαρμοστικά για να μπορούν να αντιμετωπίσουν την μεγάλη ποικιλία υπηρεσιών για τις οποίες το δίκτυο είναι σχεδιασμένο. Ο μέγιστος ρυθμός bit B_p ορίζεται ως ο μέγιστος ρυθμός μεταφοράς της πηγής. Ο μέσος ρυθμός bit B_m ορίζεται ως ο μέσος ρυθμός bit μιας πηγής κατά μέσο όρο κατά τη διάρκεια μιας κλήσης. Ο παράγοντας έκρηξης b είναι καθορισμένος ως η αναλογία των μέσων προς τους κορυφαίους ρυθμούς.

Υπάρχουν τρεις παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την εγχυρότητα τέτοιων παραμέτρων ως μετρητών κίνησης:

10.3 Εφαρμογή της Ασαφούς Λογικής σε Δίκτυα Υπολογιστών 253

- Ίσως δεν είναι γνωστοί με επαρκή ακρίβεια την στιγμή της έναρξης της σύνδεσης.
- Οι τιμές που παίρνουν ίσως να αλλάζουν λόγω διαφόρων αποκλίσεων στην καθυστέρηση των κελιών που προκύπτει από την επίδραση των ουρών αναμονής των κόμβων του δικτύου κατά μήκος του μονοπατιού που ακολουθούν. Μια τέτοια απόκλιση επηρεάζει τον κορυφαίο ρυθμό.
- Δεν είναι συνετό να παίρνονται δύσκολες αποφάσεις βασισμένες στις τιμές σε κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή εξαιτίας των μικρών εκτιμηθέντων μεσοδιαστημάτων τα οποία εμπλέκονται.

Η λογική του ασαφούς ελέγχου έχει εφαρμοστεί στην λειτουργία αστυνόμευσης συνδυάζοντας δύο κλασικούς μηχανισμούς γνωστούς ως Leaky Bucket και Moving Window. Οι εισερχόμενοι δείκτες κίνησης οι οποίοι προκύπτουν μέσω αυτών των τεχνικών παρέχονται στο ασαφές, βασισμένο σε κανόνες σύστημα το οποίο παίρνει αποφάσεις, το οποίο προτείνει, μετά την αποσαφήνιση, μια πράξη αποδοχής ή απόρριψης.

Όσον αφορά τη δυναμική συμπεριφορά, όσο σοβαρή κι αν είναι η παραβίαση της συμφωνίας κίνησης, ο Leaky Bucket δεν θα αντιδράσει εάν ο μετρητής δεν φτάσει στο όριό του. Παρ' όλα αυτά, το λιγότερο S_m κελιά -συνήθως είναι πολύ περισσότερα- αναπόφευκτα θα γίνουν δεκτά στο δίκτυο πριν ο αστυνομεύων προλάβει να δράσει. Αυτό ίσως να έχει αντίθετη συνέπεια σε άλλες συνδέσεις οι οποίες είναι σε εξέλιξη στο δίκτυο.

Στο κεφάλαιο αυτό συνδυάζουμε την τεχνική του τροποποιημένου LB και τον μηχανισμό του κυλιόμενου παραθύρου (Moving Window, MW, λειτουργώντας και τα δύο ως προεπεξεργαστές για την εισερχόμενη κίνηση. Ο τροποποιημένος leaky bucket είναι παρόμοιος με τον κλασικό, εκτός από το ότι ο μετρητής σταματά να αυξάνεται με τις εισερχόμενες κλήσεις όταν φτάσει μια τιμή $S_t > S_m$, έτσι ώστε η πραγματική μνήμη να είναι ενσωματωμένη στον μηχανισμό. Αυ-

τό αμέσως συνεπάγεται μια καλύτερη χρήση δικτύου, καθώς κλείνει τελείως την πηγή που έκανε την παραβίαση, έτσι ώστε να μην σπαταλιέται πλάτος ζώνης συχνότητας για μια πηγή εξαντλητικά απαιτητική. Ο τροποποιημένος leaky bucket στην δική μας εφαρμογή έχει διαστασιοποιηθεί για αστυνόμευση μέσου ρυθμού κελιού, με το μέγιστο ρυθμό κελιού να παρακολουθείται από το εργαλείο του moving window, το οποίο διατηρεί αρίθμηση των κελιών τα οποία φτάνουν κατά τη διάρκεια των προηγούμενων T δευτερόλεπτων. Η T είναι μια σταθερά ίση προς το χρόνο τον οποίο χρειάζεται η πηγή για να παράγει δέκα κελιά στον μέγιστο ρυθμό. Δέκα ήταν μια κρίσιμη τιμή για τον αριθμό των κελιών που λαμβάνονται κατά την διάρκεια των τελευταίων T δευτερολέπτων, πάνω στα οποία το όριο του παραθύρου W_m ήταν βασισμένο. Θεωρήθηκαν δύο κατηγορίες κίνησης, η μία είναι πακέτο φωνής ενώ η άλλη μια εικόνα, και οι δύο ακολουθούμενες από την μέθοδο της έκρηξης - σιωπής (burst silence) η οποία έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως στην βιβλιογραφία. Δύο μοντέλα παραγόντων κίνησης χρησιμοποιήθηκαν για να παραχθεί καθένα από τα ρεύματα κίνησης: στο πρώτο μοντέλο, και η διάρκεια και της έκρηξης και της σιωπής ήταν εκθετικά κατανομημένες. Στο δεύτερο μοντέλο ο αριθμός των κελιών που παρήχθησαν κατά τη διάρκεια μιας έκρηξης ακολούθησε μια γεωμετρική κατανομή, ενώ η διάρκεια της ησυχίας ήταν εκθετικά κατανομημένη. Οι παράμετροι κίνησης για τους δύο τύπους πηγών που θεωρούνται δίνονται στον Πίνακα 10.1.

Σε κάθε άφιξη κελιού, οι τιμές του μετρητή S και ο αριθμός των κελιών στο παράθυρο W τροφοδοτούνται στο ασαφές σύστημα βασισμένο σε κανόνες το οποίο πήρε την απόφαση να δεχτεί ή ν' απορρίψει το κελί. Οι κανόνες που χρησιμοποιήθηκαν περιγράφονται γενικά παρακάτω:

- Αν το W είναι υψηλό και το S είναι υψηλό τότε ο ρυθμός μείωσης τίθεται στο 1 (το κελί απορρίπτεται).
- Αν το W δεν είναι και το S είναι πολύ υψηλό τότε ο ρυθμός μείωσης τίθεται στο 1 (το κελί απορρίπτεται).

10.3 Εφαρμογή της Ασαφούς Λογικής σε Δίκτυα Υπολογιστών 255

Παράμετροι Πηγών	Πακεταρισμένη Φωνή	Εικόνα
Ρυθμός Έκρηξης b	32Kbps	2Mbps
Μέσος Ρυθμός m	11.2Kbps	87Kbps
Εκρηκτικότητα	2.85	23
Μέσος όρος έκρηξης	0.650s	11s
Μέσος όρος σιωπής	0.352s	0.5s

Πίνακας 10.1: Χαρακτηριστικά κίνησης πηγών φωνής και εικόνας.

- Αν το W είναι πολύ υψηλό και το S είναι χαμηλό τότε ο ρυθμός πτώσης τίθεται στο μεσαίο ύψος.
- Αν το W είναι χαμηλό και το S είναι χαμηλό τότε ο ρυθμός μείωσης τίθεται στο 0 (το κελί γίνεται δεκτό).

Οι παράμετροι που δείχνουν τις διαστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν για κάθε κατηγορία κίνησης και για κάθε μοντέλο πηγής συνοψίζονται στον Πίνακα 10.2.

Οι συναρτήσεις μέλους που επιλέχθηκαν ήταν γκαουσιανές, κάνοντας οριζοντίωση στα δεξιά ή στα αριστερά της μέγιστης τιμής για να δηλωθεί ότι κάτω από ή πάνω από την τιμή, η τιμή της συμμετοχής ήταν ενωμένη (πλήρης συμμετοχή).

Για κάθε κανόνα i , $i = 1, \dots, 4$, οι παράμετροι εισόδου s και w απεικονίζονται στις δικές τους τιμές συμμετοχής $\mu_i^S(s)$ και $\mu_i^W(w)$ στα ασαφή σύνολα τα οποία χρησιμοποιούν οι κανόνες (πολύ υψηλός, υψηλός, χαμηλός κτλ). Το ελάχιστο από αυτές τις τιμές μ_i^S θεωρείται ως η συνεισφορά του κανόνα στο τελικό αποτέλεσμα. Έτσι κάθε κανόνας χορηγεί μια συνάρτηση η οποία είναι επιβαρημένη από το μ_i . Όταν και οι τέσσερις κανόνες “είναι ενεργοί”, το αποτέλεσμα είναι μια συνολική λειτουργία συμμετοχής για τον ρυθμό μείωσης η οποία είναι κατασκευασμένη ως το περίβλημα των τεσσάρων λειτουργιών.

Σ’ αυτό το σημείο η συνάρτηση της εξόδου χρειάζεται αποσαφήνιση για να παράγει μια αριθμητική τιμή η οποία θα είναι ο τελικός ρυθμός μείωσης. Όπως αναφέρθηκε ήδη, απ’ όλες τις μεθόδους αποσαφήνισης που έχουν αναφερθεί, η μέθοδος του ύψους είναι εκεί-

Παράμετροι FRBS	Μοντέλο 1		Μοντέλο 2	
	Φωνή	Εικόνα	Φωνή	Εικόνα
S_m	4410	160000	3410	160000
S_t	4890	170000	3890	175000
B_s	0.38b	0.05b	0.38b	0.05b
W_m	13	13	13	13

Πίνακας 10.2: FRBS Παράμετροι Διαστασιοποίησης.

νη η οποία είναι η πιο γοητευτική για τη χαμηλή υπολογιστική της πολυπλοκότητα (ένα χαρακτηριστικό που αναζητείται σε περιβάλλον ATM) και την ευρωστία της. Σύμφωνα μ' αυτή η τιμή εξόδου είναι ο επιβαρημένος μέσος όρος των ανεξάρτητων εξόδων των τεσσάρων κανόνων. Υποθέτοντας ότι ο τελικός ρυθμός πτώσης τον οποίο ένας κανόνας θα πρότεινε εάν λειτουργούσε μόνος του είναι D_i (στην περίπτωση μας είναι 1.0, 1.0, 0.7, και 0.0), ο τελικός ρυθμός μείωσης υπολογίζεται εύκολα όπως παρακάτω, σύμφωνα με την μέθοδο αποσαφήνισης του ύψους:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^4 \mu_i^D D_i}{\sum_{i=1}^4 \mu_i^D}$$

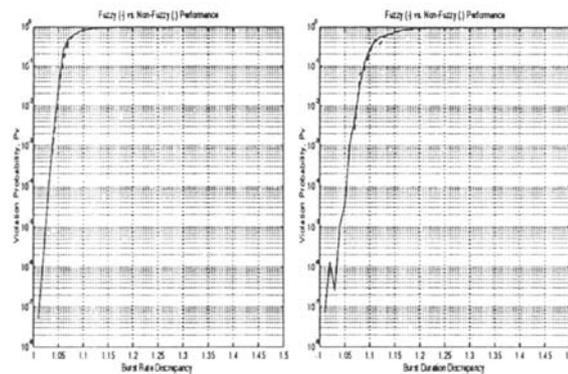
Ελέγχοντας τον μηχανισμό που περιγράφεται στην προηγούμενη ενότητα ο στόχος μας με σεβασμό στην διαφάνεια των καλά συμπεριφερόμενων πηγών τέθηκε στην πιθανότητα παραβίασης $R_u \leq 10^{-8}$ για λόγους υπολογιστικής αποτελεσματικότητας.

10.3.4 Αποτελέσματα

Χρησιμοποιήσαμε τα δύο μοντέλα τα οποία ήδη περιγράψαμε για να ορίσουμε μια πηγή πακεταρισμένης φωνής και πακεταρισμένης εικόνας και να τροφοδοτήσουν την παραχθείσα κίνηση μέσω ενός ασαφούς συστήματος βασισμένου σε κανόνες, εστιάζοντας στις καμπύλες της πιθανότητας απώλειας κελιού σαν μια συνάρτηση των μέσων και κορυφαίων ρυθμών παραβιάσεων. Επίσης εξετάσαμε την επίδοση

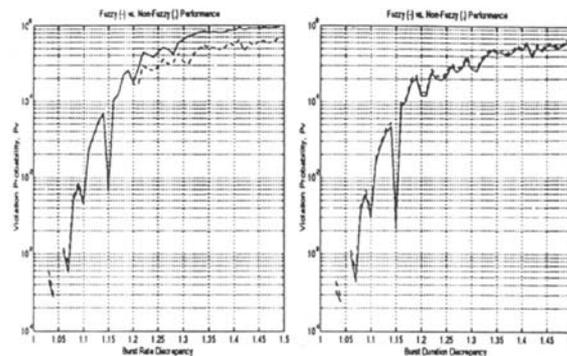
10.3 Εφαρμογή της Ασαφούς Λογικής σε Δίκτυα Υπολογιστών 257

του προτεινόμενου μηχανισμού όταν ο κορυφαίος ρυθμός αυξάνεται αλλά ο μέσος ρυθμός παραμένει ο ίδιος, μια κατάσταση η οποία προκύπτει πολύ συχνά στην πραγματικότητα. Τέλος, μετράμε την δυναμική απόκριση του συστήματος στην περίπτωση του κορυφαίου ρυθμού παραβιάσεων. Σε όλα τα παραπάνω σενάρια, συγκρίνουμε την απόδοση που αποκτά μ' αυτό το μηχανισμό μ' αυτή που αποκτά με του leaky bucket. Μόνο τα αποτελέσματα που σχετίζονται με το πρώτο μοντέλο παρουσιάζονται, το δεύτερο μοντέλο παράγει ποιοτικά παρόμοια συμπεράσματα.



Σχήμα 10.4: Έλεγχος του Ρυθμού Έκρηξης και του Μέσου Ρυθμού για την πηγή φωνής.

Στα Σχήματα 10.4 και 10.5 η πιθανότητα μείωσης κελιού αναπαριστάται σε σχέση με το βαθμό της μη-συμμόρφωσης στις διαπραγματευόμενες τιμές του μέσου ή του κορυφαίου ρυθμού κελιού. Όπως φαίνεται, οι πηγές που συμμορφώνονται και οι πηγές που πολύ λίγο παραβιάζουν την δική τους συμφωνία κίνησης υπομένουν ποινές της τάξης 10^{-7} . Η R_v μετά αυξάνεται κατακόρυφα για τις ολοκληρωτικά κλειστές πηγές οι οποίες λειτουργούν καλά πάνω από τις διαπραγματευόμενες παραμέτρους. Πρέπει να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι αυτό είναι αλήθεια και για τον μέσο και για τον κορυφαίο ρυθμό αστυνόμευσης. Κάθε ένα από αυτά τα σχήματα περιέχει απο-



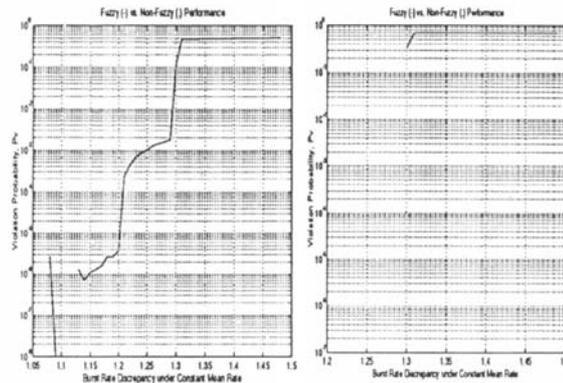
Σχήμα 10.5: Έλεγχος του Ρυθμού Έκρηξης και του Μέσου Ρυθμού για την πηγή εικόνας.

τελέσματα και για τα δύο μοντέλα κίνησης πηγών, εικονογραφώντας την ανεξαρτησία των προτεινόμενων μηχανισμών στο θεωρούμενο μοντέλο πηγής.

Το μη-ασαφές σύστημα φαίνεται να εκτελεί απότομα όσο καλά όσο και το ασαφές σύστημα, και για το μέσο και για τον κορυφαίο ρυθμό αστυνόμευσης, παρά το γεγονός ότι είναι διαστασιοποιημένο για να ελέγχει τον μέσο ρυθμό. Ο λόγος είναι ότι η αύξηση στον ρυθμό έκρηξης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση στον μέσο ρυθμό επίσης, για όσο οι διάρκειες της έκρηξης και της σιωπής παραμένουν αναλλοίωτες. Η υπεροχή της ασαφούς προσέγγισης σε σχέση με τις διαφορές του ρυθμού έκρηξης αναπαριστάνεται στο Σχήμα 10.6, όπου ο ρυθμός έκρηξης έχει αυξηθεί, αλλά η διάρκεια σιωπής έχει θεωρήσει μια τιμή όπως αυτή του μέσου ρυθμού που παραμένει σταθερή. Είναι φανερό ότι ο μη-ασαφής μηχανισμός δεν ανιχνεύει καμία παραβίαση, από τη στιγμή που ο bucket μετρητής παραμένει σε πολύ χαμηλές τιμές.

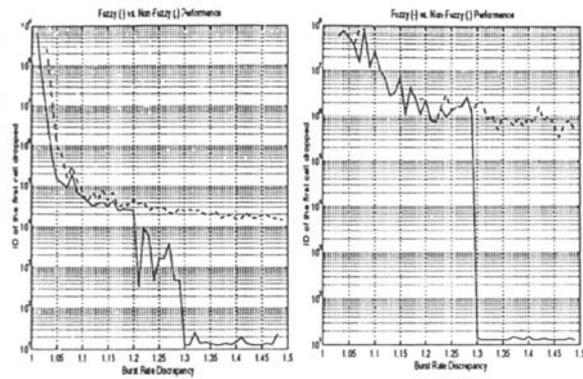
Το Σχήμα 10.7 επιδεικνύει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Ο σειριακός ρυθμός του πρώτου κελιού ο οποίος μειώθηκε αναπαριστάνεται έναντι στην διαφορά του ρυθμού έκρηξης. Είναι φανερό ότι ο μηχανισμός είναι εξαιρετικά γρήγορος στο να διακρίνει πα-

10.3 Εφαρμογή της Ασαφούς Λογικής σε Δίκτυα Υπολογιστών 259



Σχήμα 10.6: Έλεγχος του Ρυθμού Έκρηξης με Σταθερό Μέσο Όρο για την πηγή φωνής και εικόνας.

ραβιάσεις υψηλότερες ή ίσες του 20%, λόγω του ότι ο μηχανισμός του moving window έχει αναπτυχθεί μαζί με τον τροποποιημένο leaky bucket. Αυτός είναι ανώτερος από κάθε άλλο μηχανισμό που έχουμε δει ο οποίος είναι διαστασιοποιημένος για μέσο ρυθμό αστυνόμευσης κελιού, από τη στιγμή που οι μηχανισμοί χρειάζονται να έχουν όρια μετρητή της τάξης των χιλιάδων. Οι συμβατικοί μηχανισμοί οι οποίοι είναι διαθέσιμοι να ελέγχουν τον κορυφαίο ρυθμό κελιού, από την άλλη πλευρά, αποτυγχάνουν να ανιχνεύσουν τον μέσο ρυθμό παραβιάσεων κελιού, καθώς ο ρυθμός μείωσης του μετρητή πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αστυνομευμένο μέσο ρυθμό κελιού. Πρέπει να σημειωθεί ότι η ταχύτητα είναι πολύ μεγάλης σημασίας στα δίκτυα ATM, από τη στιγμή που ένα κελί απορρίπτεται, είναι ένα γεγονός το οποίο μπορεί να μεταφερθεί στη πηγή κατευθείαν ή έμμεσα μέσω πρόσθιας ή ανάστροφης γνωστοποίησης συσσώρευσης.

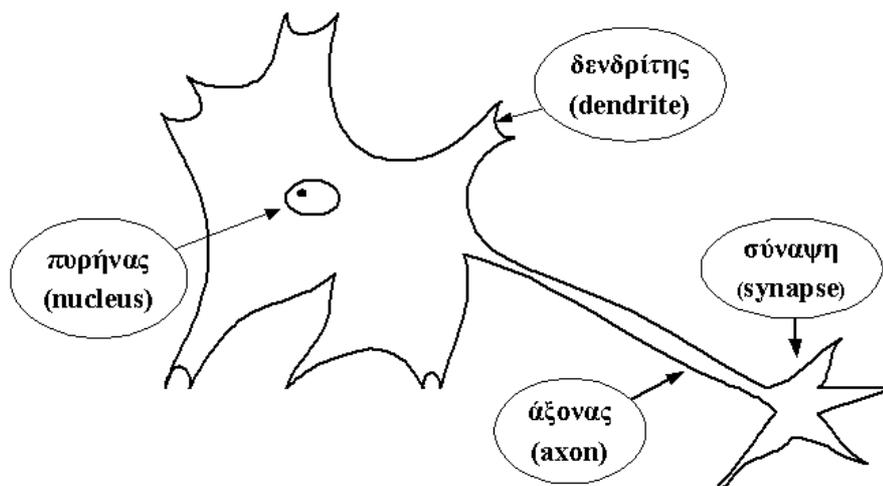


Σχήμα 10.7: Δυναμική Απόκριση του Ρυθμού Έκρηξης των πηγών φωνής και εικόνας.

Κεφάλαιο 11

Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα

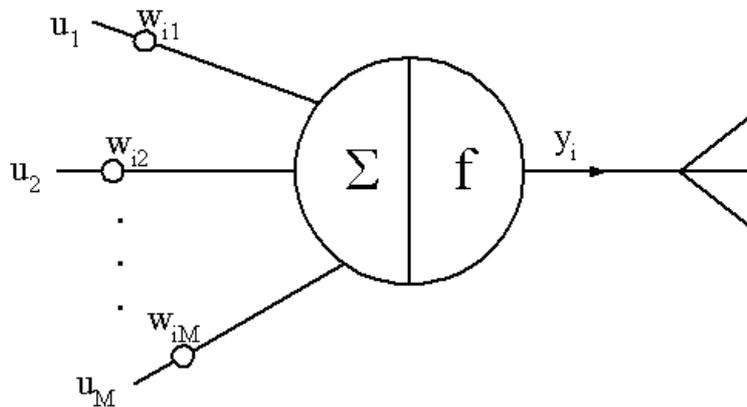
Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι συστήματα με δομή εμπνευσμένη από τη λειτουργία του νευρικού συστήματος και του εγκεφάλου. Η βασική μονάδα ενός νευρωνικού δικτύου είναι ο **νευρώνας (neuron)**. Ένας βιολογικός νευρώνας παρουσιάζεται στο Σχήμα 11.1 και αποτελείται από έναν πυρήνα, δενδρίτες, άξονες και συνάψεις.



Σχήμα 11.1: Βιολογικός νευρώνας.

Ο πυρήνας (**kernel**) του νευρώνα δέχεται σήματα από άλλους

νευρώνες, μέσω καναλιών εισόδου που ονομάζονται **δενδρίτες (dendrites)**, και τα επεξεργάζεται για τη δημιουργία ενός καινούργιου σήματος. Αν το σήμα αυτό είναι αρκετά ισχυρό, ενεργοποιείται η έξοδος του νευρώνα και παράγεται ένα σήμα εξόδου που μεταδίδεται μέσω ενός καναλιού εξόδου. Το κανάλι εξόδου ονομάζεται **άξονας (axon)** και η σύνδεσή του με τους денδρίτες των άλλων νευρώνων γίνεται μέσω **συνάψεων (synapses)**. Το μεταδιδόμενο σήμα μεταβάλλεται ανάλογα με την ισχύ της αντίστοιχης σύναψης. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελείται από δεκάδες δισεκατομμύρια νευρώνων, κάθε ένας από τους οποίους έχει την παραπάνω δομή.



Σχήμα 11.2: Τεχνητός νευρώνας: απομίμηση βιολογικού νευρώνα.

Σε ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο, το κύριο επεξεργαστικό στοιχείο είναι μια απομίμηση του βιολογικού νευρώνα, ο τεχνητός νευρώνας. Ένας τεχνητός νευρώνας είναι ένα χρονικά αναλλοίωτο σύστημα χωρίς μνήμη, με πολλές εισόδους και μία έξοδο. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 11.2 παρουσιάζεται ένας τεχνητός νευρώνας για

τον οποίο:

$$y_i(t) = f[x_i(t)]$$

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^M w_{ij} u_j(t)$$

Ο όρος $x_i(t)$ είναι το άθροισμα των σημάτων που προέρχονται από άλλους νευρώνες συνδεδεμένους με τον i -οστό νευρώνα μετά την επίδραση των συναπτικών βαρών w_{ij} , $j = 1, 2, \dots, M$.

Η συνάρτηση f ονομάζεται **συνάρτηση ενεργοποίησης (activation function)** και μπορεί να είναι είτε μια συνάρτηση κατωφλίου που παράγει μη μηδενική τιμή αν το άθροισμα $x_i(t)$ είναι αρκετά ισχυρό, είτε μια συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα, τα επόμενα μοντέλα συναρτήσεων ενεργοποίησης είναι πολύ συνηθισμένα σε εφαρμογές:

- μοντέλο McCulloch - Pitts:

$$f(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0 \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases}$$

- τμηματικά γραμμικό μοντέλο:

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \\ \xi, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ 1, & \xi \geq 1 \end{cases}$$

- σιγμοειδές μοντέλο:

$$f(\xi) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha\xi}}, \alpha > 0$$

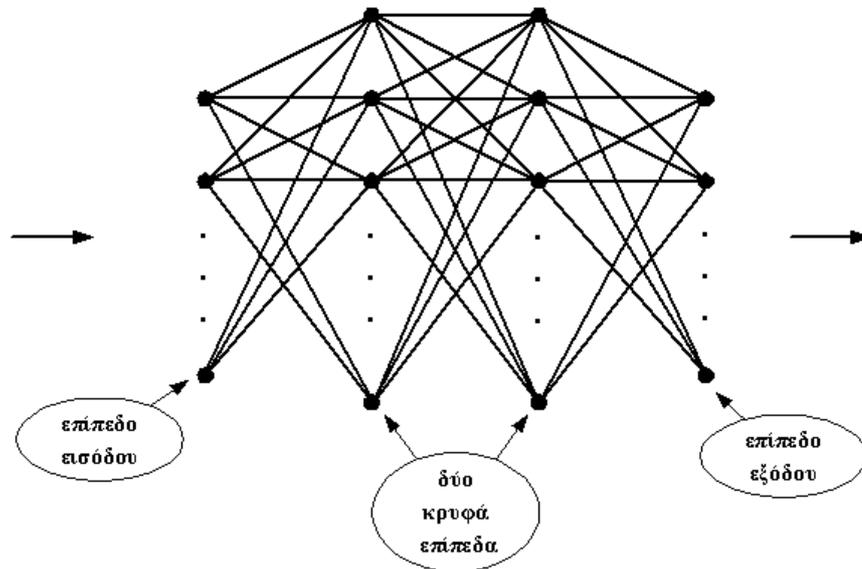
ή

$$f(\xi) = \frac{1 - e^{-\alpha\xi}}{1 + e^{-\alpha\xi}}, \alpha > 0$$

Ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο αποτελείται από τη σειριακή, παράλληλη και με ανατροφοδότηση σύνδεση νευρώνων. Γενικά, τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα διακρίνονται σε νευρωνικά δίκτυα πολλαπλών επιπέδων (multilayer neural networks) και επαναληπτικά (αναδρομικά) νευρωνικά δίκτυα (recurrent neural networks).

11.1 Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα πολλαπλών επιπέδων

Στα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα πολλαπλών επιπέδων, οι νευρώνες οργανώνονται σε μια ακολουθία επιπέδων. Τα επίπεδα διακρίνονται σε επίπεδα εισόδου (input layers), εξόδου (output layers) και κρυφά (hidden layers). Ένα παράδειγμα τεχνητού νευρωνικού δικτύου πολλαπλών επιπέδων φαίνεται στο επόμενο Σχήμα 11.3:



Σχήμα 11.3: Τεχνητό νευρωνικό δίκτυο πολλαπλών επιπέδων.

Το δίκτυο παραμετροποιείται από τα βάρη w_{ij} των συνάψεων του. Μόλις αυτά καθοριστούν, τα χαρακτηριστικά του δικτύου καθορίζονται πλήρως και σε κάθε σήμα εισόδου αντιστοιχεί ακριβώς ένα συγκεκριμένο σήμα εξόδου.

Για κάθε επίπεδο με m σήματα εισόδου και k σήματα εξόδου, το διάνυσμα των σημάτων εξόδου ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$\underline{y}(t) = \underline{f}(\underline{W}\underline{u}(t) + \underline{\theta}),$$

όπου το \underline{y} έχει μήκος k (όσο το πλήθος των σημάτων εξόδου), ο πίνακας \underline{W} ($k \times m$) είναι ο πίνακας των βαρών w_{ij} , $\underline{\theta}$ είναι ένα διάνυσμα (μήκους k) τιμών κατωφλίου και

$$\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_k) \end{bmatrix}_{k \times 1}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix}_{k \times 1}.$$

Το ενδιαφέρον για τη μελέτη των τεχνητών νευρωνικών δικτύων που μόλις περιγράψαμε και η χρήση τους σε πρακτικές τεχνολογικές εφαρμογές ανακύπτουν από το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.1 Έστω $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε ένα συμπαγές (δηλ. κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο $I \subset \mathbb{R}^m$. Έστω, επίσης, $f(\cdot)$ μια συνεχής σιγμοειδής συνάρτηση, δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση $f(\cdot)$ για την οποία υπάρχουν $A > 0$ και $B \leq 0$ τέτοια ώστε $f(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} A$ και $f(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} B$. Τέλος, έστω αυθαίρετο $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει θετικός ακέραιος N και ένα νευρωνικό δίκτυο $g(\cdot)$ με ένα κρυφό επίπεδο και επίπεδο εξόδου χωρίς συνάρτηση ενεργοποίησης, δηλαδή με σχέση εισόδου (\underline{u})-εξόδου ($g(\underline{u})$)

$$g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^N a_i f(\underline{w}_i^T \cdot \underline{u} + \theta_i),$$

έτσι ώστε $|\psi(\underline{u}) - g(\underline{u})| < \varepsilon$ για κάθε $\underline{u} \in I$.

Το θεώρημα (9.1) υποδηλώνει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^m προσεγγίζεται με απεριόριστα μικρό σφάλμα από τεχνητό νευρωνικό δίκτυο πολλαπλών επιπέδων, το οποίο αποτελείται μόνο από τρία επίπεδα (εισόδου, κρυφό και εξόδου) και οι νευρώνες του επιπέδου εξόδου δεν χρησιμοποιούν συνάρτηση ενεργοποίησης. Το θεώρημα (9.1) γενικεύεται άμεσα για διανυσματικές πραγματικές συναρτήσεις $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$.

11.2 Αναδρομικά (επαναληπτικά) τεχνητά νευρωνικά δίκτυα

Τα αναδρομικά τεχνητά νευρωνικά δίκτυα είναι συστήματα με μνήμη και, επομένως, αναπαριστάνονται ως δυναμικά συστήματα. Η απλούστερη μορφή τους είναι αυτή του δικτύου Hopfield διακριτού χρόνου του Σχήματος 11.4. Στο σχήμα αυτό, τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σήμα εισόδου $\underline{u}(n)$ αρχικοποιεί m επεξεργαστικές μονάδες, κάθε μία από τις οποίες υλοποιεί τη δυναμική εξίσωση

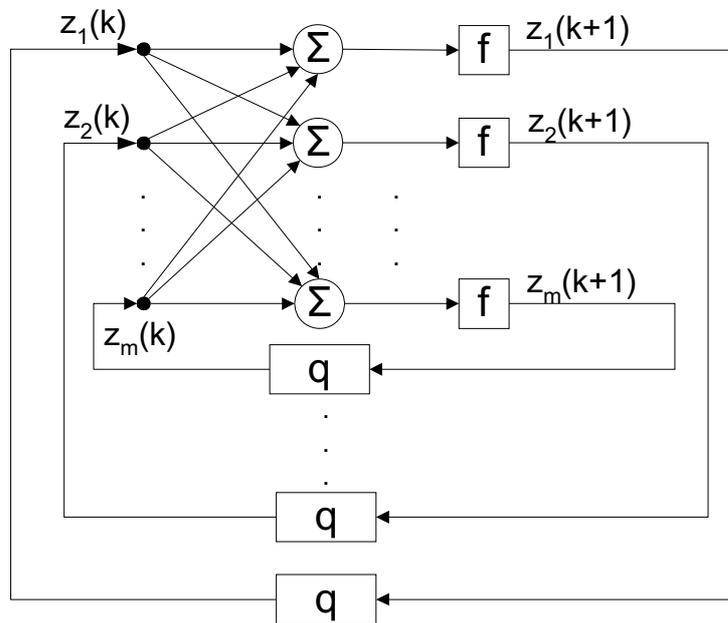
$$z_i(k+1) = f\left(\sum_{j=1}^m w_{ij}z_j(k)\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

με $z_i(0) = u_i(0)$. Σε συμπαγή μορφή, η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\underline{z}(k+1) = \underline{f}(\underline{wz}(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

με $\underline{z}(0) = \underline{u}(n)$ και \underline{w} και \underline{f} όπως στην περίπτωση των τεχνητών νευρωνικών δικτύων πολλαπλών επιπέδων.

Το νευρωνικό δίκτυο δέχεται το σήμα εισόδου $\underline{u}(n)$, το οποίο προκαλεί επαναληπτικό υπολογισμό του διανύσματος $\underline{z}(k+1)$. Μετά από ορισμένες επαναλήψεις, το δίκτυο κατασταλάζει σε μία σταθερή κατάσταση, δηλαδή το διάνυσμα \underline{z} δεν μεταβάλλεται από επανάληψη σε επανάληψη. Η τελική (ευσταθής) κατάσταση του διανύσματος \underline{z} παρουσιάζεται ως έξοδος του δικτύου. Αν τα βάρη w_{ij} επιλεγούν κατάλληλα, τότε το δίκτυο παρουσιάζει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό



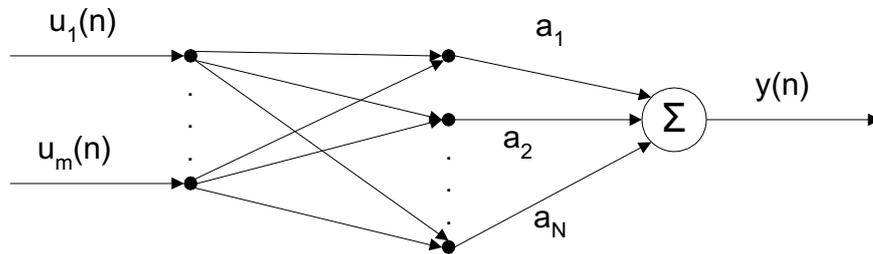
Σχήμα 11.4: Αναδρομικό τεχνητό νευρωνικό δίκτυο.

ευσταθών καταστάσεων που αντιστοιχούν σε “πρότυπα αποθηκευμένα στο δίκτυο”. Κάθε σήμα εισόδου θεωρείται ως μία θορυβώδης μορφή κάποιου από τα αποθηκευμένα πρότυπα. Το δίκτυο δρα ως μία **συσχετιστική μνήμη (associative memory)** και ταυτοποιεί το σήμα εισόδου με κάποιο από τα αποθηκευμένα πρότυπα.

11.3 Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων βάσης

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων βάσης (**radial basis function networks**) μοιάζουν με τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ενός κρυφού στρώματος και έχουν την τυπική μορφή του Σχήματος 11.5

Η βασική μονάδα επεξεργασίας είναι η **μονάδα ακτινικής βάρ-**



Σχήμα 11.5: Τεχνητό νευρωνικό δίκτυο ακτινικών συναρτήσεων βάσης.

σης (radial basis unit). Κάθε τέτοια μονάδα χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα \underline{w} . Ο σκοπός της είναι να παράγει μη αμελητέα απόκριση μόνο όταν το διάνυσμα εισόδου της είναι “κοντά” στο \underline{w} . Επομένως, η απόκριση της μονάδας ακτινικής βάσης σε διάνυσμα εισόδου \underline{u} έχει τη μορφή $r(d(\underline{u}, \underline{w}))$, όπου $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με υψηλή τιμή στην περιοχή του μηδενός και ταχεία πτώση προς το μηδέν μακριά από το μηδέν και $d(\cdot, \cdot)$ είναι ένα μέτρο της απόκλισης των διανυσμάτων \underline{u} και \underline{w} . Μια συνηθισμένη επιλογή για τη συνάρτηση r είναι:

$$r(\underline{u}, \underline{w}) = e^{-\frac{1}{2}(\underline{u}-\underline{w})^T \underline{\underline{C}}^{-1}(\underline{u}-\underline{w})}$$

όπου $\underline{\underline{C}}$ είναι ένας διαγώνιος, θετικά ορισμένος (δηλαδή με θετικά στοιχεία στη διαγώνιο) πίνακας. Επομένως

$$y(n) = \sum_{i=1}^N a_i r(|\underline{u}(n) - \underline{w}_i|^2).$$

Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα, τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ακτινικών συναρτήσεων βάσης μπορούν να προσεγγίσουν οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση, όπως βέβαια και τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα με ένα κρυφό επίπεδο. Η διαφορά έγκειται στο ότι, ενώ στα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα με ένα κρυφό επίπεδο οι σιγμοειδείς συναρτήσεις

παράγουν απόκριση σε ένα απεριόριστο διάστημα τιμών, οι ακτινικές συναρτήσεις βάσεις είναι εξαιρετικά “συγκεντρωμένες.”

ΘΕΩΡΗΜΑ 11.2 Θεωρούμε τη γκαουσιανή συνάρτηση

$$r(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

και ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο ακτινικών συναρτήσεων βάσης με σχέση εισόδου (\underline{u})-εξόδου ($g(\underline{u})$)

$$g(\underline{u}) = \sum_{i=1}^N a_i r((\underline{u} - \underline{w}_i)^T \underline{C}^{-1}(\underline{u} - \underline{w}_i)),$$

όπου $N \geq 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\underline{w}_i \in \mathbb{R}^m$, και \underline{C} διαγώνιος, θετικά ορισμένος πίνακας. Εστω αυθαίρετο $\varepsilon > 0$ και $\psi : \mathbb{R}^m \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο I του \mathbb{R}^m . Τότε, υπάρχει θετικός ακέραιος N και κατάλληλα a_i και \underline{w}_i έτσι ώστε

$$\left| \psi(\underline{u}) - \sum_{i=1}^N a_i r((\underline{u} - \underline{w}_i)^T \underline{C}^{-1}(\underline{u} - \underline{w}_i)) \right| < \varepsilon$$

για κάθε $\underline{u} \in I$.

Η ερμηνεία του θεωρήματος (9.2) είναι ανάλογη με την ερμηνεία του θεωρήματος (9.1) των τεχνητών νευρωνικών δικτύων πολλαπλών επιπέδων.

11.4 Εφαρμογή των νευρωνικών δικτύων σε δίκτυα

Μια από τις βασικές προκλήσεις που αντιμετωπίζει η μεταφορά πληροφορίας ευρείας ζώνης είναι ο καθορισμός των στρατηγικών ελέγχου συμφόρησης για τη στήριξη πολλαπλών κατηγοριών κίνησης στα

δίκτυα ATM (Asynchronous Transfer Mode). Ο έλεγχος της κατάστασης του καταχωρητή - ενταμιευτή (μήκος ουράς) είναι ο πιο συνήθως χρησιμοποιούμενος μηχανισμός για τον εντοπισμό της συμφόρησης στα δίκτυα ATM. Στην προσέγγιση του στατικού ελεγκτή ανατροφοδότησης, τα σήματα ανατροφοδότησης παράγονται όταν το μήκος της ουράς του ενταμιευτή υπερβαίνει μια οριακή τιμή. Παρόλα αυτά, ο προσδιορισμός του ορίου του ενταμιευτή ως ένα σημείο συμφόρησης και η τιμή στην οποία οι ρυθμοί της πηγής πρέπει να ρυθμιστούν δεν είναι ξεκάθαρη. Στο κεφάλαιο αυτό προτείνουμε έναν μηχανισμό κατηγορηματικής ειδοποίησης συμφόρησης για τα δίκτυα ATM χρησιμοποιώντας τα Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα - ΤΝΔ (Artificial Neural Networks - ANN) για τον υπολογισμό του συνολικού ποσού κατά το οποίο οι πηγές πρέπει να μειώσουν τους ρυθμούς μεταφοράς τους. Παρουσιάζονται τρία μοντέλα που χρησιμοποιούν ΤΝΔ και συγκρίνονται τα παραγόμενα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα μιας μελέτης προσομοίωσης φανερώνουν ότι αυτοί οι μηχανισμοί διασφαλίζουν απλή και αποτελεσματική διαχείριση κίνησης για τα δίκτυα ATM. Η απώλεια κελιού που οφείλεται σε συμφόρηση δείχνει διπλάσια έως δεκαπλάσια βελτίωση σε σύγκριση με την στατική προσέγγιση, καθώς η καθυστέρηση μεταφοράς που εισήχθη από αυτόν τον ελεγκτή ΤΝΔ είναι επίσης μικρότερη από την στατική προσέγγιση στις περισσότερες περιπτώσεις.

11.4.1 Εισαγωγικά

Όπως είδαμε στο παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου ο έλεγχος συμφόρησης του επιπέδου του ATM αναφέρεται στο σύνολο των πράξεων που γίνονται από το δίκτυο για να ελαχιστοποιηθούν η ένταση, η διάδοση και η διάρκεια της συμφόρησης. Ο έλεγχος της ροής ανατροφοδότησης είναι μία από τις λύσεις η οποία έχει αναλυτικά μελετηθεί. Στους ελέγχους ανατροφοδότησης, όταν ανιχνεύεται πιθανή συμφόρηση κίνησης σε οποιοδήποτε στοιχείο του δικτύου, τα σήματα ανατροφοδότησης επιστρέφουν σε όλες τις πηγές. Η κίνηση που υποβάλλεται στις συνδέσεις ATM ρυθμίζεται στη συνέχεια σ'

ένα συγκεκριμένο ποσό. Σε μια περίπτωση, για παράδειγμα, όταν σ' έναν μεταγωγέα ATM υπερβαίνεται ένα όριο, αποστέλλονται κελιά γνωστοποίησης συμφόρησης (CNC - Congestion Notification Cells) πίσω στις πηγές, που υποβάλλουν κίνηση σ' αυτόν. Αλλού, αντί για έλεγχο της στιγμιαίας απασχόλησης της ουράς, εκτελείται μέτρηση του ρυθμού μιας μικρής άφιξης σε σχέση με τα όρια και την χωρητικότητα του συστήματος για την προσαρμογή του μέγιστου ρυθμού των πηγών. Παρ' όλα αυτά, ένας κατάλληλος καθορισμός των ορίων πρέπει να θεωρεί τα χαρακτηριστικά των πηγών κίνησης, το μέγεθος του ενταμιευτή, και τις απαιτήσεις της ποιότητας της εξυπηρέτησης (Qualitψ οφ Σερισε ΧοΣ) για όλες τις πηγές, μια προσπάθεια που απαιτεί πολύπλοκους υπολογισμούς.

Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιούνται Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (ΤΝΔ) για να προβλέψουμε τον πιθανό ρυθμό απώλειας κελιών στο άμεσο μέλλον λαμβάνοντας υπόψη ρητά τις καθυστερήσεις διάδοσης που παρατηρούνται στους μηχανισμούς αυτούς. Με βάση τις προβλέψεις αυτές, ένα κελί ανατροφοδότησης στέλνει μια τιμή στις πηγές, στην οποία τιμή οι πηγές πρέπει να ρυθμίσουν τους ρυθμούς των πηγών τους. Στην κατάσταση εκπαίδευσης του ΤΝΔ, ελέγχουμε τα Πρότυπα Άφιξης Κελιών (Cell Arrival Patterns - CAP) και την τρέχουσα πληροφορία ουράς σε σχέση με τον ρυθμό απώλειας κελιού όταν μια μόνη κίνηση τροφοδοτείται μέσα στο δίκτυο. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτή την πληροφορία για να εκπαιδεύσουμε τα ΤΝΔ.

Αφού εκπαιδευτούν τα ΤΝΔ καλά, τα CAPs των κύκλων του προηγούμενου χρόνου και το τωρινό μήκος της ουράς τροφοδοτούνται μέσα στα ΤΝΔ. Η τιμή εξόδου που παράγεται από τα ΤΝΔ στον κόμβο εξόδου μεταφέρεται από τα CNC σ' όλες τις ενεργές πηγές. Επίσης προτείνονται δύο στατιστικά μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούνταν ως συναρτήσεις πρόβλεψης για να είναι ένας προεπεξεργαστής των CAPs. Τα επεξεργασμένα CAPs από το μοντέλο Standard Normal Deviate (SND)έχαναν ικανό το ΤΝΔ να έχει γνώση των σχέσεων μεταξύ των στατιστικών χαρακτηριστικών κίνησης στους κύκλους του παρελθόντος και στο άμεσο μέλλον. Τα CAPs που ε-

πεζεργάστηκαν από το μοντέλο Κινούμενου Μέσου όρου (Moving Average - MA) επιτρέπουν στο ΤΝΔ ν' ανιχνεύει την ανομοιογένεια της κίνησης. Αυτές οι προσεγγίσεις δεν χρειάζονται τον καθορισμό οποιασδήποτε τιμής κατωφλίου για την παραγωγή του CNC και οι ρυθμοί της πηγής που είναι να ρυθμιστούν πρέπει αυστηρά να παραχθούν από τα ΤΝΔ με βάση την κατάσταση των δικτύων.

Για τον έλεγχο της αξιοπιστίας των προτεινόμενων αλγορίθμων “ χρησιμοποιούνται προσομοιώσεις. Χρησιμοποιούμε ένα παράδειγμα απλής ουράς με μέγεθος Q . Στην περίπτωση του στατικού ελεγκτή ανατροφοδότησης συμφόρησης, ένα CNC κελί παράγεται όταν το q/Q είναι μεγαλύτερο μια τιμή κατωφλίου $Q_{\text{threshold}}$ όπου q είναι το τωρινό μήκος της ουράς, και όλες οι πηγές μειώνουν τους ρυθμούς εκπομπής τους στο 50% όταν λαμβάνεται ένα CNC. Επιλέγουμε διαφορετικές τιμές $Q_{\text{threshold}}$ στις προσομοιώσεις μας για να συγκρίνουμε την απόδοση του στατικού ελεγκτή ανατροφοδότησης συμφόρησης με τους μηχανισμούς μας. Φυσιολογικά, όσο μικρότερο $Q_{\text{threshold}}$ επιλέγεται, τόσο χαμηλότερος ρυθμός απώλειας κελιού παρατηρείται, αλλά προκύπτουν υψηλότερες καθυστερήσεις μετάδοσης. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης δείχνουν ότι οι μηχανισμοί μας έχουν καλύτερη εκτέλεση και στον ρυθμό απώλειας κελιού και στις καθυστερήσεις μετάδοσης από τις προσεγγίσεις στατικού κατωφλίου.

11.4.2 Μοντέλα

Μοντέλα νευρωνικών δικτύων

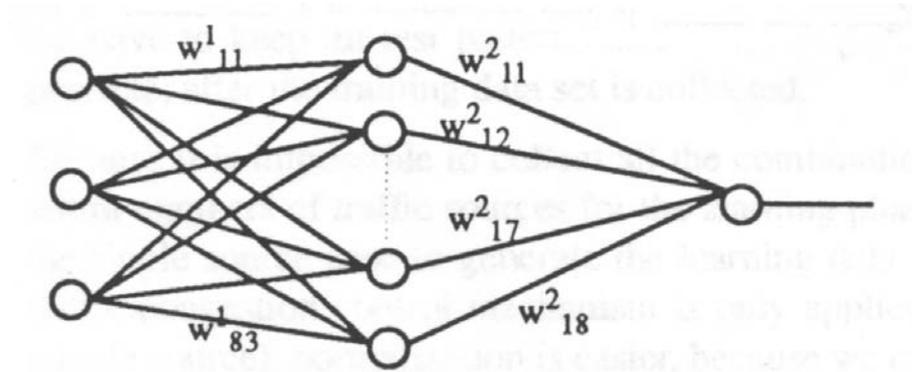
Ένα νευρωνικό δίκτυο είναι ικανό, όπως είδαμε στα προηγούμενα, να μάθει το σχήμα μιας αυθαίρετης μη γραμμικής συνάρτησης με σωστά δεδομένα εισόδου και εξόδου. Τα Νευρωνικά Δίκτυα βρίσκουν τεράστια εφαρμογή σε διαφορετικά προβλήματα δικτύων υπολογιστών. Για παράδειγμα χρησιμοποιούνται για Έλεγχο Αποδοχής Σύνδεσης (Connection Admission Control - CAC) και για έλεγχο της Ποιότητας Εξυπηρέτησης (QoS). Ακόμα έχει παρουσιαστεί ένας υπολογιστικός αλγόριθμος νευρωνικού δικτύου για τον καθορι-

σμό της καταλληλότερης δρομολόγησης της κίνησης. Αλλού γίνεται χρήση διαφορετικών αρχιτεκτονικών νευρωνικών δικτύων (Hopfield, Feedforward) για τον έλεγχο των μεταγωγών Banyan, Crossbar και Benes.

Το μοντέλο ΤΝΔ που έχουμε υιοθετήσει εδώ είναι ένα Εμπροσθοτροφοδοτικό ΤΝΔ (Feedforward ANN - FFANN) τριών επιπέδων με έναν αλγόριθμο εκμάθησης, οπισθοδιάδοσης λάθους (Error Back Propagation - EBR). Ένα παράδειγμα ενός (3-8-1) ΤΝΔ φαίνεται στο Σχήμα 11.6. Αυτό το ΤΝΔ έχει τρεις νευρώνες στο επίπεδο εισόδου, οκτώ νευρώνες στο κρυμμένο επίπεδο και μόνο ένα νευρώνα στο επίπεδο εξόδου. Στο μοντέλο CAP - ΤΝΔ, για παράδειγμα, τέσσερις νευρώνες βρίσκονται στο επίπεδο εισόδου: ο πρώτος διατηρεί τις τιμές του μήκους μιας κανονικής ουράς και άλλοι τρεις χρησιμοποιούνται για τις αφίξεις κελιού στους προηγούμενους τρεις κύκλους. Υπάρχουν δύο νευρώνες στο επίπεδο εισόδου για το SDN - ΤΝΔ μοντέλο και τρεις νευρώνες στο επίπεδο εισόδου για το μοντέλο MA - ΤΝΔ. Και στα τρία μοντέλα, υπάρχει μόνο ένας νευρώνας εξόδου ο οποίος αποτελεί την “επιθυμητή δύναμη” για το ρυθμό δεδομένων πηγής. Λεπτομερείς ορισμοί για κάθε νευρώνα παρουσιάζονται παρακάτω.

Μοντέλο προσομοίωσης

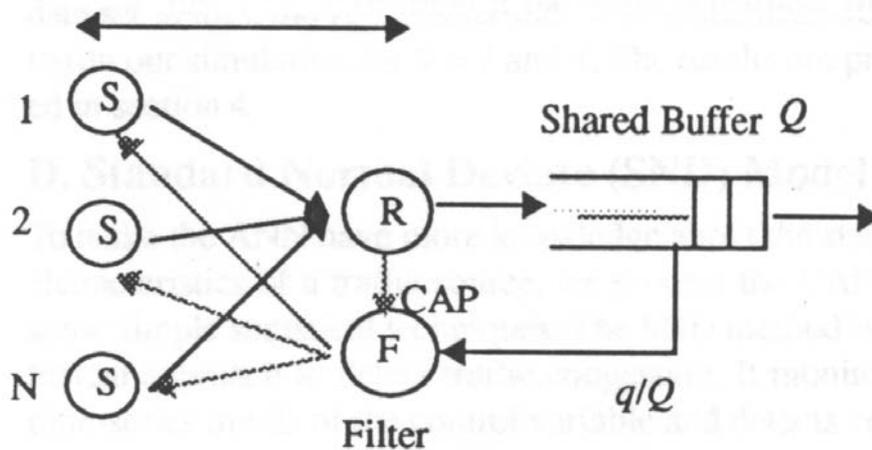
Το μοντέλο της προσομοίωσης φαίνεται στο Σχήμα 11.7. N πηγές μπορούν να μεταφέρουν σ' έναν μόνο αποδέκτη R την ίδια στιγμή. Η καθυστέρηση μετάδοσης από μια πηγή στον R είναι Δb και υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι όλες οι πηγές δέχονται την ίδια καθυστέρηση για μετάδοση στον R . Ένας καταχωρητής με μέγεθος Q , βρίσκεται στην είσοδο του εξυπηρετητή της ουράς D , του προορισμού. Τα κελιά απορρίπτονται αν ο καταχωρητής υπερχειλίσει. Ο εξυπηρετητής προορισμού της ουράς απομακρύνει κελιά από την ουρά με ρυθμό S_r κελιά / δευτερόλεπτο. Στον μηχανισμό στατικού ελέγχου ανατροφοδότησης, όταν το μέγεθος της ουράς q υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο όριο, $Q_{\text{threshold}}$, αποστέλλεται ένα CNC σ' όλες



Σχήμα 11.6: Ένα Εμπροσθοτροφοδοτικό ΤΝΔ 3-8-1.

τις ενεργές πηγές για να μειώσουν τους ρυθμούς των πηγών κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό. Το πρόβλημα είναι πώς να καθοριστεί το όριο συμφόρησης και πόσο πολύ πρέπει να μειωθεί ο ρυθμός της πηγής. Στις προσομοιώσεις, παράγεται ένα σήμα συμφόρησης όταν το q/Q είναι μεγαλύτερο από το $Q_{\text{threshold}}$. Το $Q_{\text{threshold}}$ έχει διαφορετικές τιμές στις προσομοιώσεις: 0.4, 0.5 και 0.6 αντίστοιχα για συγκρίσεις απόδοσης. Κάθε πηγή μειώνει το ρυθμό της στο 50% του ρυθμού παραγωγής κελιού όταν ένα σήμα συμφόρησης λαμβάνεται. Τα αποτελέσματα αυτού του μοντέλου συγκρίνονται στη συνέχεια με τις βασισμένες σε ΤΝΔ προτεινόμενες προσεγγίσεις.

Τα ΤΝΔ χρησιμοποιούνται για να αποκτηθούν οι άγνωστες σχέσεις ανάμεσα στα προηγούμενα κελιά που απορρίφθηκαν και στις μελλοντικές πιθανότητες απόρριψης κελιού. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.7, τα Πρότυπα Άφιξης Κελιού (Cell Arrival Patterns - CAP) και το κανονικοποιημένο μήκος ουράς τα οποία τροφοδοτούνται στο ΤΝΔ κάθε ΔT δευτερόλεπτα (το ΔT είναι μια σταθερά) για τον υπολογισμό του ποσοστού των ρυθμών της πηγής που πρέπει να κανονικοποιηθούν. Τα CAP έχουν κανονικοποιηθεί έτσι ώστε τα ΤΝΔ να απευθύνονται σε διαφορετικό αριθμό ενεργών πηγών χωρίς επα-



Σχήμα 11.7: Μοντέλο προσομοίωσης του ελεγκτή ανατροφοδότησης συμφοράρης.

νεκπαίδευση των ΤΝΔ. Τα CAP επεξεργάζονται από τα μοντέλα ΣΝΔ και ΜΑ στις άλλες δύο μορφές.

Μοντέλο προτύπων άφιξης κελιών

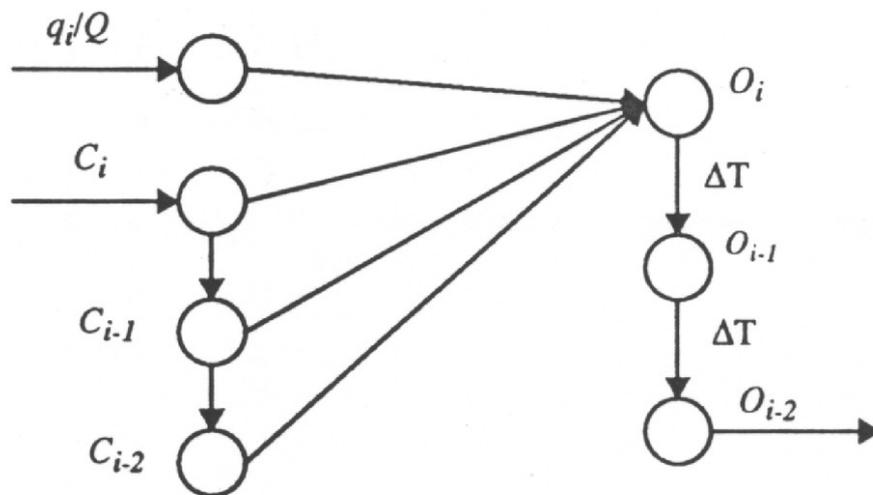
Πριν το ΤΝΔ γίνει ικανό να κάνει πρόβλεψη, πρέπει να εφαρμοστεί ένα σύνολο δεδομένων εκπαίδευσης χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Error Back Propagation, EBP, όπως συζητήθηκε παραπάνω. Τα δεδομένα εκπαίδευσης πρέπει να περιλαμβάνουν σωστά πρότυπα εισόδου και τα αντίστοιχα πρότυπα εξόδου. Το σύνολο των δεδομένων πρέπει να καλύπτει την περιοχή του προβλήματος στον μεγαλύτερο δυνατό βαθμό. Το Σχήμα 11.8 δείχνει το μοντέλο για τη συλλογή των εκπαιδευόμενων δεδομένων για το CAP - ΤΝΔ. Παρόμοια μοντέλα συλλογής δεδομένων χρησιμοποιούνται για το ΣΝΔ - ΤΝΔ και ΜΑ - ΤΝΔ.

Χωρίζουμε το χρόνο σε μικρές μονάδες, αυτές οι μονάδες είναι χρονικά διαστήματα μεγέθους ΔT δευτερολέπτων. Το C_i είναι ο αριθμός των κελιών που καταφθάνουν μεταξύ του χρόνου T_{i-1} και

του χρόνου T_i . Έχουμε $T_i - T_{i-1} = \Delta T$, για όλα τα i . Το $C_i, C_{i-1}, C_{i-2}, \dots$ είναι το πρότυπο άφιξης κελιού (CAP) για χρόνο T_i . Το πρότυπο εισόδου $[N(i)]$ είναι ένας συνδυασμός του μήκους ουράς και του CAP όπως φαίνεται στην (11.1):

$$[N(i)] = [q_i, C_i, \dots, C_{i-k-1}, C_{i-k}]^T \quad (11.1)$$

Στο μοντέλο προσομοίωσης CAP - TNΔ παίρνουμε $k = 2$. Στο σχήμα 11.8, τα $[N(i)]$ και O_i είναι η κατάσταση η οποία παρατηρείται από το δίκτυο στο χρόνο T_i . Για να κάνουμε τα TNΔ ικανά να προβλέψουν πιθανή απόρριψη κελιού, με πληροφορία δύο βημάτων, καθυστερούμε το O_i κατά δύο ΔT . Αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη έξοδος του $[N(i)]$ για τα TNΔ στο χρόνο T_i είναι O_{i-2} το οποίο παράχθηκε στο χρόνο T_{i-2} . Μ' αυτή την καθυστέρηση δύο κύκλων στην εκπαίδευση του συνόλου των δεδομένων, τα TNΔ είναι ικανά να προβλέψουν την έξοδο η οποία αφορά την καθυστέρηση κυκλικής διάδοσης εάν $\Delta b \leq \Delta T$.



Σχήμα 11.8: Μοντέλο για την συγκέντρωση εκπαιδευόμενου συνόλου δεδομένων.

Υποθέστε ότι ο ρυθμός πηγής της πηγής S_i στο χρόνο T_j είναι R_{ij} . Ο ρυθμός είναι ορισμένος ως $r_{ij} = R_{ij} \times O_i$ και το O_i είναι ορισμένο από:

$$O_i = 1 - D_{i-2}/C_{i-2} \quad (11.2)$$

όπου D_i είναι ο αριθμός των κελιών που απορρίφθηκαν μεταξύ T_{i-1} και T_i λόγω της υπερχείλισης του καταχωρητή. Στην (11.2) εάν το D_{i-2} είναι ίσο με μηδέν, τότε το O_i είναι ίσο με 1 και δεν είναι απαραίτητη η κανονικοποίηση του ρυθμού πηγής. Από την άλλη πλευρά, εάν το D_{i-2} είναι ίσο με το C_{i-2} , τότε κανένα κελί δεν επιτρέπεται να μεταδοθεί στο χρονικό διάστημα αφού το O_i είναι ίσο με μηδέν.

Ένα από τα μειονεκτήματα των ΤΝΔ είναι ότι το σύνολο των δεδομένων εκπαίδευσης πρέπει να καλύπτει την περιοχή του προβλήματος όσο το δυνατόν καλύτερα. Αυτό σημαίνει ότι εάν ένα στοιχείο εισόδου είναι στο διάστημα $[a, b]$ στην κατάσταση εκπαίδευσης, η έξοδος μπορεί να μην παραχθεί σωστά εάν το στοιχείο εισόδου δεχτεί μια τιμή που είναι εκτός διαστήματος στην φάση της δοκιμής. Για να κάνουμε τα ΤΝΔ ικανά να χρησιμοποιούνται σε πολλαπλές πηγές ακόμα κι αν εκπαιδεύονται στην περίπτωση μιας μόνο πηγής, θα πρέπει να κρατήσουμε όλα τα πρότυπα δοκιμής μέσα στο διάστημα, όσο γίνεται περισσότερο, αφού έχει συγκεντρωθεί το σύνολο των δεδομένων εκπαίδευσης.

Επειδή είναι αδύνατο να συγκεντρωθούν όλοι οι συνδυασμοί διαφορετικών αριθμών πηγών κίνησης για την κατάσταση εκμάθησης, χρησιμοποιούμε την περίπτωση μοναδικής πηγής για να παράγουμε το σύνολο των δεδομένων εκμάθησης. Εάν ο μηχανισμός για τον έλεγχο της κυκλοφοριακής συμφόρησης αναφέρεται σε μία μόνο πηγή, η κανονικοποίηση είναι ευκολότερη, επειδή μπορούμε να τροποποιήσουμε την (11.1) όπως παρακάτω:

$$[N(i)] = \left(\frac{q_i}{Q}, \frac{C_i}{C_p}, \dots, \frac{C_{i-k-1}}{C_p}, \frac{C_{i-k}}{C_p} \right)^T \quad (11.3)$$

όπου C_p είναι ο αριθμός των κελιών που παράγονται από μια πηγή στον μέγιστο ρυθμό της σε ΔT . Όλα τα στοιχεία ενός διανύσματος

εισόδου είναι στο διάστημα $[0, 1]$, και στην κατάσταση εκπαίδευσης και στην κατάσταση εκτέλεσης.

Όσον αφορά την περίπτωση των πολλαπλών πηγών, η κανονικοποίηση του CAP δεν είναι άμεση. Έστω R_i , M_i είναι ο κορυφαίος και ο μέσος ρυθμός της πηγής κίνησης S_i αντίστοιχα, P_a είναι ο αθροιστικός κορυφαίος ρυθμός όλων των ενεργών πηγών κίνησης. Εάν ορίσουμε $P_a = \sum_{i=1, N} P_i$, (N είναι ο αριθμός των ενεργών πηγών) και C_p είναι ο αριθμός των κελιών που παρήχθησαν στον ρυθμό πηγής R_a , το κανονικοποιημένο CAP τείνει να γίνει μικρότερο στην φάση εκτέλεσης από ότι στην κατάσταση εκπαίδευσης λόγω της αύξησης πολύπλεξης όταν οι πολλαπλές πηγές αθροίζονται στην φάση εκτέλεσης, από τη στιγμή που τα ΤΝΔ έχουν εκπαιδευτεί στην περίπτωση μίας μόνο πηγής ($N = 1$), η οποία δεν παρουσιάζει το φαινόμενο της αύξησης πολύπλεξης. Ως αποτέλεσμα, η “δύναμη” ανατροφοδότησης τείνει να γίνει μικρότερη γιατί το ΤΝΔ “σκέφτεται” ότι η κίνηση δεν είναι τόσο βαριά. Συνεπώς η βελτίωση του ρυθμού απώλειας κελιού δεν είναι τόσο σημαντική.

Για να λύσουμε το πρόβλημα, ορίζουμε:

$$P_a = M_a + a\sigma \quad (11.4)$$

$$\sqrt{-2 \ln(\varepsilon) - \ln(2\pi)} \quad (11.5)$$

όπου $M_a = \sum_{i=1, N} M_i$ είναι ο μέσος ρυθμός αθροίσματος bit και σ είναι η τυπική απόκλιση του ρυθμού αθροίσματος bit ($\sigma^2 = \sum_{i=1, N} \sigma_i^2$).

Η ισότητα (11.4) έχει χρησιμοποιηθεί σαν όρος αναφοράς για τον υπολογισμό της “ισοδύναμης χωρητικότητας” ή της απαίτησης εύρους ζώνης των ατομικών και των πολυπλεγμένων συνδέσεων για CAC. Το ε είναι η επιθυμητή πιθανότητα υπερχείλισης του καταχωρητή και υποθέτουμε πως είναι ίση με 10^{-9} . Για την συγκέντρωση του συνόλου των δεδομένων εκπαίδευσης, απαιτείται μόνο να ελέγχουμε την κατάσταση της μόνης πηγής ($N = 1$), το CAP είναι κανονικοποιημένο από το C_p , όπου $R_a = M_1 + a\sigma_1$. Χρησιμοποιούμε αυτό το σύνολο εκπαιδευόμενων δεδομένων για να εκπαιδεύσουμε το ΤΝΔ και αφού

το ΤΝΔ έχει εκπαιδευτεί, το χρησιμοποιούμε για να “τρέξουμε” την προσομοίωση για $N=1$ και 4. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε παρακάτω ενότητα.

Μοντέλο (SND)

Για να εμπλουτίσουμε το ΤΝΔ με περισσότερες γνώσεις σχετικά με τα στατιστικά χαρακτηριστικά της πηγής κίνησης, επεξεργαζόμαστε το CAP χρησιμοποιώντας μερικές στατιστικές τεχνικές. Η μέθοδος τυπικής κανονικής απόκλισης Standard Normal Deviate: SND είναι μια στατιστική προσέγγιση για τον έλεγχο της κυκλοφοριακής συμφοράς. Ελέγχει τις χρόνο-σειριακές τάσεις της μεταβλητής ελέγχου και ανιχνεύει την συμφοράση βασισμένη στην διαφορά μεταξύ των παρατηρούμενων ροών κίνησης και των αντίστοιχων σχεδιαζόμενων. Μια μεγάλη τιμή SND υπονοεί μια τεράστια αλλαγή στην κατάσταση της κίνησης. Ορίζεται ως ακολούθως:

$$SND_i = (x_i - \bar{x}_i) / \sigma_i \quad (11.6)$$

Όπου:

x_i : η μεταβλητή ελέγχου στο χρόνο t ,

\bar{x}_i : η μέση τιμή της μεταβλητής ελέγχου στα προηγούμενα n διαστήματα και

σ_i : η τυπική απόκλιση της μεταβλητής ελέγχου στα προηγούμενα n διαστήματα.

Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο, η (11.3) διαφοροποιείται στην

$$[N(i)] = \left(\frac{q_i}{Q}, SND_i, \dots, SND_{i-k-1}, SND_{i-k} \right)^T \quad (11.7)$$

όπου $x_i = C_i / C_p$ στη (11.6), και C_p είναι ο αριθμός των κελιών που παρήχθησαν σε χρόνο ΔT με ρυθμό P_a .

Μοντέλο κινούμενου μέσου όρου

Το μοντέλο κινούμενου μέσου όρου (Moving Average: MA) είναι μια τεχνική εξομάλυνσης δεδομένων, με βάση τα φίλτρα. Πολλές

από τις τεχνικές πρόβλεψης την χρησιμοποιούν ως τη βάση για επεκτάσεις: η EWMA (Exponentially Weighed Moving Average) και η ARIMA (Autoregressive - Integrated -Moving Average) είναι πολύ δημοφιλείς στη στατιστική βιβλιογραφία για προβλέψεις. Στην MA, η εκτίμηση του ισχύοντος επιπέδου των σειρών θεωρείται ότι είναι:

$$\hat{y}_{T+1} = \sum_{j=0}^{T-l} w_j y_{T-j} \quad (11.8)$$

όπου τα w_j είναι το σύνολο των βαρών τα οποία ενώνονται και l είναι ένας θετικός ακέραιος ο οποίος είναι ο αριθμός των βημάτων για τα οποία κάνουμε πρόβλεψη. Το w_j είναι ίσο με το $1/T$ στο μοντέλο μας, για όλα τα $j \geq 0$. Για να βελτιωθεί η ακρίβεια, χρησιμοποιούνται δύο φίλτρα συνήθως για να αιχμαλωτίσουν την σημαντική προσωρινή αλλαγή στις καταστάσεις κίνησης. Στο μοντέλο προσομοίωσης, το πρώτο φίλτρο y_t^3 είναι ένας 3-κύκλων κινούμενος μέσος όρος του αριθμού των κελιών που παρήχθησαν, ενώ το δεύτερο φίλτρο y_t^5 είναι ένας 5-κύκλων κινούμενος μέσος όρος μετά τους 3 πρώτους κύκλους. Τα διανύσματα εισόδου για τα ΤΝΔ καθορίζονται ως εξής:

$$[N(i)] = \left(\frac{q_i}{Q}, y_t^3, y_t^5 \right)^T \quad (11.9)$$

11.4.3 Προσομοιώσεις

Σ' αυτή την ενότητα, εξετάζουμε την ικανότητα των προτεινόμενων μηχανισμών "τρέχοντας" μερικές προσομοιώσεις. Για να γίνουν κατανοητές πραγματικές καταστάσεις κίνησης, χρησιμοποιούμε ένα σύνολο δεδομένων πραγματικού κόσμου, συγκεκριμένα ένα ίχνος κίνησης MPEG. Εμπειρία με τυχαία παραγόμενα δεδομένα έχει οδηγήσει σε παρόμοια συμπεράσματα. Αυτό το σύνολο δεδομένων είναι ένα δείγμα MREG βίντεο μεταβλητού ρυθμού bit, από μια ταινία. Το μήκος της ταινίας είναι περίπου 2 ώρες και περιλαμβάνει ένα διαφορετικό μείγμα συστατικών, χαμηλής πολυπλοκότητας σκηνές ως και σκηνές με υψηλή δράση. Το σύνολο δεδομένων έχει 174,138

πρότυπα, κάθε πρότυπο αντιπροσωπεύει τον αριθμό των bit που παρήχθησαν σ' ένα χρόνο πλαισίου, F . Σ' αυτό το δείγμα, 24 πλαίσια κωδικοποιήθηκαν στο δευτερόλεπτο, έτσι το F είναι ίσο με το $1/24$ του δευτερολέπτου. Ο μέγιστος ρυθμός bit αυτού του δείγματος είναι $185,267 \text{ bits/πλαίσιο}$ και ο μέσος ρυθμός bit είναι $15,611 \text{ bits/πλαίσιο}$ και η τυπική απόκλιση του ρυθμού bit είναι $18,157$. Υποθέτουμε πως ΔT είναι $F/5 = 8.3ms$ το οποίο είναι ίσο με Δb για απλοποίηση. Στον στατικό έλεγχο ανατροφοδότησης συμφόρησης, όταν $q/Q = Q_{\text{threshold}}$, ένα CAC ανατροφοδοτείται σ' όλες τις πηγές κίνησης και κάθε πηγή μειώνει τον ρυθμό πηγής της στο 50% του ρυθμού εκπομπής της. Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των $Q_{\text{threshold}} = 0.4, 0.5$ και 0.6 με τα αποτελέσματα των προσαρμοστικών μηχανισμών. Για τον προσαρμοστικό ελεγκτή, συγκεντρώνουμε 2000 πρότυπα όταν μία πηγή κίνησης περνά μέσα από τον καταχωρητή κατά την φάση της εκπαίδευσης και στα τρία μοντέλα. Αυτό σημαίνει ότι μόνο $2000/(174138 \times 5) = 0.22\%$ των προτύπων δεδομένων συγκεντρώνονται για την εκπαίδευση. Όταν τα ΤΝΔ εκπαιδευτούν καλά, κάνουμε προσομοιώσεις για μία και τέσσερις πηγές κίνησης.

Ο ρυθμός απώλειας κελιού ορίζεται ως ο συνολικός αριθμός των κελιών που απορρίπτονται στον λήπτη λόγω της υπερχειλίσης του καταχωρητή διαιρούμενος με τον συνολικό αριθμό κελιών που παρήχθησαν από την πηγή. Για τις καθυστερήσεις, υποθέτουμε ότι ο χρόνος για να ολοκληρωθεί η μετάδοση χωρίς έλεγχο ανατροφοδότησης είναι T_k δευτερόλεπτα και ο χρόνος για να ολοκληρωθεί με έλεγχο ανατροφοδότησης είναι T_h δευτερόλεπτα. Η καθυστέρηση καθορίζεται ως εξής :

$$\text{Delay} = 100\% \times (T_h - T_k)/T_k \quad (11.10)$$

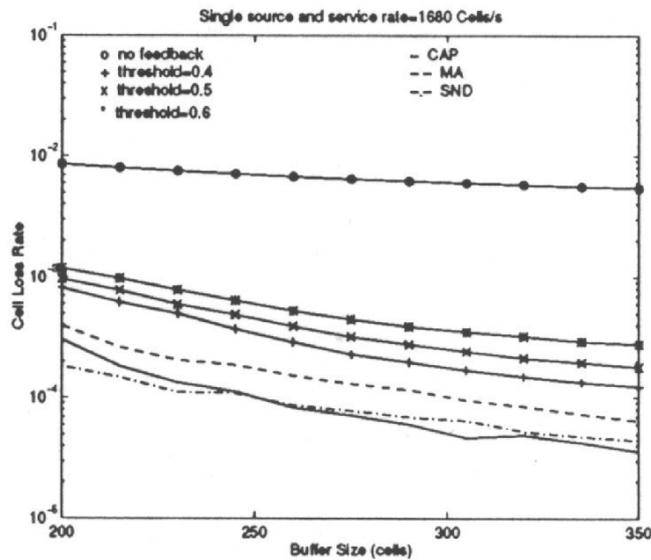
Στο Σχήμα 11.9, δείχνουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στην περίπτωση μιας πηγής ($N = 1$). Ένα δείγμα βίντεο τροφοδοτείται στον λήπτη, κελιά μετακινούνται από τον καταχωρητή μ' έναν σταθερό ρυθμό S_r ο οποίος είναι ίσος με 1680 κελιά / δευτερόλεπτο. Επειδή τα ΤΝΔ εκπαιδεύονται χρησιμοποιώντας την ίδια πηγή κίνησης (0.22% του συνόλου των δεδομένων), τα χαρακτηριστικά των

προτύπων αφίξεως δεν αλλάζουν. Έτσι ο ρυθμός απώλειας κελιού του μηχανισμού έχει 5 ως 10 φορές βελτίωση σε σχέση με την περίπτωση που $Q_{\text{threshold}} = 0.4$. Επίσης η καθυστέρηση είναι μικρότερη από όταν $Q_{\text{threshold}} = 0.6$. Για τα τρία μοντέλα, η μέθοδος $SND - TN\Delta$ έχει παρόμοιο ρυθμό απώλειας κελιού σε σύγκριση με το μοντέλο $CAP - TN\Delta$. Η δική του καθυστέρηση είναι λίγο μεγαλύτερη από τα άλλα.

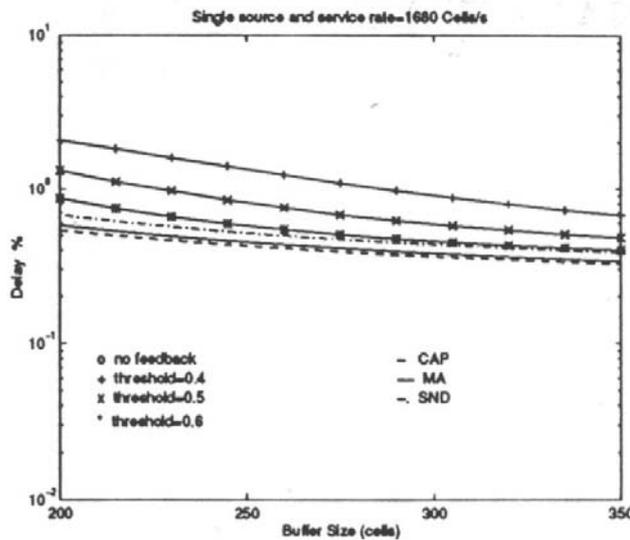
Στο Σχήμα 11.10, τέσσερις MREG πηγές κίνησης τροφοδοτούνται στο δίκτυο ($N = 4$), η δεύτερη πηγή ξεκινά την μετάδοση της λίγο αργότερα από τη στιγμή που ξεκινά η πρώτη την μετάδοσή της, η τρίτη ακολουθεί τη δεύτερη κ.ο.κ. Οι προσομοιώσεις τελειώνουν όταν η πρώτη πηγή συμπληρώσει τη μετάδοσή της. Χρησιμοποιούμε τα ίδια $TN\Delta$ όπως και στην περίπτωση της μίας πηγής για να πραγματοποιήσουμε την προσομοίωση και εφαρμόζουμε την (11.3) για να κανονικοποιήσουμε τα CAP . Το S_r ορίζεται ως 6720 κελιά / δευτερόλεπτο. Στα Σχήματα 11.10α και 11.10β, ο ρυθμός απώλειας κελιού και ο χρόνος καθυστέρησης $SND - TN\Delta$ είναι πολύ καλύτερα από τους μηχανισμούς στατικού ελέγχου ανατροφοδότησης. Το $CAP - TN\Delta$ έχει καλύτερη εφαρμογή στο ρυθμό απώλειας κελιού αλλά η καθυστέρηση μετάδοσης είναι υψηλότερη σε σχέση με τα μοντέλα $MA - TN\Delta$ και $SND - TN\Delta$.

11.4.4 Συμπεράσματα

Παρουσιάστηκαν τρία τεχνητά νευρωνικά δίκτυα για τη ρύθμιση του ρυθμού αποστολής στα δίκτυα ATM. Τα $TN\Delta$ εκπαιδεύονται από μία μόνο πηγή κίνησης, κάνοντας τη συλλογή δεδομένων ευκολότερη. Τα $TN\Delta$ μπορούν να εφαρμοστούν σε μία μόνο πηγή (αφοσιωμένος καταχωρητής) ή πολλαπλές πηγές (μοιραζόμενος καταχωρητής) χωρίς την επανάληψη της εκπαίδευσης των $TN\Delta$, αυξάνοντας την γενικότητα των προσεγγίσεων. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης δείχνουν ότι οι μηχανισμοί έχουν βελτίωση του ρυθμού απώλειας κελιού σε σχέση με τον έλεγχο ανατροφοδότησης συμφόρησης με τιμές στατικών ορίων.

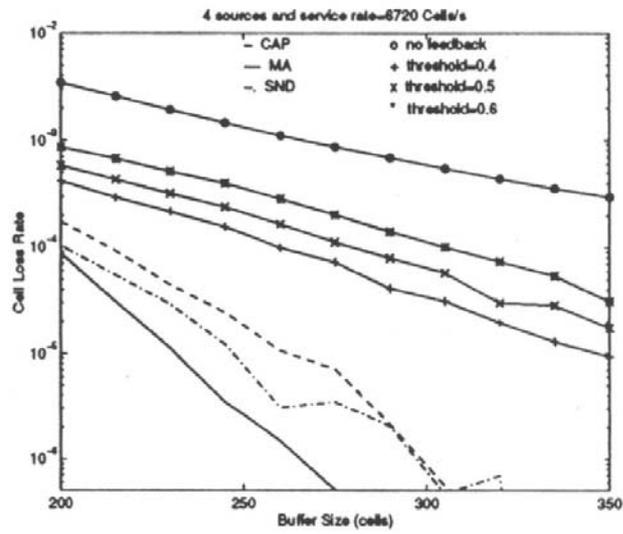


cell loss rate vs. buffer size (N=1).

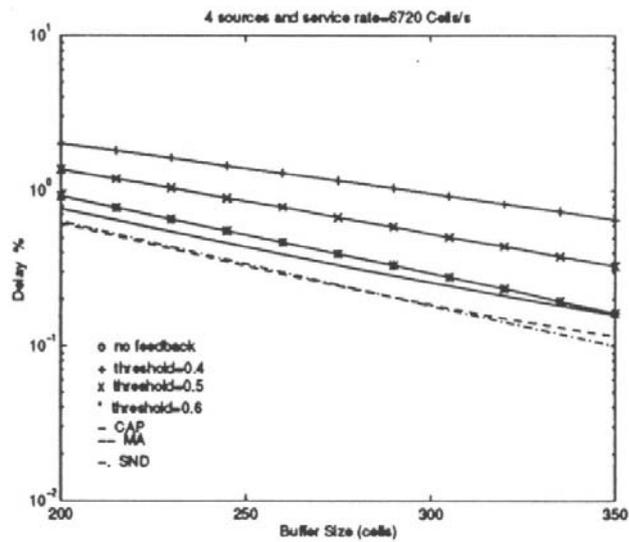


delay vs. buffer size (N=1).

Σχήμα 11.9: Ρυθμός απώλειας κελιού σε συνάρτηση με το μέγεθος του καταχωρητή ($N = 1$) και Καθυστέρηση σε συνάρτηση με το μέγεθος του καταχωρητή ($N = 1$).



cell loss rate vs. buffer size (N=4).



delay vs. buffer size (N=4).

Σχήμα 11.10: Ρυθμός απώλειας κελιού σε συνάρτηση με το μέγεθος του καταχωρητή ($N = 4$) και Καθυστέρηση σε συνάρτηση με το μέγεθος του καταχωρητή ($N = 4$).

Κεφάλαιο 12

Συστήματα Εξελικτικού Υπολογισμού

12.1 Γενικά

Η αρχή της εξέλιξης αποτελεί την πρωταρχική ενοποιητική ιδέα της βιολογίας και συνενώνει όλους τους οργανισμούς μαζί σε μία ιστορική αλυσίδα γεγονότων. Κάθε δημιουργήμα στην αλυσίδα είναι το προϊόν μιας σειράς “ατυχημάτων” τα οποία έχουν ταξινομηθεί λεπτομερώς κάτω από την επιλεκτική πίεση του περιβάλλοντος. Για πολλές γενιές, η **τυχαία μετάλλαξη (random mutation)** και η **φυσική επιλογή (natural selection)** διαμορφώνουν τις συμπεριφορές ατόμων και ειδών και τα βοηθούν να προσαρμόζονται στις απαιτήσεις των περιβαλλόντων τους.

Αυτή η προσαρμογή μπορεί να είναι αρκετά ασυνήθιστη και αναγαστική (όπως στην περίπτωση του θαλάσσιου δράκοντα του Σχήματος 12.1), γεγονός που αποτελεί μία καθαρή ένδειξη ότι η εξέλιξη είναι μια δημιουργική διαδικασία. Ενώ η εξέλιξη δεν έχει κανένα ουσιώδη σκοπό και αποτελεί απλά το αποτέλεσμα των φυσικών νόμων που ενεργούν σε πληθυσμούς και είδη, είναι ικανή για μηχανικές λύσεις των προβλημάτων επιβίωσης (τα οποία είναι μοναδικά για την κατάσταση του κάθε ατόμου) και με κάθε μέτρο αρκετά επινοητική.



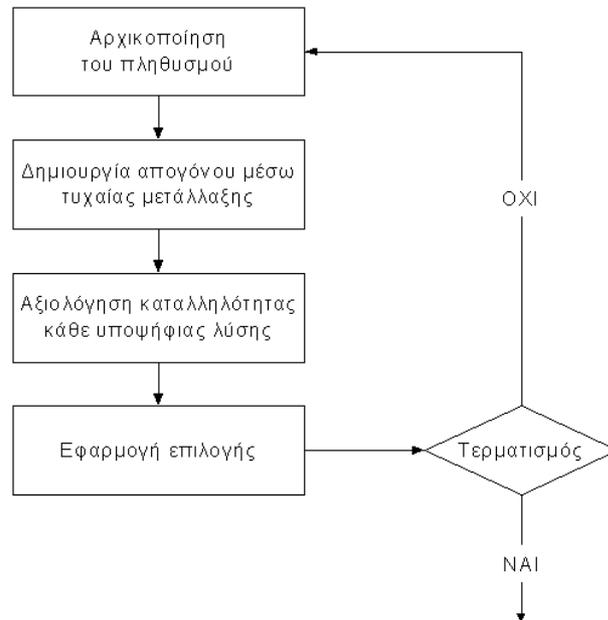
Σχήμα 12.1: Η εξέλιξη αντιμετωπίζει τα προβλήματα με τρόπους που δεν συμβαίνουν ποτέ σε ανθρώπους οι οποίοι σκοπεύουν να σκεφτούν γραμμικά. Παράδειγμα αποτελεί ο γεμάτος φύλλα θαλάσσιος δράκοντας του οποίου τα άκρα και το πίσω μέρος αναλαμβάνουν τον σχηματισμό τα βλάστησης που τον περιβάλλει, αποκρύπτοντάς τον από τους φυσικούς εχθρούς του.

Εύκολα φαντάζεται κανείς το αποτελέσματα που μπορεί να έχει η υλοποίηση μιας εξελικτικής διαδικασίας μέσα σε ένα υπολογιστή. Θα μπορούσε να παρέχει ένα πλαίσιο για την αντιμετώπιση σύγχρονων τεχνολογικών προβλημάτων, ειδικά εκείνων που περιέχουν χαστικές διαταραχές, τυχαιότητα και σύνθετες δυναμικές μεταβλητές, τα οποία οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι αδυνατούν να λύσουν. Πραγματικά, το πεδίο των εξελικτικών διαδικασιών είναι από τα πεδία της επιστήμης και της τεχνολογίας των υπολογιστών που αναπτύσσονται πιο γρήγορα για τον εξής και μόνο λόγο: αντιμετωπίζει πολλά προβλήματα τα οποία προηγουμένως ήταν πέρα από κάθε λογική και εντελώς απρόσιτα, όπως η δημιουργία περισσότερο αποτελεσματικών φαρμάκων, οι ευέλικτες λύσεις σε αλυσιδωτά διοικητικά προβλήματα ή η άμεση ανάλυση των διαφορών τακτικών άμυνας στο πεδίο μάχης. Είναι πιθανόν το πεδίο αυτό να μπορέσει τελικά να εκπληρώσει το όνειρο της τεχνητής νοημοσύνης, δηλαδή να δημιουργήσει έναν υπολογιστή ο οποίος να μπορεί να μάθει από μόνος του και να γίνει εμπειρογνώμονας σε μία συγκεκριμένη περιοχή.

Σε γενικές γραμμές, η εξέλιξη μπορεί να περιγραφεί ως μία επαναληπτική διαδικασία που αποτελείται από δύο βήματα και περιέχει τυχαία μετάλλαξη η οποία ακολουθείται από επιλογή. Η σύνδεση μεταξύ της περιγραφής της εξέλιξης και των βελτιστοποιημένων αλγορίθμων οι οποίοι αποτελούν το κριτήριο αποτελεσματικότητας της εξελικτικής διεργασίας είναι απλή. Όπως η φυσική εξέλιξη ξεκινάει από έναν αρχικό πληθυσμό πλασμάτων, έτσι και η αλγοριθμική προσέγγιση ξεκινάει επιλέγοντας ένα αρχικό σύνολο από ισχυρές λύσεις για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Το σύνολο μπορεί να επιλεγθεί γεννώντας λύσεις τυχαία ή χρησιμοποιώντας για τον συγκεκριμένο σκοπό κάθε διαθέσιμη γνώση σχετικά με το πρόβλημα.

Αυτές οι “γονικές” λύσεις κατόπιν παράγουν “απογόνους” μέσω μίας προεπιλεγμένης σειράς τυχαίων μεταλλάξεων. Οι λύσεις που προκύπτουν εκτιμώνται για την αποτελεσματικότητα και την “προσαρμοστικότητά” τους και για την υφιστάμενη επιλογή. Όπως η φύση επιβάλλει τον κανόνα της “επιβίωσης των πιο κατάλληλων”, έτσι κι εδώ οι λύσεις που είναι λιγότερο αποτελεσματικές απορρίπτονται

από την παραπέρα μελέτη και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μόνο για τις λύσεις που επιβίωσαν, δηλαδή τις επιτυχείς γενιές (Σχήμα 12.2).



Σχήμα 12.2: Ένας εξελικτικός αλγόριθμος ξεκινάει με αρχικοποίηση ενός πληθυσμού υποψήφιας λύσεων ενός προβλήματος. Στη συνέχεια, δημιουργούνται νέες λύσεις με τυχαία μετάλλαξη αυτών που προέρχονται από τον αρχικό πληθυσμό. Όλες οι λύσεις αξιολογούνται ως προς το πόσο καλά αντιμετωπίζουν το πρόβλημα. Τελικά, εφαρμόζεται ένα κριτήριο επιλογής για να διακρίνει (και να απορρίψει) αυτές που βρίσκονται κάτω από ένα όριο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται χρησιμοποιώντας το επιλεγμένο σύνολο λύσεων μέχρι να ικανοποιηθεί ένα συγκεκριμένο κριτήριο.

12.2 Το πρόβλημα των υποθέσεων

Όσον αφορά στην ανακάλυψη των πιο κατάλληλων λύσεων (δηλαδή βελτιστοποιημένων αλγόριθμων), οι παραδοσιακοί αλγόριθμοι προαπαιτούν από τους χρήστες τους αρκετές υποθέσεις σχετικά με την εκτίμηση της καταλληλότητας μιας λύσης. Σύμφωνα με αυτούς τους παραδοσιακούς αλγόριθμους, η εκτίμηση αναφέρεται με πολλά ονόματα, όπως συνάρτηση καταλληλότητας, συνάρτηση κόστους, επιφάνεια απόκρισης ή δείκτης απόδοσης. Για παράδειγμα οι λεγόμενοι αλγόριθμοι γραμμικού προγραμματισμού προϋποθέτουν οι συναρτήσεις κόστους να είναι γραμμικές, αποτελούμενες από ένα άθροισμα από σταθμισμένους ανεξάρτητους όρους.

Μία άλλη παραδοσιακή προσέγγιση, στην οποία αναζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο ως σημείο μηδενισμού της παραγώγου, απαιτεί μια ομαλά διαφορίσιμη συνάρτηση κόστους. Στην προσέγγιση αυτή, είναι αδύνατο να αντιμετωπιστεί μία αιφνίδια και ασυνεχής μεταβολή.

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι δεν προαπαιτούν τέτοιες υποθέσεις. Βασικά, ο δείκτης αποτελεσματικότητας απαιτεί μόνο να είναι εφικτή η ταξινόμηση (κατάταξη) δύο ανταγωνιστικών λύσεων. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει απλώς να καθορίζεται ότι μία λύση είναι από κάποια άποψη καλύτερη από μία άλλη. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει να αντιμετωπιστεί μία μεγάλη σειρά προβλημάτων, τα οποία διαφέρουν από τα συμβατικά προβλήματα. Με λίγα λόγια, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι μπορούν συχνά να αναλύσουν προβλήματα τα οποία δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με τις συνηθισμένες αριθμητικές τεχνικές.

Στην πραγματικότητα, μία εξελικτική προσέγγιση στην επίλυση τεχνολογικών προβλημάτων προσφέρει σημαντικά πλεονεκτήματα. Ένα τέτοιο πλεονέκτημα είναι η προσαρμοστικότητα των λύσεων σε μεταβολές καταστάσεων. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ένας διοικητής εργαστασίου πρέπει να βρει τον καλύτερο προγραμματισμό για την λειτουργία ενός εργοστασίου. Αναμφίβολα, θα υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί: η διαθεσιμότητα του προσωπικού, ο αριθμός των μηχανών, ο χρόνος που απαιτείται για την αλλαγή των ρυθμίσεων των μηχανών κτλ. Ακόμα και αν ο διοικητής μπορούσε να βρει έ-

ναν βέλτιστο προγραμματισμό του εργοστασίου ο οποίος θα ήταν περισσότερο επικερδής, θα χρειαζόταν ακόμη να εξετάσει και το ενδεχόμενο οι μηχανές να χαλάσουν ή το προσωπικό να μην φτάσει στην εργασία την ώρα του. Στην καθημερινή ζωή, το πρόβλημα που εμφανίζεται κάθε στιγμή μπορεί να έχει εκτραπεί σημαντικά από το πρόβλημα που αναμενόταν αρχικά.

Δυστυχώς, σε πολλές παραδοσιακές διαδικασίες βελτιστοποίησης, ο υπολογισμός πρέπει να επαναληφθεί από την αρχή αν αλλάξει μία μεταβλητή του προβλήματος. Αυτό βέβαια είναι προγραμματιστικά πανάκριβο. Στην άλλη περίπτωση, με έναν εξελικτικό αλγόριθμο, ο τρέχων πληθυσμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ρεζέρβα της αποθηκευμένης γνώσης κατά τη μετάβαση προς ένα δυναμικό περιβάλλον. Ο υπολογισμός από την αρχή δεν είναι απαραίτητος.

Ένα άλλο πλεονέκτημα μιας εξελικτικής προσέγγισης στην επίλυση του προβλήματος είναι το ότι αυτή είναι ικανή να παράγει αρκετά καλές λύσεις και αρκετά γρήγορα για τους χρήστες τους. Αυτή η δυνατότητα ίσως απεικονίζεται καλύτερα με το κλασσικό πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή, το οποίο διατυπώνεται ως εξής: “Υποθέστε έναν πωλητή ο οποίος θα πρέπει να επισκεφθεί πελάτες που βρίσκονται σε διαφορετικές πόλεις και, στη συνέχεια, να επιστρέψει στο σπίτι του. Ποια είναι η μικρότερη διαδρομή που πρέπει να κάνει ο πωλητής μεταξύ αυτών των πόλεων, επισκεπτόμενος κάθε πόλη μία και μόνο φορά.”

Το πρόβλημα δηλώνεται και αναλύεται εύκολα, αλλά λύνεται δύσκολα. Ανήκει στην κατηγορία εκείνων των προβλημάτων που αναφέρονται ως **μη πολυωνυμικά προβλήματα (NP-complete)**. Για τέτοια προβλήματα, δεν υπάρχουν γνωστοί αλγόριθμοι που να είναι ικανοί να παράγουν την καλύτερη απάντηση σε ένα διάστημα χρόνου το οποίο αυξάνει μόνο ως πολυωνυμική συνάρτηση του μεγέθους του προβλήματος.

Στην πραγματικότητα, ο αριθμός των πιθανών διαδρομών σε οποιοδήποτε πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή αυξάνει ως μία παραγοντική συνάρτηση του αριθμού των πόλεων. Για παράδειγμα, για 100 πόλεις υπάρχουν πάνω από 10^{155} διαφορετικά πιθανά μονοπάτια με-

ταξύ όλων των πόλεων. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η διάρκεια της έως τώρα ζωής του σύμπαντος υπολογίζεται σε 10^{18} δευτερόλεπτα, είναι σίγουρο ότι θα αποτύχει η απλή εφαρμογή ενός αλγόριθμου “**ωμής βίας**” (**brute force**) που θα ψάξει όλες τις πιθανές λύσεις σε ένα πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή ενός μετρίου μεγέθους.

Αντίθετα, ας θεωρήσουμε τώρα μία εξελικτική προσέγγιση στην ανακάλυψη μιας χρήσιμης λύσης σε ένα τέτοιο πρόβλημα. Η προσέγγιση αυτή προϋποθέτει τα εξής τέσσερα βήματα:

1. Επιλογή της αναπαράστασης της λύσης.
2. Επιλογή ενός συντελεστή τυχαίας μετάλλαξης.
3. Καθορισμό ενός κανόνα για επιβιώσιμη λύση.
4. Αρχικοποίηση του πληθυσμού.

Εφόσον καθοριστούν τα παραπάνω, ο εξελικτικός αλγόριθμος θα ξεκινήσει να παράγει λύσεις και θα συνεχίσει να παράγει καλύτερες λύσεις καθώς κυλά ο χρόνος. Καθένα από αυτά τα βήματα αναλύεται και επεξηγείται σε ένα μεγάλο βαθμό στις ενότητες που ακολουθούν.

12.3 Εξελικτικά βήματα

Για να αναπαραστήσουμε μία πιθανή λύση έχοντας υπόψη τους περιορισμούς ενός υπολογιστή, θα πρέπει να οριστεί αρχικά μία δομή για τα δεδομένα η οποία θα κωδικοποιεί κάθε πιθανή λύση που θα ήταν επιθυμητό να υπολογιστεί. Μπορεί να αποδειχτεί με μαθηματική αυστηρότητα ότι δεν υπάρχει μια απλή και τέλεια αναπαράσταση για όλα τα προβλήματα. Μια αναπαράσταση των δεδομένων για το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή είναι η αποτύπωση κάθε διαφορετικής δυνατότητας σε μία μετάθεση. Πιο απλά, αν υπήρχαν έξι πόλεις (συμπεριλαμβανομένης και της αρχικής θέσης του πωλητή), τότε μία δυνατή λύση θα μπορούσε να είναι η [1 2 3 4 5 6], η οποία δηλώνει την σειρά επίσκεψης της κάθε πόλης. Ας σημειωθεί ότι, καθώς το πρόβλημα απαιτεί μια κλειστή διαδρομή δηλαδή ένα κλειστό

βρόχο, το πρώτο στοιχείο στην σειρά είναι επίσης και το τελευταίο. Επίσης, αν σημειωθεί ότι εφόσον αυτός είναι ένας βρόχος, δεν έχει σημασία στην πραγματικότητα από ποια πόλη ξεκινάει ο πωλητής. Κάθε μετάθεση αυτών των πόλεων θα μπορούσε να είναι μία ακόμα, περισσότερο ή λιγότερο επιθυμητή λύση στο πρόβλημα.

Υποθέστε ότι επιλέγεται αυτή η αναπαράσταση. Στη συνέχεια, θα πρέπει επίσης να καθοριστεί η συνάρτηση κόστους η οποία αποτελεί το μέσο για τον υπολογισμό κάθε υποψήφιας λύσης. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ο στόχος είναι προφανής: να ταξιδέψει ο πωλητής τη μικρότερη δυνατή απόσταση. Έτσι το “κόστος” κάθε λύσης μπορεί να οριστεί ως ανάλογο της απόστασης κατά μήκος της διαδρομής, με τις συντομότερες διαδρομές να προτιμώνται περισσότερο από τις μακρύτερες. Φυσικά, τα πράγματα μπορούν να περιπλαχούν ακόμα περισσότερο ενσωματώνοντας επιπρόσθετες απαιτήσεις λογικοφανών προβλημάτων όπως εκείνο της ελαχιστοποίησης του ταξιδιού που απαιτείται κατά την διάρκεια των ωρών μέγιστης κυκλοφορίας ή όπως εκείνο της απαίτησης να επισκεφθεί ο πωλητής συγκεκριμένους πελάτες για παράδειγμα το απόγευμα, κτλ. Γενικά, ο υπολογισμός υποψηφίων λύσεων μπορεί να γίνει ακόμα πιο περίπλοκος. Η πολυπλοκότητα κάνει μόνο την εφαρμογή του υπολογισμού ενός εξελικτικού αλγόριθμου πιο αναγκαία και διαφοροποιεί το πρόβλημα από τα πιο παραδοσιακά προβλήματα βελτιστοποίησης. Για χάρη αυτού του παραδείγματος, αν υποθέσουμε ότι η απλή συνολική απόσταση κατά μήκος της διαδρομής αποτελεί το μέτρο της αξιολόγησης της αποτελεσματικότητας μιας λύσης.

Το δεύτερο βήμα έγκειται στην επινόηση ενός συντελεστή (ή διαφόρων συντελεστών) τυχαίας μετάλλαξης ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παράγει απογονικές λύσεις. Υπάρχουν πολλές επιλογές. Στη φύση εμφανίζονται δύο γενικοί τρόποι αναπαραγωγής: ο **σεξουαλικός (sexual)** και ο **μη σεξουαλικός (asexual)**. Στη σεξουαλική αναπαραγωγή, οι δύο γονείς επιτελούν ένα είδος ανταλλαγής γενετικού υλικού το οποίο ανασυνδυάζεται για να σχηματίσει έναν απόγονο. Από την άλλη πλευρά, η μη σεξουαλική αναπαραγωγή είναι βασικά κλωνοποίηση, αλλά αλλαγές χρωμοσωμάτων από

διάφορους σχηματισμούς μπορούν να εισχωρήσουν μέσα στη γενετική πληροφορία που μεταβιβάζεται από τον γονέα στον απόγονο. Αυτοί οι συντελεστές αξίζει να ενσωματωθούν μέσα σε έναν εξελικτικό αλγόριθμο.

Σκεπτόμενος κάποιος ακόμα πιο γενικά θα μπορούσε να αναρωτηθεί γιατί δεν επινοούμε άλλα σχήματα μετάλλαξης τα οποία δεν υπάρχουν στην φύση. Παραδείγματα περιλαμβάνουν τον ανασυνδυασμό του γενετικού υλικού από τρεις ή περισσότερους γονείς, επιτρέποντας μια δημοκρατική ψηφοφορία μεταξύ των γονέων που εμπλέκονται στην αναπαραγωγή. Ουσιαστικά, δεν υπάρχει κανένα όριο στους τύπους των συντελεστών μετάλλαξης που μπορούν να επινοηθούν, ούτε κανέναν λόγο να περιοριστούν σε αυτούς που χρησιμοποιεί η Φύση.

Η τελική επιτυχία ενός εξελικτικού αλγορίθμου εξαρτάται βασικά από το πόσο καλά ταιριάζουν οι συντελεστές μετάλλαξης, η αναπαραστάση και η συνάρτηση κόστους. Διαφορετικοί συντελεστές θα διαφέρουν ως προς τη χρησιμότητά τους σε διαφορετικά προβλήματα. Όπως ακριβώς και με την αναπαραστάση, δεν υπάρχει κάποιος απλός και τέλειος συντελεστής μετάλλαξης για όλα τα προβλήματα και αυτό μπορεί να αποδειχτεί με μαθηματική αυστηρότητα.

Θεωρήστε δύο δυνατότητες για το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή οι οποίες αναπαριστούνται με τη χρήση μεταθέσεων. Μία επιλογή είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν απλό γονέα και να παράγουμε έναν απόγονο με τυχαία επιλογή δύο θέσεων προς τον γονέα και αντιστροφή της λίστας των πόλεων σε αυτό το τμήμα, όπως στο Σχήμα 12.3. Μια άλλη επιλογή είναι να χρησιμοποιήσουμε δύο γονείς, επιλέγοντας ένα τυχαίο σημείο κατά μήκος της μετάθεσης και στη συνέχεια συνενώνοντας το πρώτο τμήμα των πόλεων από τον πρώτο γονέα και το δεύτερο τμήμα των πόλεων από τον δεύτερο γονέα.

Ο πρώτος συντελεστής φαίνεται να μοιάζει λίγο με τη μη σεξουαλική αναπαραγωγή, ενώ ο δεύτερος φαίνεται να μοιάζει περισσότερο με τη σεξουαλική αναπαραγωγή. Ενώ η πρώτη μετάλλαξη θα παράγει πάντοτε μία νόμιμη διαδρομή (ο πωλητής θα επισκέπτεται κάθε πόλη μία και μόνο φορά), η δεύτερη μετάλλαξη μπορεί να παράγει

μη νόμιμες διαδρομές, επειδή κάποιοι απόγονοι μπορεί να περιέχουν περισσότερα από ένα αντίγραφα των ίδιων πόλεων και κανένα αντίγραφο από άλλες πόλεις. Αυτό δεν σημαίνει ότι γίνεται κανόνας η μη χρήση της σεξουαλικής αναπαραγωγής, αλλά απλά υπαγορεύει το περιεχόμενο επιπρόσθετων λειτουργιών για την επιδιόρθωση τέτοιων λύσεων. Η επιδιόρθωση μπορεί να έγκειται στον εντοπισμό κάθε πόλης η οποία εμφανίζεται πάνω από μία φορά σε μία λύση και στη συνέχεια αντικατάσταση αυτής της πόλης με κάποια η οποία δεν εμφανίζεται καθόλου. Αφού γίνει αυτό για κάθε πολλαπλή πόλη, ο απόγονος θα έχει επιδιορθωθεί και θα έχει μετατραπεί σε μια βιώσιμη λύση. Για το πρόβλημα του περιοδευόντος πωλητή, θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν πολλοί και διάφοροι συντελεστές μετάλλαξης, αλλά εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το συντελεστή αντιστροφής που περιγράψαμε παραπάνω.

Το τρίτο βήμα είναι ο καθορισμός ενός κανόνα αναφορικά με το ποιες λύσεις θα επιλέξουμε ως βιώσιμες ώστε να αποτελέσουν τους γονείς για την επόμενη γενιά. Όπως με την μετάλλαξη, έτσι κι εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε αρκετά σχήματα για την επιλογή. Ένας απλός κανόνας είναι η επιβίωση του πιο κατάλληλου, σύμφωνα με την οποία παραμένει μόνο το σύνολο των πολύ καλών λύσεων και όλες οι άλλες απορρίπτονται. Ένας εναλλακτικός κανόνας είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα είδος τουρνουά, όπου οι λύσεις συναγωνίζονται τυχαία ανά δύο για το ποια θα επιβιώσει. Στα επαγγελματικά αθλήματα, πιο αδύναμοι παίκτες ή ομάδες νικούν μερικές φορές διότι κερδίζουν μια τυχερή ισοπαλία στο τουρνουά. Έτσι κι εδώ, το παραπάνω σχήμα επιτρέπει σε πιο αδύναμες λύσεις ενός πληθυσμού να επιβιώνουν μερικές φορές για λίγες γενιές. Αυτό μπορεί να είναι καλό σε πολύπλοκα προβλήματα, όπου μπορεί να είναι πιο εύκολο να βρεθούν καινούργιες βέλτιστες λύσεις επιφέροντας μεταβολές σε πιο αδύναμες, παρά να επιτευχθεί αυτό κρατώντας αποκλειστικά τις πολύ καλές. Οι δυνατότητες αφθονούν, αλλά κάθε κανόνας που γενικά ευνοεί για επιβίωση τις πιο καλές λύσεις σε σχέση με τις πιο αδύναμες είναι σίγουρα πιο λογικός. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί μόνο η βασική προσέγγιση της επιβίωσης του πιο κατάλληλου.

12.4 Γέννηση

Το τελικό βήμα είναι η επιλογή του αρχικού πληθυσμού. Αν δεν είναι τίποτα γνωστό σχετικά με την λύση του προβλήματος, τότε οι αρχικές λύσεις μπορούν να επιλεγούν μόνο εντελώς τυχαία από το διάστημα όλων των δυνατών λύσεων. Στην περίπτωση του προβλήματος του περιοδεύοντος πωλητή, αυτό σημαίνει την τυχαία παραγωγή ενός αριθμού από μεταθέσεις ακεραίων, όπου κάθε μετάθεση αναπαριστάει μία δυνατή λύση.

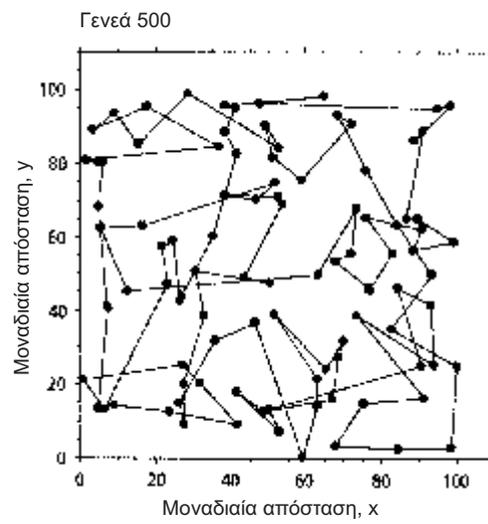
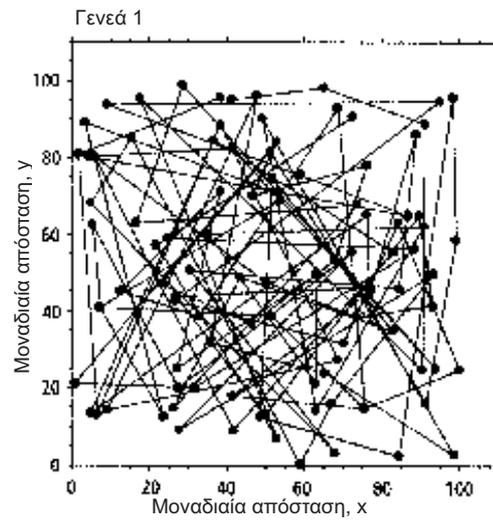
Εναλλακτικά, μπορεί να διατίθενται κάποιες ενδείξεις για διαθέσιμες καλές λύσεις, ίσως επειδή κάποιος άλλος αλγόριθμος ή κάποια προηγούμενη γνώση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραγάγει κάποιο καλύτερο σημείο εκκίνησης. Οι ενδείξεις αυτές μπορούν να ενσωματωθούν στον αρχικό πληθυσμό. Αν αυτές οι λύσεις αποδειχτεί ότι αξίζουν, θα επιβιώσουν και θα παραγάγουν νέες μεταβλητές, ενώ αν είναι άστοχες τότε θα χαθούν μαζί με τις άλλες τις πιο αδύναμες λύσεις.

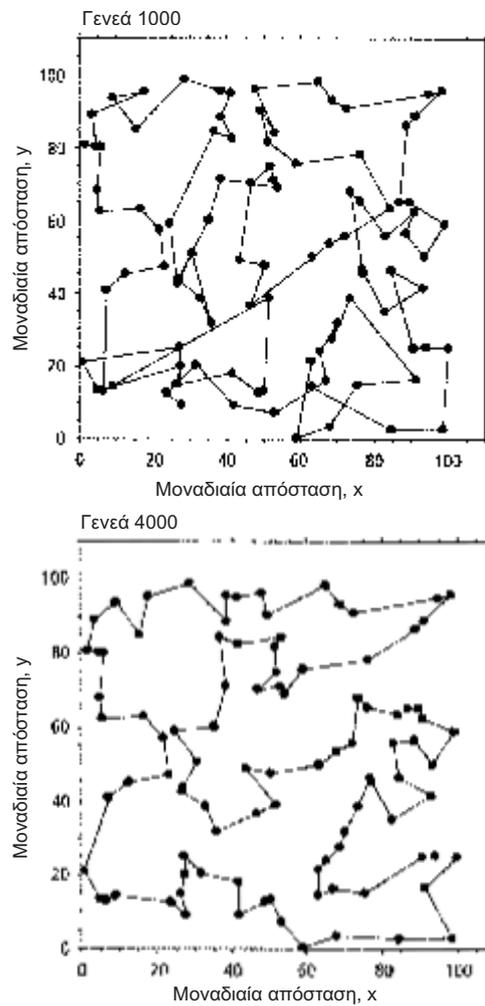
Για να αντιμετωπίσουμε το παράδειγμα του πλανόδιου πωλητή, υποθέτουμε ότι ο αρχικός πληθυσμός επιλέγεται εντελώς τυχαία. Μια τυπική εκτέλεση ενός εξελικτικού αλγορίθμου σε ένα πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή με 100 πόλεις, στο οποίο οι πόλεις έχουν κατανεμηθεί τυχαία αλλά με ομοιόμορφο τρόπο, έχει τα αποτελέσματα που εμφανίζονται στο Σχήμα 12.4. Η βελτιστοποίηση σε επιτυχημένα στάδια στην εξέλιξη των διαδρομών είναι προφανής.¹

Ο εξελικτικός αλγόριθμος έχει ψάξει το διάστημα των δυνατών διαδρομών και έχει ανακαλύψει μία πολύ καλή διαδρομή. Ενώ είναι πολύ πιθανό η λύση να μην είναι η καλύτερη δυνατή, είναι αρκετά αποτελεσματική. Συνολικά, εξετάστηκαν μόνο 400.000 δυνατές λύσεις, δηλαδή ένα απειροελάχιστο κλάσμα περίπου μίας για κάθε 10^{150} από το τεράστιο σύνολο των 10^{155} δυνατών λύσεων.²

¹Το πρόγραμμα για αυτό το παράδειγμα, γραμμένο σε MATLAB, είναι διαθέσιμο στη θέση www.natural-selection.com του Διαδικτύου.

²Αυτό είναι σύμφωνο με το εξελικτικό δόγμα: “Για να είναι χρήσιμες, οι λύσεις θα πρέπει να είναι αρκετά καλές και να παράγονται αρκετά γρήγορα”.





Σχήμα 12.4: Ένας απλός επαναληπτικός εξελικτικός αλγόριθμος χρησιμοποιήθηκε για να λύσει ένα πρόβλημα περιοδεύοντος πωλητή με 100 πόλεις. Στην αρχή, επιλέχθηκαν 100 δυνατές λύσεις, κάθε μία από τις οποίες χρησιμοποιήθηκε για να παραχθεί με αντιστροφή ένας απόγονος (Σχήμα 12.3). Από το σύνολο των 200 λύσεων που προέκυψε, επιλέχθηκαν (με κριτήριο σύγκρισης την μικρότερη διαδρομή) οι 100 καλύτερες λύσεις. Η πρώτη λύση από αυτήν την πρώτη γενιά εμφανίζεται πάνω αριστερά, ενώ εμφανίζονται επίσης οι καλύτερες λύσεις μετά από 500, 1000 και 4000 επαναλήψεις. Είναι εμφανής η πρόοδος που επετεύχθη με επανάληψη της διαδικασίας.

Αναμφισβήτητα, για την επίλυση του προβλήματος του περιοδευόντος πωλητή υπάρχουν αλγόριθμοι πολύ καλύτεροι από την παραπάνω εξελικτική διαδικασία, γεγονός που οφείλεται στο ότι οι μαθηματικοί έχουν ήδη ξοδέψει αρκετό χρόνο και προσπάθεια προσπαθώντας να επιλύσουν το πρόβλημα. Αλλά, όλες αυτές οι άλλες τεχνικές στηρίζονται σε κάποια συγκεκριμένη γνώση σχετικά με το πρόβλημα για να βελτιστοποιήσουν την εκτέλεσή τους και θυσιάζουν την γενικότητα με σκοπό να πετύχουν την αποτελεσματικότερη εκτέλεση. Όπως ακριβώς ο Deep Blue, το πρόγραμμα που κατέκτησε τη θέση του παγκόσμιου πρωταθλητή στο σκάκι, δρουν πολύ αποτελεσματικά στο στενό πεδίο της εφαρμογής και πολύ απογοητευτικά έξω από αυτό. Φανταστείτε τον Deep Blue να παίζει ένα παιχνίδι σκάκι: δεν θα μπορούσε να κάνει καν την πρώτη κίνηση.

Το σημείο-κλειδί είναι το ότι ενώ είναι δυνατό να συγχωνευτεί κάθε πρόβλημα με συγκεκριμένη διαθέσιμη γνώση και ως εκ τούτου να λάβουμε θετικά αποτελέσματα από αυτό, όταν χρησιμοποιούμε εξελικτικούς αλγόριθμους δεν είμαστε υποχρεωτικά αναγκασμένοι να εφαρμόσουμε αυτές τις τεχνικές. Για αυτό και οι εξελικτικοί αλγόριθμοι μπορούν να αντιμετωπίσουν μια εξαιρετικά μεγάλη ποικιλία από δυσεπίλυτα προβλήματα.

12.5 Εφαρμογές

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι ήδη χρησιμοποιούνται για να λύσουν μια μεγάλη ποικιλία από λογικοφανή προβλήματα τα οποία οριοθετούν σημαντικές προκλήσεις. Ένα τέτοιο πρόβλημα περιλαμβάνει την ανακάλυψη νέων φαρμάκων. Στην περίπτωση της περικοπής ενός μικρού μορίου (που ονομάζεται “ligand” που σημαίνει: σύνδεσμος ο οποίος πρέπει να περικοπεί) από ένα πιθανό φάρμακο σε ένα σημείο πρόσδεσης πρωτεϊνών, το αποτέλεσμα εξαρτάται σε μεγάλο μέρος από τα τριδιάστατα σχήματα και των δύο στοιχείων. Είναι ανάλογο με ό,τι συμβαίνει με ένα κλειδί και μια κλειδαριά: όπως μόνο το δεξιόστροφο κλειδί θα ανοίξει μια συγκεκριμένη κλειδαριά έτσι μόνο ένα

κατάλληλα διαμορφωμένο ligand θα είναι ικανό να προσδεθεί στην πρωτεΐνη.

Έχει βρεθεί ότι το ligand είναι εξαιρετικά δύσκολο να επιτευχθεί. Όχι μόνο υπάρχουν δεκάδες χιλιάδες υποψήφια, αλλά καθένα από αυτά έχει πολλούς δεσμούς οι οποίοι μπορούν να περιστραφούν σε πολλές διαφορετικές θέσεις. Βασικά, κάθε ligand έχει αναμφίβολα πολλά σχήματα. Είναι γεγονός ότι πολλές από αυτές τις πιθανές δομές είναι υπερβολικά απίθανο να ικανοποιούν τις φυσικές και χημικές ιδιότητες των μορίων. Ωστόσο όμως, ο αριθμός των δυνατών διατομών τις οποίες μπορεί να παρουσιάσει ένα ligand είναι συχνά τεράστιος με αποτέλεσμα να είναι αρκετά δύσκολη η πρόβλεψη της καλύτερης δομής ενός ligand για πρόσδεση σε μία πρωτεΐνη.

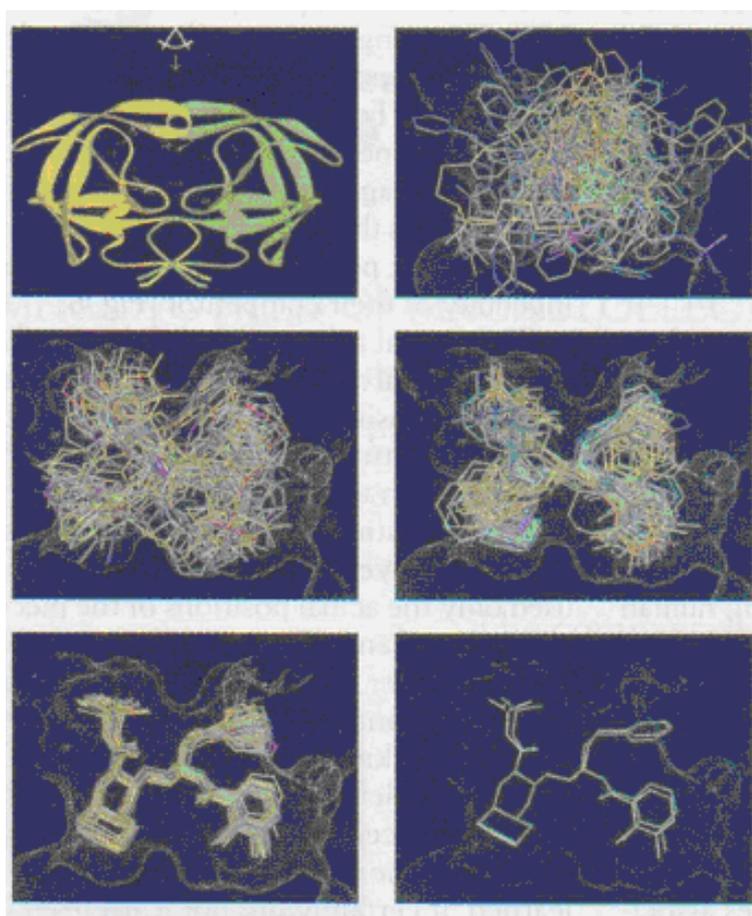
Σε μία μελέτη που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Chemistry & Biology, ερευνητές της φαρμακευτικής εταιρείας Argouron Pharmaceuticals Inc. υποδεικνύουν πώς ένας εξελικτικός αλγόριθμος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη του τρόπου με τον οποίο ένα ligand θα εισερχόταν στον ιό HIV-1 ως ένα αποτελεσματικό φάρμακο κατά του AIDS. Το πρόβλημα ήταν να βρουν την πιο ευνοϊκή δομή για το ligand όταν αυτό θα προσέγγιζε στο σημείο πρόσδεσης της πρωτεΐνης. Διάφοροι παράγοντες πιστεύεται ότι είναι σημαντικοί όπως:

- Η τριδιάστατη διάταξη του ligand σε σχέση με το πόσο καλά συμπληρώνει την δομή της επιφάνειας ενός σημείου πρόσδεσης στην πρωτεΐνη.
- Ηλεκτροστατικές επιδράσεις μεταξύ των ατόμων.
- Οι δυνάμεις Van der Waal οι οποίες υπαγορεύουν βασικά ότι δύο άτομα δεν μπορούν να προσδένονται συγχρόνως στο ίδιο σημείο.

Στο πρίσμα αυτών των κριτηρίων, κάθε δυνατή δομή ενός ligand μπορεί να αξιολογηθεί ανάλογα με το πόσο καλά προσδένεται στην πρωτεΐνη. Επινοήθηκε λοιπόν ένας εξελικτικός αλγόριθμος για να

εφαρμοστεί σε έναν πληθυσμό με περισσότερες από 1000 διαφορετικές δυνατές δομές ενός υποψήφιου ligand, με τυχαία μετάλλαξη των γωνιών περιστροφής του ligand και επιλογή από τους σχηματισμούς που εμφανίζονται αυτών που είναι πιο κατάλληλοι από άλλους. Το Σχήμα 12.5 δείχνει μια επιτυχημένη εξέλιξη του ligand που ονομάζεται AG-1343 και χρησιμοποιείται για τον ιό HIV-1. Η εξέλιξη αυτή προέκυψε μετά την ολοκλήρωση του εξελικτικού αλγόριθμου και μετά την διαδικασία της βαθμιαίας ελαχιστοποίησης σε κάθε γωνία περιστροφής. Η σύγκριση αυτού του αποτελέσματος με την πειραματικά καθορισμένη δομή του κρυστάλλου υποδεικνύει ότι υπάρχει μια μικρή ασυμφωνία μεταξύ της προβλέψιμης δομής που παράγεται από τον εξελικτικό αλγόριθμο και της πραγματικής παρατήρησης που εμφανίζεται στο περιβάλλον. Ουσιαστικά, τα πειράματα παρέχουν μια ανεξάρτητη επαλήθευση του γεγονότος ότι ο εξελικτικός αλγόριθμος βρήκε πραγματικά την σωστή απάντηση.

Αυτή η εφαρμογή είναι σημαντική διότι εξοικονομεί χρόνο και ανθρώπινη προσπάθεια. Όταν μια φαρμακευτική εταιρεία στοχεύει σε μια πρωτεΐνη, υπάρχουν πολύ περισσότερα δυνατά ligands που θα μπορούσαν να εξεταστούν ένα προς ένα. Κάθε δυνατό ligand μπορεί να έχει διάφορους περιστραμένους δεσμούς, δημιουργώντας ένα πολυδιάστατο πρόβλημα βελτιστοποίησης για την εύρεση της καλύτερης δομής από την μία άκρη του ως την άλλη. Από το να προσπαθήσει κανείς να ερευνήσει την κάθε περιστροφή ανεξάρτητα, ένας εξελικτικός αλγόριθμος μπορεί γρήγορα να ανακαλύψει ποια ligands ταιριάζουν καλύτερα στο σημείο πρόσδεσης με την πρωτεΐνη και επομένως έχουν την δυνατότητα να είναι υποψήφια φάρμακα. Οι χημικοί μπορούν κατόπιν να επικεντρώσουν την προσοχή τους σε αυτούς μόνο τους υποψήφιους. Το αποτέλεσμα είναι μια βελτιωμένη και αποτελεσματική σε κόστος διαδικασία παραγωγής της φαρμακευτικής έρευνας.



Σχήμα 12.5: Για να εξεταστεί η καταλληλότητα των εξελικτικών αλγόριθμων του για σχεδιασμό φαρμάκων, χρησιμοποιήθηκε ένας επαναστατικός αλγόριθμος για να επιλέξει μόρια ή ligands, τα οποία θα εισέρχονταν στο σημείο υποδοχής μιας πρωτεΐνης HIV-1 (άνω αριστερά διάγραμμα ταινίας βιοχημικού). Οι καλύτερες 150 από τις 1000 δυνατές λύσεις στην δεύτερη γενιά επιδεικνύονται αναμειγμένες άνω δεξιά. Επίσης, επιδεικνύεται το αποτέλεσμα του αλγόριθμου στην 70ή (στη μέση αριστερά), στην 92η (στη μέση δεξιά) και στην 149η (κάτω αριστερά) γενιά. Η καλύτερη δομή που παράχθηκε (κάτω δεξιά, με πράσινο χρώμα) ταίριαζε πάρα πολύ με εκείνη που βρέθηκε πειραματικά (κάτω δεξιά με λευκό χρώμα), γεγονός που υποδηλώνει τη χρησιμότητα των εξελικτικών τεχνικών.

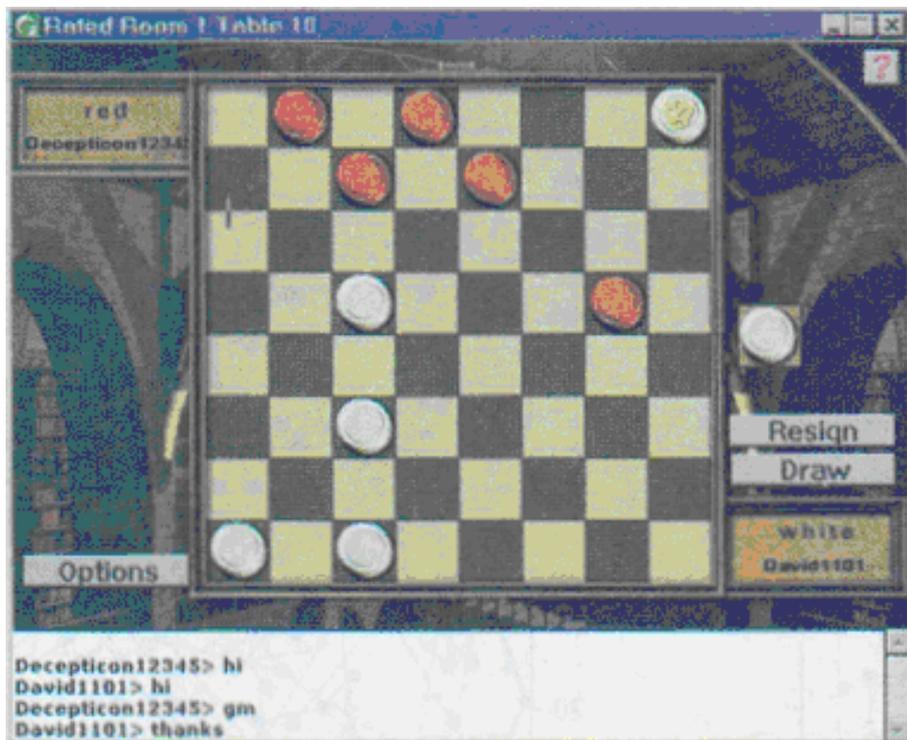
Άλλες πραγματικές εφαρμογές των εξελικτικών αλγορίθμων υλοποιούνται στον προγραμματισμό του ελέγχου της αλυσίδας προμηθειών και της ιατρικής διάγνωσης. Μπορεί ακόμα να χρησιμοποιηθούν ως βάση για προσομοιώσεις μαχών για εκπαίδευση στρατιωτικού προσωπικού. Ένας εξελικτικός αλγόριθμος μπορεί να συμπεριφερθεί σαν αληθινός εχθρός ο οποίος μαθαίνει και προσαρμόζει τις τακτικές του καθώς αλλάζει η στρατηγική κατάσταση. Ακόμα, η εξέλιξη χρησιμοποιείται ως μία βασική αρχή για το σχεδιασμό υλικού υπολογιστών (hardware).

Στο μακρινό μέλλον, οι εξελικτικοί αλγόριθμοι μπορεί να παίξουν έναν κεντρικό ρόλο στην επινόηση αληθινά ευφυών μηχανών-υπολογιστών που θα μπορούν να μάθουν μόνες τους. Η αληθινή πρόκληση δεν είναι τόσο το να φτιάξουμε έναν υπολογιστή που να μπορεί να συναγωνίζεται τους ανθρώπους. Σε πολλές περιορισμένες εφαρμογές όπως τα παιχνίδια, αυτό κατορθώνεται εύκολα μεταφράζοντας την ανθρώπινη ειδικότητα σε προγραμματιστικούς κανόνες συμπεριφοράς. Η αληθινή πρόκληση είναι να δώσουμε στον υπολογιστή έναν τρόπο να μάθει πώς να συμπεριφέρεται ως ένας εμπειρογνώμονας χωρίς να στηρίζεται στον άνθρωπο.

Ένα πρόσφατο βήμα προς αυτήν την κατεύθυνση είναι ένας εξελικτικός αλγόριθμος ο οποίος έμαθε να παίζει ντάμα σε ένα πολύ υψηλό επίπεδο ανταγωνισμού χωρίς να στηρίζεται σε καμία τεχνική που συνδέεται με την ανθρώπινη εμπειρία. Ο αλγόριθμος χρησιμοποίησε έναν πληθυσμό από τεχνητά νευρωνικά δίκτυα για να εκτιμήσει την αξία κάθε θέσης του πίνακα του παιχνιδιού. Κάθε νευρωνικό δίκτυο ήταν στην ουσία μια στρατηγική για να παίζει κάποιος, διότι παρήγαγε ένα αποτέλεσμα που υποδείκνυε ποιές θέσεις ήταν πιο κατάλληλες από άλλες. Ο εξελικτικός αλγόριθμος έβαλε σε ανταγωνισμό αυτά τα νευρωνικά δίκτυα (το ένα με το άλλο) ξεκινώντας από μία απόλυτα τυχαία αρχική κατάσταση και εφαρμόζοντας επαναληπτικά μετάλλαξη και επιλογή.

Ύστερα από μόνο 10 γενιές, το καλύτερο δίκτυο στο πληθυσμό ήταν ικανό να νικήσει τους αντιπάλους του εύκολα. Μετά από 100 γενιές, το καλύτερο δίκτυο έπαιξε εναντίον ανθρώπων στη θέση ww-

w.zone.com (Microsoft Network Gaming Zone Web Site) του Διαδικτύου. Τελικά, κατέκτησε ένα χαρακτηρισμό “κλάσης Α”, δηλαδή έφτασε ένα μόνο επίπεδο κάτω από τον χαρακτηρισμό του “expert” σύμφωνα με το σύστημα της Ομοσπονδίας Σκακιού των ΗΠΑ (United States Chess Federation). Φυσικά, οι αντίπαλοί του δεν ήξεραν ότι έπαιζαν εναντίον ενός προγράμματος και κάποιοι επαίνεσαν την ιδιοφυΐα του αντιπάλου τους! (Σχήμα 12.6).



Σχήμα 12.6: Σε ένα πρόσφατο παιχνίδι ντάμας που παίχτηκε στο Διαδίκτυο, οι κινήσεις του Davids1101 καθορίζονταν μυστικά από ένα αναπτυσσόμενο νευρωνικό δίκτυο. Ο Decepticon12345 ήταν ένας άνθρωπος (ανταγωνιστής) επιπέδου expert. Στο σημείο του παιχνιδιού που φαίνεται στο σχήμα, το νευρωνικό δίκτυο που παίζει με τα λευκά πιόνια, έχει μόλις κερδίσει έναν βασιλιά και ο άνθρωπος-παίκτης επιπέδου expert έχει αναγνωρίσει την κίνηση γράφοντας “gm” που σημαίνει “καλή κίνηση (good move)”.

Το κρίσιμο επίτευγμα αυτής της εργασίας είναι ότι τα νευρωνικά δίκτυα δεν υπολόγισαν τις κινήσεις τους χρησιμοποιώντας ανθρώπινες πρακτικές, όπως κινητικότητα πιονιών, έλεγχο του κέντρου του πίνακα, ύπαρξη μονοπατιού που να μπορεί να σώσει το βασιλιά ή οποιαδήποτε άλλη εμπειρική τεχνική που θα χρησιμοποιούσε ένας άνθρωπος-παίκτης. Χρησιμοποίησαν μόνο τις πραγματικές θέσεις των πιονιών στον πίνακα και το διαφορικό πόνι, δηλαδή τον αριθμό των πιονιών εμπρός ή πίσω. Ο εξελικτικός αλγόριθμος συνεπαίρανε ο,τιδήποτε χρειαζόταν να γνωρίζει σχετικά με το πώς θα παίζει σε επίπεδο κοντά στο τέλειο απλά παίζοντας το παιχνίδι και λαμβάνοντας ανάδραση από την τελική έκβαση κάθε παιχνιδιού. Ο,τιδήποτε έμαθε, οπωσδήποτε δεν το έμαθε από τους δημιουργούς του οι οποίοι γνωρίζουν πολύ λίγα σχετικά με το πώς να παίζουν πολύ καλή ντάμα. Τα πειράματα συνεχίζονται σε μια προσπάθεια που αποσκοπεί στην επίτευξη ενός επίπεδου τελειότητας που θα θέσει την εξελισσόμενη στρατηγική του αλγόριθμου στο κορυφαίο 1% όλων των παικτών που έχουν εγγραφεί στη θέση του παιχνιδιού στο Διαδίκτυο. Η ικανότητα ενός υπολογιστή να πετύχει σε ένα παιχνίδι τέτοιου επιπέδου επιδεξιότητα ανάλογη με του ανθρώπου μαθαίνοντας μόνος του ανοίγει το δρόμο προς την ικανότητα των υπολογιστών να μαθαίνουν νέες πλευρές του αληθινού κόσμου χωρίς να στηρίζονται στους ανθρώπους για προγραμματισμό τους με όλη την απαιτούμενη γνώση.

Καθώς το κόστος του προγραμματισμού μειώνεται, θα αναδειχτεί ο ρόλος των εξελικτικών αλγορίθμων στην επίλυση λογικοφανών προβλημάτων. Αυτό οφείλεται στην παράλληλη φύση των εξελικτικών προσεγγίσεων. Με τη φυσική εξέλιξη, τα άτομα πάντοτε αξιολογούνται παράλληλα με το περιβάλλον τους. Αντίστοιχα, στηριζόμενος σε μία ομάδα από υπολογιστές, ένας επαγγελματίας μπορεί να ξοδέψει λιγότερο χρόνο για να λύσει δύσκολα προβλήματα ή να αξιολογήσει ανεξάρτητες λύσεις παράλληλα παρά σειριακά. Ο πολύ μεγάλος πληθυσμός λύσεων που επιτρέπει αυτό το πρωτόκολλο παράγει καλύτερες λύσεις γρηγορότερα από ό,τι κάνουν μικρότεροι πληθυσμοί. Δεν είναι εύκολο να προβλεφθούν τα προϊόντα αυτών των παράλληλων σχεδιασμών. Κάποιοι, όπως ο Ray Kurzweil στο

βιβλίο *The Age of Spiritual Computing* (Εκδόσεις Viking, 1999), ήδη πρόβλεψαν την χρήση των εξελικτικών αλγορίθμων στον σχεδιασμό τεχνητών εγκεφάλων που θα αντικαταστήσουν και θα παραγωνίσουν την ανθρώπινη γνώση. Άσχετα του αν γίνει ή όχι αυτή η πρόβλεψη πραγματικότητα, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι θα γίνουν ένα κύριο στήριγμα στην επίλυση προβλημάτων στα χρόνια που θα έρθουν.

12.6 Έλεγχοι δρομολόγησης με Γενετικούς Αλγόριθμους

Διαχείριση κίνησης δικτύου

Η διαχείριση της κίνησης ενός τηλεπικοινωνιακού δικτύου (Network Traffic Management - NTM) περιλαμβάνει τις εργασίες λειτουργίας του δικτύου που εστιάζονται στην επίβλεψη και βελτιστοποίηση της ροής της κίνησης. Ο στόχος της είναι να καταστήσει επιτυχείς όσο το δυνατόν περισσότερες κλήσεις. Ο αρχές διαχείρισης δικτύου που ακολουθούνται κατά την διαχείριση είναι:

- Η χρησιμοποίηση όλων των διαθέσιμων κυκλωμάτων.
- Η διατήρηση των διαθέσιμων κυκλωμάτων που απασχολούνται με κίνηση που έχει υψηλή πιθανότητα να καταλήξει σε αποδοτικές κλήσεις.
- Όταν όλα τα διαθέσιμα κυκλώματα είναι σε λειτουργία, δίνεται προτεραιότητα σε κλήσεις που απαιτούν έναν ελάχιστο αριθμό βημάτων/σκελών για να σχηματιστεί μια σύνδεση.
- Αποφυγή συμφόρησης των κυκλωμάτων και παρεμπόδιση της εξάπλωσής της.

Η εφαρμογή αυτών των αρχών επιτελείται χρησιμοποιώντας ελέγχους διαχείρισης δικτύου. Οι έλεγχοι μπορούν να διαιρεθούν σε δύο ομάδες:

- Περιοριστικοί έλεγχοι: διαδικασίες για απόρριψη συγκεκριμένων κλήσεων
- Εκτεταμένοι έλεγχοι: διαδικασίες για επαναδρομολόγηση συγκεκριμένων κλήσεων.

Το είδος των ελέγχων που θα έπρεπε να χρησιμοποιούνται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση υπερφόρτωσης εξαρτάται από την κατάσταση του δικτύου. Για παράδειγμα, αν το πρόβλημα είναι η ολική

συμφόρηση του δικτύου, τότε η λύση θα είναι οι περιοριστικοί έλεγχοι. Απ' την άλλη πλευρά, αν το πρόβλημα είναι η τοπική συμφόρηση δικτύου, η καλύτερη λύση θα είναι η εφαρμογή εκτεταμένων ελέγχων.

Μέθοδος επαναδρομολόγησης ροής

Η γενική μέθοδος για επαναδρομολόγηση της ροής της κίνησης περιλαμβάνει τα ακόλουθα στάδια:

1. Την επιλογή της ροής κυκλοφορίας για επαναδρομολόγηση.
2. Τον υπολογισμό των υπολοίπων χωρητικότητας στο δίκτυο που θα μπορούσαν να τη μεταφέρουν.
3. Την ανάθεση της ροής κίνησης στις υπόλοιπες χωρητικότητες με ένα βέλτιστο τρόπο.

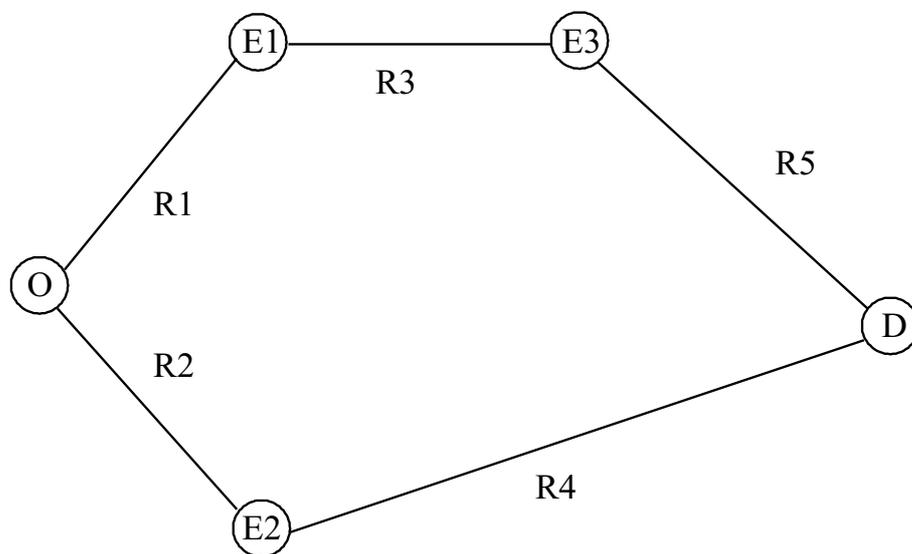
Η πρώτη λειτουργία είναι να αναγνωριστεί η ροή κίνησης για επαναδρομολόγηση. Ακολουθώντας τις αρχές της NTM, σκοπός είναι η επαναδρομολόγηση της κίνησης που πρόκειται να χαθεί, χρησιμοποιώντας πόρους δικτύου με διαθέσιμη χωρητικότητα. Το ελάττωμα αυτής της διαδικασίας είναι η πιθανότητα απωλειών σε απομακρυσμένα σημεία. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει ένα πρόβλημα στον προορισμό μιας συγκεκριμένης ανταλλαγής, ίσως να μην αξίζει η εφαρμογή των εκτεταμένων ελέγχων στην ανταλλαγή, επειδή οι απώλειες θα συνεχίσουν να συμβαίνουν.

Οι παράμετροι κίνησης μιας ροής, που μετρώνται σε μια ανταλλαγή και χρειάζονται για αυτή τη λειτουργία είναι:

- Πιθανότητα απόμακρης κατακράτησης κυκλώματος % απώλεια
- Answer Seizure Ratio (ASR), υποδεικνύει την ύπαρξη απόμακρων απωλειών
- Υπερχείλιση. Μια συγκεκριμένη ροή θα επιλεγεί μόνο αν υπάρχει σημαντική υπερχείλιση στις πρώτες και δεύτερες επιλογές δρομολόγησης.

Ο αλγόριθμος που προτείνεται στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσει τρία κατώφλια : ένα για την % απώλεια, ένα για την ASR και ακόμη ένα για την υπερχείλιση. Μια ροή κίνησης θα επιλεγεί μόνο αν αυτή υπερβεί τα τρία κατώφλια.

Η δεύτερη λειτουργία είναι ο υπολογισμός των υπολοίπων χωρητικότητων του δικτύου. Η πορεία μιας ροής κίνησης αποτελείται από όλα τα στάδια μεταξύ της αρχής και της κατάληξης. Προφανώς, είναι αναγκαίο να σκεφτεί κανείς την υπόλοιπη χωρητικότητα του πλήρους μονοπατιού.



Σχήμα 12.7: Κατασκευή των εναλλακτικών μονοπατιών.

Το Σχήμα 12.7 δείχνει ένα παράδειγμα εναλλακτικών μονοπατιών. Σε αυτό το παράδειγμα υπάρχουν δύο πιθανές πορείες από το O έως το D: R1-R3-R5 και R2-R4.

Παρατηρήστε ότι οι R3, R4 και R5 είναι ομάδες κυκλωμάτων που είναι η πρώτη επιλογή στους πίνακες δρομολόγησης των ανταλλαγών

τους με το D. Ενώ οι R1 και R2 είναι οι εξερχόμενες εναλλακτικές επιλογές του O. Υπολογίζουμε μόνο τις ομάδες κυκλωμάτων της πρώτης επιλογής επειδή το κύριο μέρος των κλήσεων θα ακολουθήσει αυτή την πορεία. Επιπλέον, αν θα χρειαζόταν να υπολογιστούν περισσότερες επιλογές, αυτό θα σήμαινε ότι υπάρχει υπερχείλιση από την πρώτη επιλογή, κάτι που δεν είναι επιθυμητό. Σύμφωνα με αυτό, η υπόλοιπη χωρητικότητα ενός μονοπατιού θα είναι μηδέν αν οποιαδήποτε από τις ομάδες κυκλωμάτων που συνθέτουν το μονοπάτι είναι σε υπερχείλιση. Μόλις σχηματίζονται οι πορείες, είναι πολύ εύκολο να υπολογιστεί η υπόλοιπη χωρητικότητά τους. Υπάρχουν δύο κανόνες:

- Η χωρητικότητα ενός πλήρους μονοπατιού είναι η ελάχιστη από αυτές των τμημάτων του.
- Αν υπάρχει μοίρασμα φορτίου μεταξύ δύο ομάδων κυκλωμάτων, τότε η υπόλοιπη χωρητικότητα του τμήματος θα είναι η πρόσθεση των διαθέσιμων χωρητικοτήτων κάθε σκέλους.

Η τρίτη λειτουργία είναι η ανάθεση ροής κίνησης στις υπόλοιπες χωρητικότητες με βέλτιστο τρόπο. Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί η απώλεια δικτύου, που λέγεται ότι μεγενθύνει τη μεταφερόμενη κίνηση. Είναι ένα πολύπλοκο πρόβλημα, επειδή η ευκολότερη λύση (η επαναδρομολόγηση της ροής της κίνησης στις εξερχόμενες ομάδες κυκλώματος με μεγαλύτερες υπόλοιπες χωρητικότητες) δεν είναι πάντα έγκυρη εξαιτίας της πιθανότητας ότι μερικές ροές χρησιμοποιούν το ίδιο τμήμα, υπερβαίνοντας τη χωρητικότητά του. Επιπρόσθετα, σε μεγάλα δίκτυα η πολυπλοκότητα της λύσης μεγαλώνει δραματικά.

Με σκοπό να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, χρησιμοποιούνται στο κεφάλαιο αυτό οι Γενετικοί Αλγόριθμοι.

12.6.1 Αλγόριθμος ανάθεσης ροής

Η εφαρμογή των γενετικών αλγορίθμων στο πρόβλημα ανάθεσης της ροής της κίνησης αφορά τρεις διαφορετικές λειτουργίες:

- Πρώτον, τον καθορισμό των ατόμων και του περιβάλλοντος του γενετικού αλγόριθμου, που θα έπρεπε να είναι κατάλληλα για την ανάθεση ροής της κίνησης.
- Δεύτερον, να αποφασιστεί η κατάλληλη δομή του αλγόριθμου για το πρόβλημα.
- Τελικά, να βρεθεί μια συνάρτηση καταλληλότητας για βελτιστοποίηση.

Άτομα και περιβάλλον

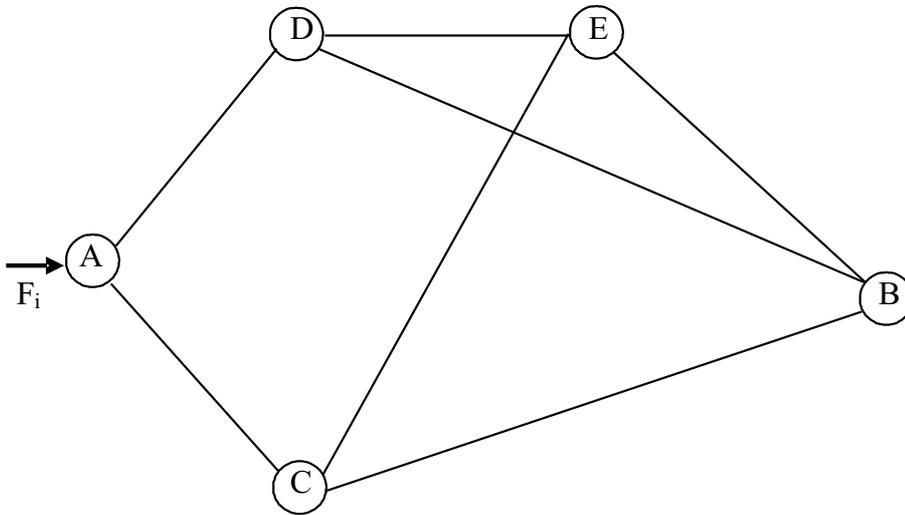
Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό των ατόμων και του περιβάλλοντος. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο ροής της κίνησης για επαναδρομολόγηση που καλείται $F = \{F_i\}$.

Το Σχήμα 12.8 δείχνει ένα συγκεκριμένο F_i (από το A στο B) για επαναδρομολόγηση. Σε αυτήν την περίπτωση, υπάρχουν τέσσερα εναλλακτικά μονοπάτια (A-C-B, A-C-E-B, A-D-B και A-D-E-B), που συνθέτουν το σύνολο των εναλλακτικών μονοπατιών $R_i = \{R_{ij}\}$ (ο δείκτης i υποδηλώνει ότι το σύνολο σχηματίζεται με εναλλακτικά μονοπάτια της ροής F_i). Κάθε εναλλακτικό μονοπάτι στο R_i , έχει μία αξία υπόλοιπης χωρητικότητας. Μια συγκεκριμένη ανάθεση για μια ροή F_i θα είναι ένα υποσύνολο του R_i , που θα ονομαστεί $E_i = \{E_{ij}\}$. Καθώς το E_i είναι ένα υποσύνολο, αρκετά εναλλακτικά μονοπάτια μπορούν να το διαμορφώσουν, σε αυτή την περίπτωση, η ροή κίνησης F_i , θα κατανεμηθεί αναλογικά μεταξύ των διαφορετικών μονοπατιών του E_i .

Το $E_i = \{E_{ij}\}$ θα είναι μια πλήρης λύση για το πρόβλημα. Τα άτομα των γενετικών αλγόριθμων θα είναι διαφορετικές τιμές του E . Το περιβάλλον θα είναι η επικράτεια διαστήματος, που είναι το σύνολο όλων των πιθανών τιμών του E .

Δομή του αλγόριθμου

Η δομή του αλγόριθμου παρουσιάζεται στο Σχήμα 12.9.

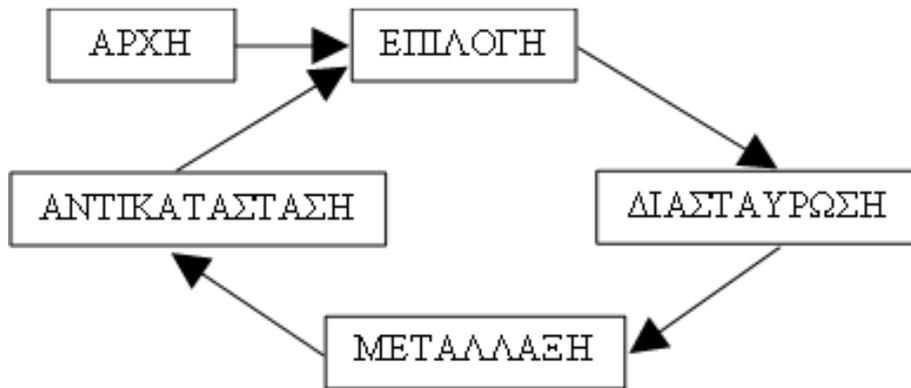


Σχήμα 12.8: Παράδειγμα εναλλακτικών μονοπατιών.

Υπάρχουν δύο τερματικές συνθήκες του γενετικού κύκλου: η σύγκλιση σε ένα συγκεκριμένο στοιχείο του πληθυσμού ή το τέλος της περιόδου επίβλεψης.

Σχετικά με τις φάσεις του γενετικού αλγόριθμου:

- **ΑΡΧΗ:** Ο αρχικός πληθυσμός αποτελείται από τυχαίες λύσεις στο πρόβλημα ανάθεσης της ροής της κίνησης. Προς απόκτηση καλύτερων αποτελεσμάτων, έχουν συμπεριληφθεί μερικές προκαθορισμένες λύσεις στον αρχικό πληθυσμό.
- **ΕΠΙΛΟΓΗ:** Χρησιμοποιείται ένας μηχανισμός ρουλέτας. Η πιθανότητα επιλογής του εξαρτάται από την συνάρτηση καταλληλότητας του μέλους: Όσο πιο υψηλή είναι η καταλληλότητα ενός ατόμου, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να επιλεγεί. Η συνάρτηση καταλληλότητας θα περιγραφεί παρακάτω.
- **ΔΙΑΣΤΑΥΡΩΣΗ:** Επιτελείται από μία στρατηγική αποκοπής σημείου. Αυτή η στρατηγική διαιρεί καθέναν από τους γονείς



Σχήμα 12.9: Διαγραμματική Παράσταση Γενετικού Αλγόριθμου.

σε δύο τμήματα, όπου το σημείο αποκοπής επιλέγεται τυχαία. Έπειτα, δύο γόνινοι συντίθενται αναμειγνύοντας τα μέρη και των δύο γονιών. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι τα γονίδια των ατόμων έχουν σημασία από μόνα τους: Κάθε ένα είναι το μονοπάτι για μια συγκεκριμένη ροή. Αυτή η σημασία είναι για τη θέση στη μονάδα. Έτσι, δεν είναι δυνατό να εναλλάσσονται γονίδια μεταξύ διαφορετικών θέσεων για τη δημιουργία ενός γόνου, επειδή σε αυτή την περίπτωση δε θα ήταν ένα σωστό άτομο. Υπάρχει ένας ρυθμός διασταύρωσης, που αποφασίζει τον αριθμό των γόνων που πρέπει να εισαχθούν στον πληθυσμό.

- **ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ:** Η φάση αυτή εισάγει μέσα στον επιλεγμένο πληθυσμό γόνους ξεκαθαρίζοντας τον ίδιο αριθμό ατόμων. Ο αλγόριθμος μας θα αντικαταστήσει τα χειρότερα άτομα με γόνους. Αν και αυτή η στρατηγική είναι ενάντια στη διατήρηση της ποικιλίας του πληθυσμού, επιτυγχάνει γρηγορότερη σύγκλιση. Ο αριθμός των μονάδων που θα αλλαχθούν ορίζεται από το ρυθμό της διασταύρωσης. Υπάρχει μια εξαίρεση σε αυτόν τον κανόνα: ο ελιτισμός (ένας τρόπος για να διασωθεί ένα ποσοστό των καλύτερων ατόμων από την αντικατάσταση).
- **ΜΕΤΑΛΛΑΞΗ:** Είναι μια αλλαγή σε μια τιμή χρωμοσώματος,

σύμφωνα με μια συγκεκριμένη πιθανότητα. Καθώς το διάστημα περιορίζεται στις πιθανές τιμές των εναλλακτικών μονοπατιών, αυτός ο τελεστής δεν θα λειτουργήσει εκτός αυτού του διαστήματος. Η πιθανότητα μετάλλαξης είναι μια μεταβλητή που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του προβλήματος ανάθεσης.

Οι τιμές των ρυθμών διασταύρωσης και μετάλλαξης ορίζονται στην αρχή του αλγόριθμου. Υπάρχουν μερικές θεωρήσεις για τον τρόπο επιλογής των ρυθμών:

- Ο ρυθμός διασταύρωσης δε θα πρέπει να είναι υψηλός λόγω της στρατηγικής που χρησιμοποιείται. Αν ήταν πολύ υψηλός, τότε η σύγκλιση του αλγόριθμου για μια λύση θα ήταν πιθανά πρόωμη.
- Στους γενετικούς αλγόριθμους υπάρχουν δύο τρόποι να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση: με εξερεύνηση (ψάχνοντας όλο το διάστημα), η οποία γίνεται κυρίως με τους τελεστές διασταύρωσης και με εκμετάλλευση (ψάχνοντας κοντά σε μια συγκεκριμένη λύση), η οποία γίνεται με τους τελεστές μετάλλαξης. Ένας υψηλός ρυθμός μετάλλαξης δηλώνει ότι η έρευνα είναι προσανατολιζόμενη από την εκμετάλλευση, αντίθετα ένας χαμηλός ρυθμός μετάλλαξης οδηγεί σε μια έρευνα προσανατολιζόμενη από την εξερεύνηση. Η περίπτωσή μας είναι η πρώτη, εξαιτίας των λόγων που θα εξηγηθούν ταυτόχρονα με την συνάρτηση καταλληλότητας.

12.6.2 Συνάρτηση καταλληλότητας

Η συνάρτηση καταλληλότητας θα έπρεπε να είναι οι απώλειες του δικτύου, επειδή η ελαχιστοποίηση τους θα μας οδηγούσε στην καλύτερη γενική λύση για το πρόβλημα. Υπάρχουν προσεγγιστικές υπολογιστικές μέθοδοι που μετράνε τις απώλειες του δικτύου υποθέτοντας καθορισμένη δρομολόγηση. Όμως, αυτού του είδους οι μέθοδοι αφορούν την επίλυση ενός πολύπλοκου συστήματος εξισώσεων,

που θα ήταν πολύ δαπανηρή στον υπολογιστικό χρόνο, λαμβάνοντας υπόψη ότι θα ήταν απαραίτητο να λύσουμε ένα σύστημα εξισώσεων μια φορά για κάθε άτομο για κάθε επανάληψη.

Συνεπώς έχει επινοηθεί μια προσεγγιστική και πιο αποδοτική διαδικασία. Η συνάρτηση καταλληλότητας είναι :

$$f(E) = \sum_{\forall cg_k \in E} \max \left(\sum_{\forall F_i} A_{ik} - k \cdot C_k, 0 \right)$$

όπου C_k είναι η υπόλοιπη χωρητικότητα της ομάδας κυκλώματος cg_k και A_{ik} είναι το τμήμα της ροής κίνησης F_i , που θα μετέφερε την ομάδα κυκλώματος cg_k στην περίπτωση που επαναδρομολογείται μόνο το F_i .

Η συνάρτηση καταλληλότητας περιλαμβάνει τη συσσώρευση σε κάθε ομάδα κυκλώματος όλης της κίνησης που αντιστοιχεί στην ροή που έχει ανατεθεί μείον τη διαθέσιμη χωρητικότητα. Η χωρητικότητα πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα k , μικρότερο από 1, για να συμπεριλάβει τις στατιστικές διαφοροποιήσεις των υπολοίπων χωρητικότητων.

Προφανώς, η συνάρτηση καταλληλότητας δεν ταιριάζει ακριβώς με τις απώλειες του δικτύου. Η μεγιστοποίηση της υπονοεί την ελαχιστοποίηση των απωλειών του δικτύου. Καθώς η συνάρτηση είναι μόνο μια συσσώρευση, οι μεγαλύτερες ροές έχουν περισσότερη επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα από τις μικρότερες. Επομένως, τα γονίδια θα είναι ποσοτικά διαφορετικά: κάποια από αυτά θα είναι πιο σημαντικά για τη βελτιστοποίηση. Εξάλλου, ο αρχικός πληθυσμός δεν επιλέγεται συνολικά τυχαία, συμπεριλαμβάνονται οι λύσεις όπου οι μεγαλύτερες ροές συνοδεύουν τις μεγαλύτερες υπόλοιπες χωρητικότητες. Με αυτό τον τρόπο, το πρόβλημά μας γίνεται ένα πρόβλημα εκμετάλλευσης μετά από μερικές επαναλήψεις: Ο γενετικός αλγόριθμος θα έχει προσαρμόσει τις μεγαλύτερες ροές κίνησης και οι επακόλουθες επαναλήψεις θα προσπαθήσουν να αναθέσουν τις μικρότερες. Αυτή η διαδικασία αποδείχθηκε επαρκής για τα σενάρια που δοκιμάστηκαν, όπως φαίνεται παρακάτω.

12.6.3 Αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται δύο σενάρια για τη δοκιμή του γενετικού αλγόριθμου: ένα ιεραρχικό δίκτυο με δεκαπέντε κόμβους και το ισπανικό υπεραστικό δημόσιο τηλεφωνικό δίκτυο (PSTN: Postal Switched Telephone Network). Κάθε σενάριο αποτελείται από μια προσομοίωση 12 περιόδων των 5 λεπτών. Κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου συγκεντρώνονται μετρήσεις κίνησης και αυτές οι μετρήσεις χρησιμοποιούνται για να δοκιμάζεται η λειτουργία του δικτύου και να τροφοδοτείται ο αλγόριθμος. Η δομή της προσομοίωσης είναι η ακόλουθη:

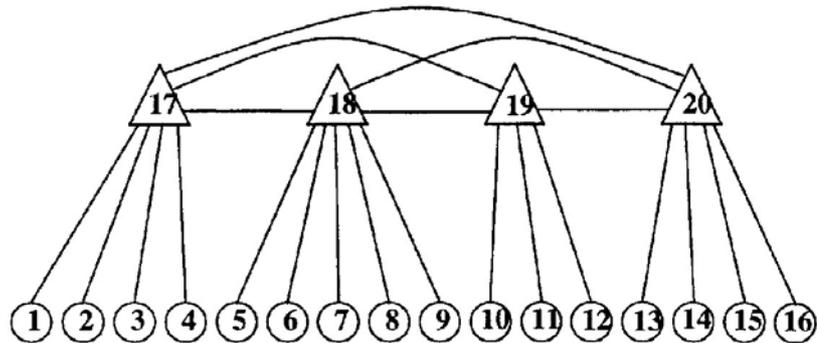
- Αρχίζει με τέσσερις περιόδους ονομαστικών συνθηκών δικτύου.
- Στο τέλος της τέταρτης περιόδου προσομοιώνονται μια ή περισσότερες ανωμαλίες
- Έπειτα υπάρχουν τέσσερις περίοδοι ακόμα για να δείξουν την επίδραση αυτών των ανωμαλιών στην απόδοση του δικτύου
- Στο τέλος της όγδοης περιόδου, παράγονται οι έλεγχοι Προσωρινής Εναλλακτικής Δρομολόγησης (Temporary Alternative Routing, TAR) χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο.
- Αυτή τη στιγμή ενεργοποιούνται οι έλεγχοι και η προσομοίωση συνεχίζεται.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται θα είναι η απόρριψη και η διαπερατότητα για ολόκληρο το δίκτυο. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με την απόδοση που θα επικρατούσε αν δεν εφαρμόζονταν έλεγχοι.

12.6.4 Ιεραρχικό δίκτυο

Το πρώτο σενάριο έχει επιλεγεί για να ελέγξει την εγκυρότητα της μεθόδου στα ιεραρχικά δίκτυα. Το δίκτυο που έχει χρησιμοποιηθεί

είναι ένα πλήρως διασυνδεδεμένο (φυλλψ μεσηεδ) δίκτυο, αποτελούμενο από τρεις τομείς των πέντε κόμβων όπου ένας από τους κόμβους είναι ιεραρχικά ο υψηλότερος (ο κόμβος που χρησιμοποιείται να δρομολογήσει την υπερχειλίση κίνησης). Το Σχήμα 12.10 δείχνει την δομή του δικτύου:

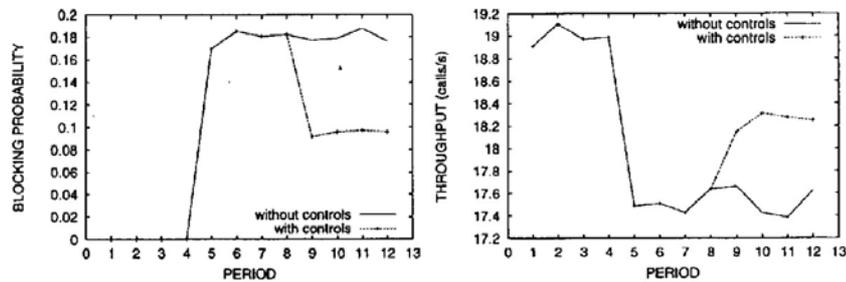


Σχήμα 12.10: Δομή Ιεραρχικού Δικτύου.

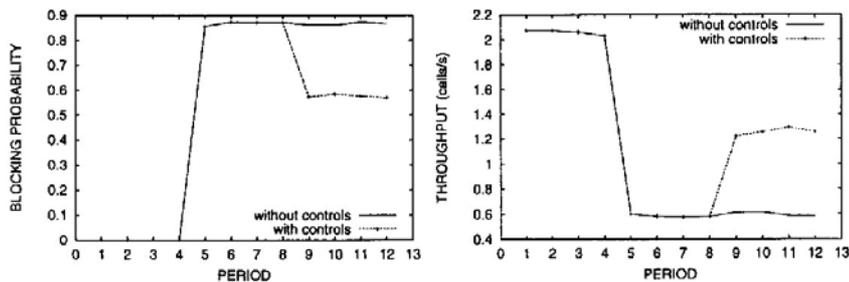
Οι πίνακες δρομολόγησης ακολουθούν την παρακάτω σειρά επιλογής: Πρώτον, η άμεση κύρια ομάδα, δεύτερον, η κύρια ομάδα προς την ιεραρχική μετάβαση του προορισμού, αν υπάρχει. Τέλος η κύρια ομάδα προς την ιεραρχική μετάβαση της αφετηρίας, αν υπάρχει. Η ανωμαλία είναι το ταυτόχρονο σφάλμα στις κύριες ομάδες μεταξύ του μεταγωγέα 4 και του τομέα 3, του μεταγωγέα 5 και του τομέα 2, και του μεταγωγέα 7 και του τομέα 3. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν εναπομένουσες χωρητικότητες στο δίκτυο αλλά είναι δύσκολο να επανακατανεμηθούν οι ροές επειδή είναι πιθανή η ύπαρξη συγκρούσεων μεταξύ των ροών TAR.

Η συνολική βελτίωση της εφαρμογής του αλγόριθμου είναι ένα 8,05% για την απόρριψη και ένα 4,72% για την διαπερατότητα. Αυτά παρουσιάζονται στο Σχήμα 12.11.

Όσο για τις σχέσεις που επηρεάζονται από τις ανωμαλίες, η απόρριψη μειώνεται κατά ένα 29,7% και η διαπερατότητα αυξάνει κατά 114%. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 12.12.



Σχήμα 12.11: Αποτελέσματα Ιεραρχικού Δικτύου - Ολόκληρο Δίκτυο.

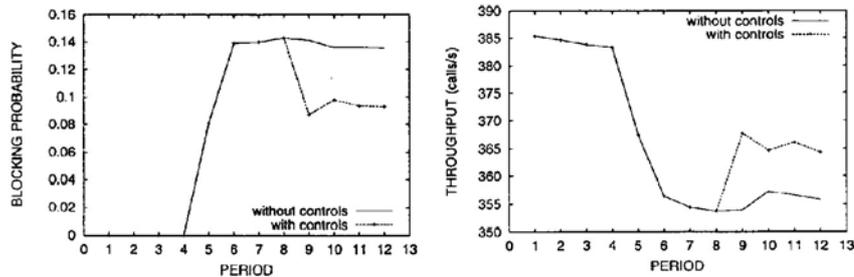


Σχήμα 12.12: Αποτελέσματα Ιεραρχικού Δικτύου - Επηρεασμένες Σχέσεις.

12.6.5 Ισπανικό υπεραστικό PSTN

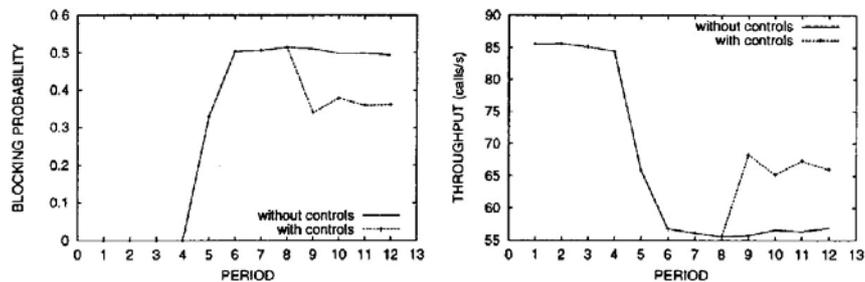
Το πρότυπο του Υπεραστικού Ισπανικού PSTN διαμορφώνεται από 75 κόμβους και 1250 κύριες ομάδες. Η ανωμαλία που ελέγχεται είναι η ατέλεια όλων των κύριων ομάδων μεταξύ των μεγαλύτερων Ισπανικών πόλεων, Μαδρίτης και Βαρκελώνης. Οι πίνακες δρομολόγησης σε αυτό το σενάριο είναι επίσης ένα απλοποιημένο πρότυπο από αυτά που ισχύουν στους μεταγωγείς. Το Σχήμα 12.13 δείχνει τη συνολική απόρριψη και διαπερατότητα του δικτύου. Μπορεί κανείς να δει ότι η μέθοδος βελτιώνει κατά ένα 4,25% τη συνολική απόρριψη και κατά

ένα 2,67% την διαπερατότητα.



Σχήμα 12.13: Αποτελέσματα Ισπανικού RSTN - Ολόκληρο Δίκτυο.

Όπως ήταν αναμενόμενο, τα αποτελέσματα είναι καλύτερα για τις σχέσεις που επηρεάζονται από την απώλεια της κύριας ομάδας. Η μέθοδος βελτιώνει κατά 13,3% τη συνολική απόρριψη και κατά ένα 16% την διαπερατότητα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.14.



Σχήμα 12.14: Αποτελέσματα Ισπανικού RSTN - Επηρεασμένες Σχέσεις.

12.6.6 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκε ένας Γενετικός Αλγόριθμος για την επίλυση ενός πολύπλοκου προβλήματος βελτιστοποίησης: η βέλ-

τιστη ρύθμιση των ελέγχων TAR για αύξηση της μεταφερόμενης κίνησης παρουσία ανωμαλιών σε ένα τηλεπικοινωνιακό δίκτυο. Τα πλεονεκτήματα της εφαρμογής του γενετικού αλγορίθμου σε αυτό το πρόβλημα είναι τα ακόλουθα:

- Πρώτον, ένας γενετικός αλγόριθμος παρέχει λύση για την ανάθεση χωρητικότητας από την άποψη επιπέδου δικτύου, επειδή όλες οι ροές της κίνησης και οι υπόλοιπες χωρητικότητες μπορούν να συμπεριληφθούν στον αλγόριθμο ταυτόχρονα.
- Δεύτερον, στα συστήματα NTM υπάρχει μια σύντομη περίοδος επιτήρησης (συνήθως, πέντε λεπτά) για να επεξεργαστούμε τις μετρήσεις κίνησης και να δραστηριοποιηθούμε στο δίκτυο. Η δυναμική ενός γενετικού αλγορίθμου, με μια προοδευτική προσέγγιση στη λύση, διασφαλίζει μια καλή λύση εντός της περιόδου επιτήρησης, ακόμη και αν δεν έχει φτάσει στην άριστη λύση.
- Τελικά, βρέθηκε μια αντικειμενική συνάρτηση για τον γενετικό αλγόριθμο. Η συνάρτηση αυτή είναι εύκολη στο να υπολογιστεί και πολύ κατάλληλη για το πρόβλημα, η οποία ξεπερνά τη δυσκολία να υπολογιστούν οι απώλειες του δικτύου αριθμητικά. Αυτή η λειτουργία κάνει τον αλγόριθμο γρήγορο και ακριβή.

Μέρος ΙΙ
Παραρτήματα

Παράρτημα Α'

Θεωρητικές Ασκήσεις

1. Ένα σήμα διακριτού χρόνου $\{x(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ είναι περιοδικό αν υπάρχει $N \neq 0$ τέτοιο ώστε $x(n + N) = x(n)$ για κάθε n . Εξετάστε αν το σήμα $x(n) = e^{-i\omega n}$ είναι περιοδικό.

2. Για τα επόμενα σήματα συνεχούς χρόνου, να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός Fourier

(α') e^{-i5t}

(β') $\cos(3t) + \sin(8t)$

(γ') $x(t) \begin{cases} e^{-3t}, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

3. Για τα επόμενα σήματα διακριτού χρόνου, να προσδιοριστεί ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier

(α') $x(n) = \cos \omega n, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

(β') $x(n) = \sin \omega n, n = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$

4. Θεωρήστε ένα σήμα $x(t), 0 < t < T$ με πεπερασμένη ενέργεια $\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$. Υποθέστε ότι θέλετε να το εκφράσετε ως

ένα ανάπτυγμα: $x(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-ik\omega t}, \omega = \frac{2\pi}{T}$, που εξαρτά-

ται από $2N + 1$ όρους a_k . Πώς πρέπει να επιλεγούν οι συντελεστές a_k , $k = -N, \dots, N$ ώστε το τετραγωνικό σφάλμα $\int_0^T \left| x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{-ik\omega t} \right|^2 dt$ να ελαχιστοποιείται; Με αυτή την επιλογή, τι θα συμβεί στο όριο $N \rightarrow \infty$;

5. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των επομένων σημάτων

$$(\alpha') e^{-a|t|} \cos \omega_0 t, a > 0$$

$$(\beta') e^{-a|t|} \sin \omega_0 t, a > 0.$$

6. Από τα επόμενα συστήματα με σήμα εισόδου $x(n)$ και σήμα εξόδου $y(n)$, ποια είναι χρονικά αναλλοίωτα, αιτιατά και γραμμικά

$$(\alpha') y(n) = x(n-1) \cdot x(n-2)$$

$$(\beta') y(n) = x(-n)$$

$$(\gamma') y(n) = x(2n)$$

$$(\delta') y(n) + 3n \cdot y(n-1) + 2y(n-2) = 6x(n), \text{ με αρχικές συνθήκες } y(-2) = y(-1) = 0.$$

7. Ένα Γ.Χ.Α σύστημα με κρουστική απόκριση:

$$h(n) = \begin{cases} ka^n, n = 0, 1, \dots \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

δέχεται ως σήμα εισόδου το σήμα

$$u(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq N \\ 0, \text{ αλλιώς.} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί το σήμα εξόδου.

8. Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) dt$$

όπου $x(n)$ και $y(n)$ είναι τα σήματα εισόδου και εξόδου, αντίστοιχα.

9. Να βρεθεί η χροστική απόκριση και η αρμονική απόκριση του συστήματος Volterra διακριτού χρόνου

$$y(n) = 2 \cdot x(n-1) + x(n-2) + 3 \cdot x(n-1) \cdot x(n-3).$$

10. Αποδείξτε ότι το σύστημα $y(n) = f(x(n))$ είναι ευσταθές με την έννοια της φραγμένης εισόδου-εξόδου αν $f(\cdot)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

11. Αποδείξτε ότι το χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n, k) \cdot x(k)$$

είναι ευσταθές αν $\sup_{0 \leq k < \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n, k)| < \infty$.

12. Ένα σήμα συνεχούς χρόνου έχει διάρκεια 2 sec και μετασχηματισμό Fourier (φασματικό περιεχόμενο) που ουσιαστικά μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $[-50 \text{ kHz}, 50 \text{ kHz}]$.

α) Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός δειγμάτων που απαιτούνται για τη διακριτή αναπαράσταση του σήματος.

β) Είναι επιθυμητό να αναλύσουμε το φασματικό περιεχόμενο του σήματος χρησιμοποιώντας το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier με διακριτική ικανότητα $\Delta s = 0.001 \text{ Hz}$. Να περιγράψει η διαδικασία και να υπολογιστεί ο απαιτούμενος ελάχιστος αριθμός δειγμάτων που θα εισαχθεί σε ένα αλγόριθμο ταχέως μετασχηματισμού Fourier, ώστε να είναι δυνατή η φασματική ανάλυση με την επιθυμητή διακριτική ικανότητα.

13. Θεωρείστε ένα σύστημα απεικόνισης στο οποίο κατά τη διάρκεια της φωτογραφικής έκθεσης εμφανίζεται σχετική κίνηση ανάμεσα στη φωτογραφική μηχανή και το αντικείμενο το οποίο

φωτογραφίζεται. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείστε ότι η κίνηση είναι γραμμική με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του οριζόντιου άξονα. Στην περίπτωση αυτή, η μονοδιάστατη χροστική απόκριση του συστήματος απεικόνισης δίνεται από τη σχέση

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{cT}, & 0 \leq x \leq cT \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς έχει μέτρο $|\hat{K}(s)|$ που δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$|\hat{K}(s)| = \text{σταθερά} \times \left| \frac{\sin(cTs/2)}{cTs/2} \right|.$$

Αποφανθείτε (με πλήρη τεκμηρίωση) για το αν αύξηση της γραμμικής ταχύτητας c βελτιώνει ή δυσχεραίνει το φαινόμενο του θολώματος από γραμμική κίνηση. Για διευκόλυνσή σας, εξετάστε τη θέση του πρώτου μηδενισμού της συνάρτησης μεταφοράς (δηλ. την πρώτη λύση ως προς s της εξίσωσης $|\hat{K}(s)| = 0$) και την εξάρτησή του από την ταχύτητα c .

14. α) Δώστε 2 εναλλακτικούς τρόπους σχεδίασης ενός ψηφιακού συστήματος 8-PSK. Δηλαδή σχεδιάστε τα σήματα στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο των συχνοτήτων δίνοντας λεπτομερείς αλλά συνοπτικές επεξηγήσεις.
 - β) Ποια είναι η ελάχιστη απαιτούμενη χωρητικότητα του καναλιού μετάδοσης εάν κάθε σύμβολο έχει προέλθει από δειγματοληψία σήματος φωνής εύρους 16 kHz;
15. α) Πώς μπορείτε και ακούτε πολλούς και διαφορετικούς σταθμούς στο ραδιόφωνό σας; Ποια διαφορά υπάρχει με την ύπαρξη πολλών χρηστών ταυτόχρονα στο Διαδίκτυο;
 - β) Γιατί ενώ έχουμε τη διαμόρφωση DSB/SC, εξετάζουμε και την AM και την SSB και την VSB;

Παράρτημα Β΄

Το Προγραμματιστικό Περιβάλλον MATLAB

Β΄.1 Γενικά

Το MATLAB είναι ένα υπολογιστικό περιβάλλον για αριθμητικούς υπολογισμούς και οπτικοποίηση δεδομένων. Το MATLAB παρέχει αριθμητική ανάλυση, υπολογισμούς με πίνακες, επεξεργασία σήματος και εικόνας και γραφικά σε ένα εύχρηστο περιβάλλον στο οποίο προβλήματα και λύσεις εκφράζονται χωρίς παραδοσιακό προγραμματισμό, αλλά ακριβώς όπως διατυπώνονται με μαθηματικό τρόπο.

MATLAB σημαίνει **MA**Trix **LAB**oratory (Εργαστήριο Πινάκων) και αρχικά αναπτύχθηκε για να παρέχει εύκολη πρόσβαση σε λογισμικό πινάκων που είχε αναπτυχθεί στα πλαίσια των προγραμμάτων LINPACK και EISPACK.

Το MATLAB είναι ένα αλληλεπιδραστικό σύστημα στο οποίο το βασικό στοιχείο δεδομένων είναι ένας πίνακας που δεν απαιτεί προσδιορισμό των διαστάσεών του. Αυτό επιτρέπει την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων σε ένα κλάσμα του χρόνου που θα απαιτούσε ο προγραμματισμός σε μια γλώσσα όπως η FORTRAN, η BASIC, η C, κτλ.

Το MATLAB συμπληρώνεται από ένα σύνολο πακέτων εφαρ-

μογών που ονομάζονται **εργαλειοθήκες (toolboxes)**. Οι εργαλειοθήκες είναι πλήρεις συλλογές από συναρτήσεις MATLAB που επεκτείνουν το περιβάλλον του MATLAB έτσι ώστε να επιλύονται συγκεκριμένες κλάσεις προβλημάτων. Περιοχές για τις οποίες διατίθενται εργαλειοθήκες περιλαμβάνουν την επεξεργασία σήματος, το σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου, την προσομοίωση δυναμικών συστημάτων, την αναγνώριση συστημάτων, τα νευρωνικά δίκτυα, κτλ.

Το πιο σημαντικό χαρακτηριστικό του MATLAB είναι ίσως η επεκτασιμότητά του. Αυτό επιτρέπει στον κάθε χρήστη να συνεισφέρει τις δικές του εφαρμογές. Ως αποτέλεσμα, επιστήμονες, μαθηματικοί και μηχανικοί έχουν συνεισφέρει νέες και ενδιαφέρουσες εφαρμογές χωρίς να γράψουν ούτε μια γραμμή κώδικα σε γλώσσα χαμηλού επιπέδου.

Το σύστημα του MATLAB αποτελείται από πέντε κύρια μέρη:

1. **Τη γλώσσα MATLAB:** Αυτή είναι μία υψηλού επιπέδου γλώσσα μητρών/πινάκων που προσφέρει έλεγχο ροής δηλώσεων, συναρτήσεις, δομές δεδομένων, δομές εισόδου/εξόδου, και **αντικειμενοστρεφή (object-oriented)** χαρακτηριστικά προγραμματισμού. Επιτρέπει τόσο τη δημιουργία γρήγορων και “βρώμικων” προγραμμάτων (“**programming in the small**”), όσο και τη δημιουργία ολοκληρωμένων μεγάλων και πολυπλόκων προγραμματιστικών εφαρμογών (“**programming in the large**”).
2. **Το λειτουργικό περιβάλλον του MATLAB:** Αυτό είναι το σύνολο των εργαλείων και των διευκολύνσεων με το οποίο δουλεύει κανείς με το MATLAB ως χρήστης ή ως προγραμματιστής. Περιλαμβάνει διευκολύνσεις για τον έλεγχο των μεταβλητών στο χώρο εργασίας και την είσοδο και έξοδο δεδομένων. Επίσης, περιλαμβάνει εργαλεία για την εφαρμογή, έλεγχο, διόρθωση λαθών, και κατανομή των *M*-αρχείων.
3. **Το σύστημα γραφικών του MATLAB:** Αυτό είναι το γραφικό σύστημα του MATLAB. Περιλαμβάνει υψηλού επιπέδου

εντολές για διδιάστατη και τριδιάστατη απεικόνιση δεδομένων, επεξεργασία εικόνας, δημιουργία κινουμένων σχεδίων (animation) και παρουσίαση γραφικών. Επίσης, περιλαμβάνει χαμηλού επιπέδου εντολές που επιτρέπουν την κατασκευή και εμφάνιση γραφικών, αλλά και κατασκευή πλήρους διεπαφής προς το χρήστη (user interface).

4. **Τη βιβλιοθήκη μαθηματικών συναρτήσεων του MATLAB:** Αυτή είναι μια απέραντη συλλογή από υπολογιστικούς αλγορίθμους που ξεκινά από στοιχειώδεις συναρτήσεις όπως άθροισμα, ημίτονο, συνημίτονο, και πολύπλοκη αριθμητική, και φτάνει μέχρι πιο πολύπλοκες συναρτήσεις όπως μήτρες, αντίστροφες μήτρων, ιδιοτιμές μήτρας, συναρτήσεις Bessel, και μετασχηματισμούς Fourier.
5. **Τη διεπαφή προς προγράμματα εφαρμογών (Application Program Interface, API) του MATLAB:** Αυτή είναι μία βιβλιοθήκη που επιτρέπει να γραφούν προγράμματα σε C, Fortran κτλ. τα οποία αλληλεπιδρούν με το MATLAB. Επίσης, περιέχει διευκολύνσεις για δυναμική κλήση ρουτινών του MATLAB, για κλήση του MATLAB ως μιας υπολογιστικής μηχανής και για ανάγνωση και εγγραφή MAT-αρχείων.

Εκτός από τα προηγούμενα, ένα συνοδευτικό πρόγραμμα του MATLAB είναι το **Simulink**, ένα σύστημα που διευκολύνει την αλληλεπιδραστική προσομοίωση μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα, είναι ένα γραφικό πρόγραμμα – χρησιμοποιεί ποντίκι – που επιτρέπει τη μοντελοποίηση ενός συστήματος σχεδιάζοντας ένα διάγραμμα στην οθόνη και μεταβάλλοντάς το δυναμικά. Μπορεί να δουλέψει με γραμμικά, μη γραμμικά, συνεχούς χρόνου, διακριτού χρόνου, πολυμεταβλητά και πολυρυθμικά (multirate) συστήματα.

Β'.2 Ξεκινώντας με το MATLAB

Για να εκκινήσετε το MATLAB σε ένα γραφικό περιβάλλον, ενεργοποιείτε το εικονίδιο του MATLAB. Για να εκκινήσετε το MATLAB στο λειτουργικό σύστημα UNIX, πληκτρολογήστε matlab στην προτροπή του λειτουργικού συστήματος. Για να κλείσετε το MATLAB οποιαδήποτε στιγμή, γράψτε quit στην προτροπή του MATLAB. Εάν νιώθετε ότι χρειάζεστε περισσότερη βοήθεια, πληκτρολογήστε help στην προτροπή του MATLAB. Εναλλακτικά, διατίθεται και βοήθεια εντός γραμμής (on line) μέσω κειμένων.

Β'.2.1 Μήτρες και μαγικά τετράγωνα

Ο καλύτερος τρόπος για να ξεκινήσετε με το MATLAB είναι να μάθετε πώς να χειρίζεστε πίνακες. Αυτή η ενότητα θα σας δείξει πώς να το κάνετε αυτό. Στο MATLAB, ένας πίνακας είναι μια τετραγωνική διάταξη αριθμών. Μερικές φορές δίνουμε ειδική σημασία στους 1×1 πίνακες, που είναι βαθμωτά μεγέθη, και στους πίνακες γραμμής ή στήλης, που είναι διανύσματα. Το MATLAB έχει και άλλους τρόπους να αποθηκεύει τόσο αριθμητικά όσο και μη αριθμητικά δεδομένα, αλλά αρχικά είναι καλύτερα να σκεπτόμαστε τα πάντα ως πίνακες. Οι λειτουργίες του είναι σχεδιασμένες να είναι όσο τον δυνατόν πιο φυσικές. Εκεί που οι άλλες γλώσσες προγραμματισμού δουλεύουν με έναν αριθμό τη φορά, το MATLAB σας επιτρέπει να δουλεύετε με ολόκληρους πίνακες γρήγορα και εύκολα.

Μπορείτε να εισάγετε πίνακες στο MATLAB με διάφορους τρόπους:

1. Εισάγοντας μία λίστα στοιχείων.
2. Φορτώνοντας πίνακες από εξωτερικά αρχεία δεδομένων.
3. Παράγοντας πίνακες χρησιμοποιώντας συναρτήσεις του MATLAB.

4. Δημιουργώντας πίνακες με δικές σας συναρτήσεις αποθηκευμένες σε M-αρχεία.

Αρχίστε εισάγοντας τον πίνακα του Dürer ως λίστα των στοιχείων του. Αρκεί απλά να ακολουθήσετε μερικούς βασικούς κανόνες:

1. Χωρίστε τα στοιχεία κάθε γραμμής με κενά ή κόμμα.
2. Χρησιμοποιήστε το ελληνικό ερωτηματικό, ; , για να δηλώσετε το τέλος κάθε γραμμής.
3. Τοποθετήστε όλη την λίστα σε αγκύλες, [].

Για να εισάγαγετε τον πίνακα του Dürer, απλά γράψτε:

$$\mathbf{A} = [16 \ 3 \ 2 \ 13; \ 5 \ 10 \ 11 \ 8; \ 9 \ 6 \ 7 \ 12; \ 4 \ 15 \ 14 \ 1].$$

Το MATLAB προβάλλει τη μήτρα που μόλις εισάγατε, δηλαδή

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

sum, transpose, and diag

Πιθανόν να γνωρίζετε ήδη ότι οι ξεχωριστές ιδιότητες ενός μαγικού τετραγώνου έχουν σχέση με τους διάφορους τρόπους με τους οποίους αθροίζουμε τα στοιχεία του. Το άθροισμα οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης, καθώς και των δύο κυρίων διαγωνίων του, είναι πάντα ο ίδιος αριθμός. Ας το εξακριβώσουμε αυτό χρησιμοποιώντας το MATLAB. Η πρώτη συνάρτηση που θα δοκιμάσουμε είναι **sum(A)**. Το MATLAB απαντάει με το

```
ans =
    34 34 34 34
```

Όταν δεν καθορίζετε μια μεταβλητή εξόδου, το MATLAB χρησιμοποιεί την μεταβλητή `ans`, συντομογραφία του `answer`, για να αποθηκεύσει το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού. Έχετε υπολογίσει ένα διάνυσμα που περιέχει τα αθροίσματα των στηλών του A . Φυσικά, κάθε στήλη έχει το ίδιο άθροισμα (το μαγικό άθροισμα) 34.

Όσον αφορά στα αθροίσματα των γραμμών, το MATLAB προτιμάει να δουλεύει με τις στήλες ενός πίνακα. Έτσι ο ευκολότερος τρόπος για να πάρετε τα αθροίσματα των γραμμών είναι να αντιμετωπίσετε τις γραμμές του πίνακα με τις στήλες, να υπολογίσετε τα αθροίσματα των νέων στηλών και μετά να αντιμετωπίσετε το αποτέλεσμα. Η πράξη της αντιμετάθεσης δηλώνεται με μία απόστροφο, `'`, η οποία περιστρέφει έναν πίνακα γύρω από την κύρια διαγώνιό του και μετατρέπει έναν πίνακα-γραμμή σε έναν πίνακα-στήλη. Έτσι το A' παράγει

```
ans =
    16    5    9    4
     3   10    6   15
     2   11    7   14
    13    8   12    1
```

και το `sum(A')` παράγει έναν πίνακα-στήλη ο οποίος περιέχει τα αθροίσματα των γραμμών

```
ans =
    34
    34
    34
    34
```

Εύκολα βρίσκουμε το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγώνιου με τη βοήθεια της συνάρτησης `diag` η οποία τα ξεχωρίζει από

τον πίνακα. Έτσι το **diag(A)** παράγει

```
ans =
    16
    10
     7
     1
```

ενώ **sum(diag(A))** παράγει

```
ans =
    34
```

Η άλλη διαγώνιος, η αντιδιαγώνιος, δεν είναι πολύ σημαντική μαθηματικά και έτσι το MATLAB δεν έχει κάποια έτοιμη συνάρτηση γι' αυτή. Υπάρχει όμως μία συνάρτηση **fliplr**, αρχικά προοριζόμενη για χρήση στα γραφικά, η οποία “περιστρέφει” έναν πίνακα γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα. Συγκεκριμένα, η εντολή **sum(diag(fliplr(A)))** επιστρέφει

```
ans =
    34
```

Μέχρι εδώ, έχουμε δει ότι ο πίνακας στη ξυλογραφία του Dürer είναι πράγματι ένα μαγικό τετράγωνο. Στη συνέχεια, δοκιμάσαμε μερικές από τις συναρτήσεις πινάκων που προσφέρει το MATLAB. Η επόμενη ενότητα συνεχίζει να χρησιμοποιεί τους πίνακες για να δείξει μερικές ακόμα δυνατότητες του MATLAB.

B'.2.2 Δείκτες

Μπορούμε να αναφερθούμε στο στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή i και στη στήλη j του πίνακα A με $A(i, j)$. Για παράδειγμα, το στοιχείο $A(4, 2)$ είναι ο αριθμός στην τέταρτη γραμμή και στην δεύτερη στήλη. Στο μαγικό τετράγωνο ο $A(4, 2)$ είναι το 15. Έτσι είναι δυνατό να υπολογιστεί το άθροισμα της τέταρτης στήλης γράφοντας

$$A(1,4) + A(2,4) + A(3,4) + A(4,4).$$

Αυτό μας δίνει

```
ans =
    34
```

αλλά δεν είναι ο πιο κομψός τρόπος για να βρούμε το άθροισμα μίας στήλης.

Είναι επίσης δυνατό να αναφερθούμε στα στοιχεία ενός πίνακα με ένα μόνο δείκτη ως $A(k)$. Αυτός είναι ο συνήθης τρόπος με τον οποίο αναφερόμαστε σε πίνακες γραμμής και στήλης. Μπορούμε όμως να τον εφαρμόσουμε και σε διδιάστατους πίνακες, όπου θεωρούμε ένα διάνυσμα σαν ένα πίνακα στήλης με στοιχεία τις γραμμές του αρχικού πίνακα. Έτσι στο μαγικό τετράγωνο, το $A(8)$ είναι άλλος ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να αναφερθούμε στην τιμή 15 που είναι αποθηκευμένη στο $A(4, 2)$.

Εάν προσπαθήσετε να χρησιμοποιήσετε την τιμή ενός στοιχείου εκτός της μήτρας, αυτό είναι λάθος. Πραγματικά, το

```
t = A(4, 5)
```

υπερβαίνει τις διαστάσεις του πίνακα.

Από την άλλη πλευρά, εάν αποθηκεύσετε μία τιμή σε ένα στοιχείο εκτός των διαστάσεων του πίνακα αυτός θα διευρυνθεί για να συμπεριλάβει το νέο στοιχείο. Για παράδειγμα

```
X = A;
X(4, 5) = 17
X =
```

```

16  3  2  13  0
 5 10 11  8  0
 9  6  7 12  0
 4 15 14  1 17

```

Ο τελεστής άνω και κάτω τελεία

Η άνω και κάτω τελεία, `:`, είναι ένας από τους πιο σημαντικούς τελεστές στο MATLAB. Την συναντάμε σε πολλές διαφορετικές περιπτώσεις. Η έκφραση

```
1:10
```

είναι ένας πίνακας γραμμής που περιέχει τους ακέραιους από 1 ως 10, δηλαδή

```
1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

Μπορείτε επίσης να καθορίσετε το διάστημα κατά το οποίο θα διαφέρουν οι αριθμοί. Για παράδειγμα το

```
100:-7:50
```

δίνει

```
100  93  86  79  72  65  58  51
```

ενώ το

```
0:pi/4:pi
```

δίνει

```
0    0.7854    1.5708    2.3562    3.1416
```

Οι εκφράσεις δεικτών που χρησιμοποιούν άνω και κάτω τελεία αναφέρονται σε τμήματα ενός πίνακα. Η έκφραση $A(1 : k, j)$ αναφέρεται στα πρώτα k στοιχεία της στήλης j του πίνακα A . Έτσι με `sum(A(1:4,4))` υπολογίζεται το άθροισμα της τέταρτης στήλης. Υπάρχει όμως και ένας καλύτερος τρόπος. Η άνω και κάτω τελεία μόνη της αναφέρεται στα στοιχεία μίας γραμμής ή στήλης ενός πίνακα και η λέξη-κλειδί `end` αναφέρεται στην τελευταία γραμμή ή στήλη. Έτσι το `sum(A(:,end))` υπολογίζει το άθροισμα των στοιχείων της τελευταίας στήλης του A :

```
ans =
    34
```

Γιατί το μαγικό άθροισμα ενός 4 επί 4 πίνακα είναι 34; Εάν χωρίσουμε τους ακέραιους από το 1 ως το 16 σε τέσσερις ομάδες με ίσο άθροισμα, αυτό το άθροισμα θα είναι

```
sum(1:16)/4
```

το οποίο, φυσικά, είναι

```
ans =
    34
```

B'.2.3 Η συνάρτηση `magic`

Το MATLAB έχει μία ενσωματωμένη συνάρτηση η οποία δημιουργεί μαγικά τετράγωνα σχεδόν κάθε μεγέθους. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται –πώς αλλιώς– `magic`. Για παράδειγμα, η έκφραση `B = magic(4)` δίνει

```
B =
```

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Ο πίνακας αυτός είναι σχεδόν ο ίδιος με εκείνον στη ξυλογραφία του Dürer και έχει όλες τις “μαγικές” ιδιότητες. Η μόνη διαφορά τους είναι ότι οι δύο μεσαίες στήλες είναι η μία στην θέση της άλλης. Για να μετατρέψουμε τον B στον πίνακα A του Dürer, ανταλλάσσουμε τις δύο μεσαίες στήλες, δηλαδή γράφουμε $A = B(:, [1\ 3\ 2\ 4])$. Αυτό σημαίνει “για κάθε μία από τις γραμμές του πίνακα B , αναδιατάξε τα στοιχεία με την σειρά 1,3,2,4”. Έτσι παίρνουμε

$A =$

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Γιατί ο Dürer να έμπαινε στον κόπο να αναδιατάξει τις στήλες όταν θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει τις υπηρεσίες του MATLAB; Χωρίς αμφιβολία, επειδή ήθελε να συμπεριλάβει την ημερομηνία της ξυλογραφίας, 1514, στον πάτο του μαγικού τετραγώνου.

B'.3 Εκφράσεις

Όπως και οι περισσότερες προγραμματιστικές γλώσσες, το MATLAB παρέχει μαθηματικές εκφράσεις. Σε αντίθεση, όμως, με τις γλώσσες αυτές, οι εκφράσεις περιλαμβάνουν ολόκληρους πίνακες. Τα δομικά στοιχεία των εκφράσεων είναι: Μεταβλητές, Αριθμοί, Τελεστές και Συναρτήσεις.

Β'.3.1 Μεταβλητές

Το MATLAB δεν χρησιμοποιεί δηλώσεις κανενός είδους ούτε δηλώσεις διαστάσεων. Όταν το MATLAB συναντάει ένα καινούργιο όνομα μεταβλητής, αυτόματα δημιουργεί τη μεταβλητή και δεσμεύει τον απαραίτητο χώρο στην μνήμη. Εάν η μεταβλητή υπάρχει ήδη, τότε αλλάζει τα περιεχόμενά της και, αν χρειαστεί, δεσμεύει νέο χώρο στην μνήμη. Για παράδειγμα το `num_students = 25` δημιουργεί μία 1- \times -1 μήτρα με το όνομα `num_students` και τοποθετεί την τιμή 25 στο μοναδικό στοιχείο της.

Τα ονόματα των μεταβλητών αποτελούνται από ένα γράμμα, ακολουθούμενο από οποιοδήποτε αριθμό γραμμάτων, ψηφίων και κάτω παυλών. Το MATLAB χρησιμοποιεί μόνο τους 31 πρώτους χαρακτήρες του ονόματος μίας μεταβλητής. Το MATLAB διαχωρίζει τα μικρά γράμματα από τα κεφαλαία. Το A και το a δεν είναι το ίδιο. Για να δείτε τον πίνακα που έχει ανατεθεί σε μία μεταβλητή, απλά τυπώστε το όνομα της μεταβλητής.

Β'.3.2 Αριθμοί

Το MATLAB χρησιμοποιεί τον συμβατικό τρόπο δήλωσης δεκαδικών αριθμών, με προαιρετική μια τελεία για το δεκαδικό μέρος και πρόσημο συν ή πλην στην αρχή. Η επιστημονική δήλωση αριθμών γίνεται με το e ακολουθούμενο από τον παράγοντα μίας δύναμης του 10. Οι φανταστικοί αριθμοί χρησιμοποιούν είτε το i είτε το j σαν πρόθεμα. Παραδείγματα σωστών αριθμών είναι τα επόμενα:

3	-99	0.0001
9.6397238	1.60210e-20	6.02252e23
1i	-3.14159j	3e5i

Όλοι οι αριθμοί αποθηκεύονται εσωτερικά χρησιμοποιώντας τη μακριά διαμόρφωση όπως αυτή ορίζεται από το πρότυπο αριθμών μεταβλητής υποδιαστολής *IEEE*. Οι αριθμοί κινητής υποδιαστολής έχουν μία πεπερασμένη ακρίβεια περίπου 16 σημαντικών δεκαδικών

ψηφίων και μία πεπερασμένη ακτίνα περίπου από το 10^{-308} ως το 10^{+308} . (Ο υπολογιστής VAX χρησιμοποιεί διαφορετική διαμόρφωση για τους αριθμούς κινητής υποδιαστολής, αλλά η ακρίβεια και το διάστημα τιμών είναι περίπου ίδια.)

Load

Η εντολή `load` διαβάζει δυαδικά αρχεία που περιέχουν πίνακες δημιουργημένους προηγουμένως από το MATLAB ή διαβάζει αρχεία κειμένου (ASCII) τα οποία περιέχουν αριθμητικά δεδομένα. Το αρχείο κειμένου θα πρέπει να είναι οργανωμένο ως πίνακας αριθμών διαχωρισμένων με κενά, με μία γραμμή της μήτρας για κάθε γραμμή κειμένου και ίσο αριθμό στοιχείων σε κάθε γραμμή. Για παράδειγμα, δημιουργείστε, εκτός MATLAB, ένα αρχείο κειμένου που να περιέχει τις εξής τέσσερις σειρές:

```
16.0  3.0  2.0  13.0
 5.0  10.0  11.0  8.0
 9.0  6.0  7.0  12.0
 4.0  15.0  14.0  1.0
```

Αποθηκεύστε το αρχείο με το όνομα `magik.dat`. Τότε η εντολή `load magik.dat` διαβάζει το αρχείο και δημιουργεί μία μεταβλητή, τη `magik`, η οποία περιέχει τον προηγούμενο πίνακα.

M-Αρχεία

Μπορείτε να δημιουργείτε δικούς σας πίνακες χρησιμοποιώντας M-αρχεία, τα οποία είναι αρχεία κειμένου που περιέχουν κώδικα MATLAB. Απλά δημιουργείστε ένα αρχείο κειμένου το οποίο θα περιέχει τις ίδιες εντολές που θα χρησιμοποιούσατε στην γραμμή εντολής του MATLAB. Αποθηκεύστε το αρχείο δίνοντας στο όνομά του την επέκταση `.m`. Για παράδειγμα, δημιουργείστε ένα αρχείο που να περιέχει τις εξής πέντε γραμμές

```
A = [ ...
```

```

16.0   3.0   2.0  13.0
   5.0  10.0  11.0   8.0
   9.0   6.0   7.0  12.0
   4.0  15.0  14.0   1.0;

```

και αποθηκεύστε το αρχείο με το όνομα `magik.m`. Τότε η εντολή **magik** διαβάζει το αρχείο και δημιουργεί μια μεταβλητή, *A*, η οποία περιέχει το παράδειγμά μας.

Συνένωση

Συνένωση είναι η διαδικασία με την οποία ενώνουμε μικρούς πίνακες για να δημιουργήσουμε μεγαλύτερους. Στην πραγματικότητα δημιουργήσατε την πρώτη σας μήτρα συνενώνοντας ξεχωριστά της στοιχεία. Το ζευγάρι αγκυλών, `[]`, είναι ο τελεστής της συνένωσης. Για παράδειγμα ξεκινήστε με το 4×4 μαγικό τετράγωνο και πληκτρολογήστε $\mathbf{B} = [\mathbf{A} \ \mathbf{A}+32 ; \ \mathbf{A}+48 \ \mathbf{A}+16]$. Αυτό θα δώσει ένα 8×8 πίνακα, ο οποίος προήλθε από τους τέσσερις πίνακες

$\mathbf{B} = [\dots$

```

16   3   2  13  48  35  34  45
  5  10  11   8  37  42  43  40
  9   6   7  12  41  38  39  44
  4  15  14   1  36  47  46  33
64  51  50  61  32  19  18  29
53  58  59  56  21  26  27  24
57  54  55  60  25  22  23  28
52  63  62  49  20  31  30  17

```

Ο πίνακας αυτός είναι σχεδόν ένα μαγικό τετράγωνο. Τα στοιχεία είναι μία ανακατάταξη των ακεραίων 1:64. Το άθροισμα κάθε στήλης έχει την σωστή τιμή για ένα 8×8 μαγικό τετράγωνο.

Η εντολή **sum(B)** δίνει

```

ans =
260   260   260   260   260   260   260   260

```

αλλά τα αθροίσματα των σειρών της μήτρας B, $\text{sum}(B')$, δεν είναι όλα τα ίδια. Χρειάζεται περισσότερη επεξεργασία για να κάνουμε τον πίνακα ένα έγκυρο 8×8 μαγικό τετράγωνο.

Διαγραφή γραμμών και στηλών

Μπορείτε διαγράψετε γραμμές και στήλες από ένα πίνακα χρησιμοποιώντας απλώς ένα ζευγάρι αγκύλες. Ξεκινήστε με το $\mathbf{X} = \mathbf{A}$; Στην συνέχεια, για να διαγράψετε την δεύτερη στήλη του X, χρησιμοποιήστε $\mathbf{X}(:,2) = []$. Αυτό μετατρέπει το X σε

```
X =
    16     2    13
     5    11     8
     9     7    12
     4    14     1
```

Εάν διαγράψετε ένα μόνο στοιχείο από μία μήτρα, το αποτέλεσμα δεν είναι μήτρα πια. Έτσι εκφράσεις όπως $\mathbf{X}(1,2) = []$ θα οδηγήσουν σε ένα λάθος. Πάντως, χρησιμοποιώντας ένα δείκτη, διαγράφουμε ένα στοιχείο ή μια ακολουθία στοιχείων και διαμορφώνουμε τα υπόλοιπα στοιχεία σε ένα διάνυσμα γραμμής. Έτσι το $\mathbf{X}(2:2:10) = []$ έχει ως αποτέλεσμα

```
X=
    16     9     2     7    13    12     1
```

B'.3.3 Τελεστές

Αριθμητικοί Τελεστές +, -, *, /, \, ^, '

+ Πρόσθεση: $A + B$ προσθέτει τους πίνακες A και B. Οι πίνακες A και B πρέπει να είναι των ιδίων διαστάσεων, εκτός αν ο ένας είναι βαθμωτό μέγεθος. Ένα βαθμωτό μέγεθος μπορεί να προστεθεί σε πίνακα οποιωνδήποτε διαστάσεων.

- **Αφαίρεση:** $A - B$ αφαιρεί τον πίνακα B από τον πίνακα A . Οι πίνακες A και B πρέπει να είναι των ιδίων διαστάσεων, εκτός αν ο ένας είναι βαθμωτό μέγεθος. Ένα βαθμωτό μέγεθος μπορεί να αφαιρεθεί από πίνακα οποιωνδήποτε διαστάσεων.
- * **Πολλαπλασιασμός:** $A * B$ είναι το γραμμικό αλγεβρικό γινόμενο των πινάκων A και B . Ο αριθμός των στηλών του A πρέπει να ισούται με τον αριθμό των γραμμών του B , εκτός αν ο ένας είναι βαθμωτό μέγεθος. Ένα βαθμωτό μέγεθος μπορεί να πολλαπλασιάσει πίνακα οποιωνδήποτε διαστάσεων.
- .* **Διατεταγμένος πολλαπλασιασμός:** $A .* B$ είναι το στοιχείο προς στοιχείο γινόμενο των πινάκων A και B . Οι πίνακες A και B πρέπει να είναι των ιδίων διαστάσεων, εκτός αν ο ένας είναι βαθμωτό μέγεθος.
- \ **Αριστερή διαίρεση πινάκων:** Αν A είναι τετραγωνικός πίνακας, $A \setminus B$ είναι σε γενικές γραμμές το ίδιο με $\text{inv}(A) * B$. Αν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και B μια στήλη, τότε $A \setminus B$ είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων του συστήματος γραμμικών εξισώσεων $AX = B$.
- .\ **Διατεταγμένη αριστερή διαίρεση πινάκων:** $A .\ B$ είναι ο πίνακας με στοιχεία $B(i,j)/A(i,j)$. Οι πίνακες A και B πρέπει να είναι των ιδίων διαστάσεων, εκτός αν ο ένας είναι βαθμωτό μέγεθος.
- / **Δεξιά διαίρεση πινάκων:** $B/A = (A' \setminus B')$.
- ./ **Διατεταγμένη δεξιά διαίρεση πινάκων:** $A ./ B$ είναι ο πίνακας με στοιχεία $A(i,j)/B(i,j)$. Οι πίνακες A και B πρέπει να είναι των ιδίων διαστάσεων, εκτός αν ο ένας είναι βαθμωτό μέγεθος.
- ^ **Υψωση σε δύναμη:** X^p είναι ο πίνακας X στην p -οστή δύναμη, αν p είναι βαθμωτό μέγεθος. Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιούνται ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα για τον υπολογισμό.

Αν x είναι βαθμωτό μέγεθος και P ένας πίνακας, το $x^{\wedge}P$ υπολογίζεται με χρήση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων. Η έκφραση $X^{\wedge}P$, όπου X και P είναι πίνακες, είναι λάθος.

- (\wedge) **Διατεταγμένη ύψωση σε δύναμη:** $A.^{\wedge}B$ είναι ο πίνακας με στοιχεία $A(i,j)$ στη δύναμη $B(i,j)$. Οι πίνακες A και B πρέπει να είναι των ίδιων διαστάσεων, εκτός αν ο ένας είναι βαθμωτό μέγεθος.
- ($'$) **Ανάστροφος πίνακας:** A' είναι ο αλγεβρικός ανάστροφος του A . Για πίνακες με μιγαδικά στοιχεία υπολογίζεται ο μιγαδικός συζυγής.
- (\cdot') **Διατεταγμένος ανάστροφος:** $A.\cdot'$ είναι ο αλγεβρικός ανάστροφος του A . Για πίνακες με μιγαδικά στοιχεία δεν υπολογίζεται ο μιγαδικός συζυγής.

Τελεστές Συσχέτισης

< > <= >= == ~==

Λογικοί Τελεστές

& | ~

Ειδικοί Χαρακτήρες

[] () = ' . ; % !

B'.4 Το παράθυρο εντολών

Ως τώρα, έχετε χρησιμοποιήσει την γραμμή εντολών του MATLAB, γράφοντας εντολές και εκφράσεις, και βλέποντας τα αποτελέσματα

να εμφανίζονται στο παράθυρο εντολών. Αυτή η ενότητα περιγράφει μερικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να αλλάξουμε την εμφάνιση του παραθύρου εντολών. Εάν το σύστημα σας σας επιτρέπει να επιλέξετε τη γραμματοσειρά του παραθύρου εντολών, σας συμβουλεύουμε να χρησιμοποιήσετε μία σταθερού πλάτους, όπως η Fixedsys ή Courier, ώστε να υπάρχουν κατάλληλα διαστήματα.

B'.4.1 Η εντολή format

Η εντολή format καθορίζει τον τρόπο με το οποίο εμφανίζονται οι αριθμητικές τιμές στο MATLAB. Η εντολή επηρεάζει μόνο τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται οι αριθμοί και όχι τον τρόπο με τον οποίο το MATLAB κάνει τους υπολογισμούς ή τους αποθηκεύει. Εδώ παρατίθενται οι διάφορες μορφοποιήσεις καθώς και το αποτέλεσμα που παράγεται από ένα πίνακα x.

```
x = [ 4/3 1.2345e-6];
```

```
format short
```

```
1.3333    0.0000
```

```
format short e
```

```
1.3333e+000    1.2345e-006
```

```
format short g
```

```
1.3333    1.2345e-006
```

```
format long
```

```
1.3333333333333333    0.00000123450000
```

```
format long e
```

```
1.3333333333333333e+000    1.2345000000000000e-006
```

```
format long g
```

```
1.3333333333333333    1.2345e-006
```

```
format bank
```

```
1.33 0.00
```

```
format rat
```

```
4/3    1/810045
```

```
format hex
```

```
3ff5555555555555    3eb4b6231abfd271
```

Εάν το μεγαλύτερο στοιχείο μίας μήτρας είναι μεγαλύτερο από 10^3 ή μικρότερο από 10^{-3} , το MATLAB χρησιμοποιεί κοινή κλίμακα για τις διαμορφώσεις `short` και `long`. Μαζί με τις προηγούμενες εντολές διαμόρφωσης, η

```
format compact
```

δεν εμφανίζει πολλές από τις κενές γραμμές που εμφανίζονται αλλιώς. Αυτό σας επιτρέπει να βλέπετε περισσότερες πληροφορίες σε μία οθόνη ή ένα παράθυρο. Εάν θέλετε πλήρη έλεγχο στην μορφή της εξόδου, χρησιμοποιήστε τις συναρτήσεις `sprintf` και `fprintf`.

Β'.4.2 Καταπίεση της εξόδου

Εάν απλώς τυπώσετε μία εντολή ή έκφραση και πατήσετε το Enter, το MATLAB αυτόματα παρουσιάζει το αποτέλεσμα στην οθόνη. Εάν όμως τελειώσετε την γραμμή με ένα ελληνικό ερωτηματικό (;), το MATLAB κάνει τους υπολογισμούς αλλά δεν παρουσιάζει το αποτέλεσμα. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν δημιουργείτε μεγάλους πίνακες, πχ. `A = magic(100)`.

Β'.4.3 Μακροσκελείς εκφράσεις

Εάν μία έκφραση δεν χωράει σε μία γραμμή, χρησιμοποιήστε τρεις τελείες, ..., ακολουθούμενες από το Return ή το Enter για να δείξετε ότι η έκφραση συνεχίζεται στην επόμενη γραμμή. Για παράδειγμα

```
s= 1 -1/2 + 1/3 -1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 ...
    - 1/8 + 1/9 - 1/10 + 1/11 - 1/12 ;
```

Τα κενά γύρω από τα =, +, - είναι προαιρετικά, αλλά κάνουν πιο ευανάγνωστο το κείμενο.

Β'.4.4 Δουλεύοντας στην γραμμή εντολών

Τα διάφορα βέλη και πλήκτρα ελέγχου στο πληκτρολόγιο σας επιτρέπουν να ανακαλέσετε, να επεξεργαστείτε και να ξαναχρησιμοποιήσετε εντολές που τυπώσατε προηγουμένως. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι γράψατε κατά λάθος την εντολή `rho = (1 + sqrt(5))/2.`, όπου εμφανίζεται εσφαλμένα η συνάρτηση `sqrt`. Το MATLAB απαντάει με:

```
Undefined function or variable 'sqrt'
```

δηλαδή, μη καθορισμένη συνάρτηση ή μεταβλητή 'sqrt'.

Αντί να ξαναγράψετε ολόκληρη την εντολή, απλώς πατήστε το άνω βέλος. Η λανθασμένη εντολή θα εμφανιστεί πάλι. Χρησιμο-

ποιήστε το αριστερό βέλος για να μετακινήσετε την προτροπή και συμπληρώστε το r. Το άνω βέλος καλεί προηγούμενες εκφράσεις. Αν τυπώσετε μερικούς χαρακτήρες μόνο, τότε το άνω βέλος βρίσκει τις εντολές που ξεκινούν με αυτούς τους χαρακτήρες.

Η λίστα των διαθέσιμων πλήκτρων διαφέρει σε διαφορετικούς υπολογιστές. Πειραματιστείτε για να δείτε ποια από τα επόμενα πλήκτρα είναι διαθέσιμα στον υπολογιστή σας.

Ανω βέλος	Ctrl + p	Ανάκληση προηγούμενης εντολής
Κάτω βέλος	Ctrl + n	Ανάκληση επόμενης εντολής
Αριστερό βέλος	Ctrl + b	Ενα χαρακτήρα μπροστά
Δεξιό βέλος	Ctrl + f	Ενα χαρακτήρα πίσω
Ctrl + αριστερό βέλος	Ctrl + r	Μία λέξη μπροστά
Ctrl + δεξιό βέλος	Ctrl + l	Μία λέξη πίσω
Home	Ctrl + a	Κίνηση στην αρχή της γραμμής
End	Ctrl + e	Κίνηση στο τέλος της γραμμής
Esc	Ctrl + u	Καθαρίζει την γραμμή
Del	Ctrl + d	Διαγραφή του χαρακτήρα στην προτροπή
Backspace	Ctrl + h	Διαγραφή του χαρακτήρα πριν από την προτροπή
	Ctrl + k	Διαγραφή ως το τέλος της γραμμής

B'.5 Γραφικά

Το MATLAB έχει εκτενείς δυνατότητες για την αναπαράσταση διανυσμάτων και πινάκων με μορφή γραφικών παραστάσεων, όπως επίσης και για την προσθήκη υποσημειώσεων σε αυτά καθώς και για την εκτύπωσή τους. Αυτή η ενότητα περιγράφει μερικές από τις πιο σημαντικές συναρτήσεις γραφικών και παραθέτει παραδείγματα κάποιων τυπικών εφαρμογών.

Β'.5.1 Κατασκευή ενός σχεδιαγράμματος

Η συνάρτηση `plot` εμφανίζεται με διαφορετικές μορφές ανάλογα με τις εισαγόμενες παραμέτρους. Εάν y είναι ένα διάνυσμα τότε η `plot(y)` παράγει ένα τμηματικά γραμμικό γράφημα των στοιχείων του y ως προς τον δείκτη του y . Εάν δώσετε δύο διανύσματα ως παραμέτρους, η `plot(x,y)` παράγει ένα γράφημα του y ως συνάρτησης του x .

Για παράδειγμα, για να σχεδιάσετε τις τιμές της συνάρτησης \sin από το 0 έως το 2π , χρησιμοποιείτε τα ακόλουθα:

```
t = 0:pi/100:2*pi;
y = sin(t);
plot(t,y)
y2 = sin(t-.25);
y3 = sin(t-.5);
plot(t,y,t,y2,t,y3)
```

Είναι δυνατό να προσδιορίσουμε το χρώμα, την ποιότητα της γραμμής και σύμβολα σήμανσης όπως κύκλους με την εντολή

```
plot(x , y , 'color_style_marker')
```

Το `color_style_marker` είναι μία συμβολοσειρά από έναν, δύο ή τρεις χαρακτήρες (οι οποίοι παρατίθενται με απλά εισαγωγικά) που κατασκευάζεται από ένα χρώμα, ένα στυλ γραμμής και ένα τύπο σημείου σήμανσης. Οι συμβολοσειρές χρώματος είναι 'c', 'm', 'y', 'r', 'g', 'b', 'w' και 'k'. Αυτές αντιστοιχούν στα χρώματα κυανό, κίτρινο, κόκκινο, πράσινο, άσπρο και μαύρο. Οι συμβολοσειρές ποιότητας γραμμής είναι '-' για συμπαγή γραμμή, '-.' για διακεκομμένη γραμμή, ':' για γραμμή από τέλειες, '-.' για γραμμή από παύλα-τέλεια και 'none' για μη ύπαρξη γραμμής. Οι πιο συχνοί τύποι σημείων σήμανσης περιλαμβάνουν τα '+', 'o', '*', 'x'.

Για παράδειγμα, η δήλωση

```
plot( x, y, 'y:+' )
```

σχεδιάζει μια κίτρινη γραμμή από τέλειες και τοποθετεί ένα σημείο συν σε κάθε θέση δεδομένων. Εάν δώσετε το σημείο σήμανσης αλλά όχι την ποιότητα γραμμής το MATLAB σχεδιάζει μόνο το σημείο σήμανσης.

B'.5.2 Παράθυρα σχεδίασης

Η συνάρτηση plot αυτόματα ανοίγει ένα νέο παράθυρο σχεδίασης εάν δεν υπάρχουν άλλα παράθυρα σχεδίασης ήδη ανοιχτά στην οθόνη. Εάν υπάρχει ένα παράθυρο σχεδίασης, η plot χρησιμοποιεί το παράθυρο αυτό εάν δεν της δοθεί εντολή να χρησιμοποιήσει κάποιο συγκεκριμένο παράθυρο. Για να ανοίξετε ένα νέο παράθυρο σχεδίασης και να το κάνετε το ενεργό σχεδιάγραμμα, πληκτρολογήστε

```
figure
```

Για να κάνετε ένα ήδη υπάρχον παράθυρο το ενεργό παράθυρο πληκτρολογήστε

```
figure(n)
```

όπου n είναι ο αριθμός στη ράβδο τίτλου του σχεδιαγράμματος. Τα αποτελέσματα επομένων εντολών γραφικών εμφανίζονται σε αυτό το παράθυρο.

B'.5.3 Προσθήκη σχεδίων σε υπαρκτό γράφημα

Η εντολή hold επιτρέπει την προσθήκη σχεδίων σε ένα υπαρκτό γράφημα. Όταν πληκτρολογήσετε

hold on

δεν αφαιρείται το ήδη υπάρχον γράφημα, αλλά προστίθενται τα νέα δεδομένα στο παρόν γράφημα ανακαλώντας το εάν χρειάζεται. Για παράδειγμα, οι ακόλουθες δηλώσεις πρώτα δημιουργούν ένα σχεδιάγραμμα περιγράμματος της συνάρτησης peaks και ύστερα επιπροσθέτουν ένα σχεδιάγραμμα της ίδιας συνάρτησης σε “ψευδοχρώμα”

```
[x,y,z] = peaks;
contour(x,y,z,20,'k')
hold on
pcolor(x,y,z)
shading interp
```

Η εντολή hold on συνδυάζει το σχεδιάγραμμα pcolor με το σχεδιάγραμμα contour σε μια παράσταση.

Β'.5.4 Τμηματικά σχεδιαγράμματα

Η συνάρτηση subplot επιτρέπει την εμφάνιση πολλαπλών σχεδίων στο ίδιο παράθυρο ή την εκτύπωσή τους στο ίδιο φύλλο χαρτιού. Πληκτρολογώντας

```
subplot( m,n,p )
```

διαχωρίζεται το παράθυρο σχεδίασης σε έναν πίνακα m επί n ο οποίος αποτελείται από μικρά τμηματικά σχεδιαγράμματα και επιλέγει το p-οστό ως το ενεργό σχεδιάγραμμα. Τα σχεδιαγράμματα είναι αριθμημένα αρχικά κατά μήκος της πιο πάνω σειράς του παραθύρου σχεδίασης, κατόπιν κατά μήκος της δεύτερης, κ.ο.κ. Για παράδειγμα, για να σχεδιάσετε δεδομένα σε τέσσερις επιμέρους περιοχές του παραθύρου σχεδίασης πληκτρολογήστε:

```
t = 0:pi/10:2*pi;
[X, Y, Z] = cylinder(4*cos(t));
subplot(2,2,1); mesh(X)
subplot(2,2,2); mesh(Y)
subplot(2,2,3); mesh(Z)
subplot(2,2,4); mesh(X,Y,Z)
```

B'.5.5 Φανταστικά και μιγαδικά δεδομένα

Όταν οι τιμές των μεταβλητών της εντολής plot είναι μιγαδικές, το φανταστικό μέρος αγνοείται εκτός εάν δοθεί στην εντολή plot μία μόνο μιγαδική τιμή. Σε αυτήν την ειδική περίπτωση, η εντολή είναι μια συντόμευση για ένα σχεδιάγραμμα του πραγματικού ως προς το φανταστικό μέρος. Συνεπώς η εντολή :

```
plot(z),
```

όπου z είναι ένα μιγαδικό διάνυσμα ή μήτρα, είναι ισοδύναμη με την εντολή:

```
plot (real(z),imag(z) )
```

Για παράδειγμα, η εντολές

```
t = 0:pi/10:2*pi;
plot(exp(I*t),'-o')
```

σχεδιάζουν ένα εικοσάπλευρο πολύγωνο με μικρούς κύκλους στις κορυφές.

Β'.5.6 Έλεγχος των αξόνων

Η συνάρτηση `axis` παρέχει έναν αριθμό από επιλογές για την προσαρμογή της διαβάθμισης, της κατεύθυνσης και του λόγου μεταξύ των κλιμάκων των αξόνων των σχεδιαγραμμάτων.

Κανονικά, το MATLAB βρίσκει το μέγιστο και ελάχιστο από τα δεδομένα και επιλέγει το κατάλληλο κουτί σχεδίασης και τις κατάλληλες επιγραφές αξόνων. Η συνάρτηση `axis` υπερπηδά την εξ ορισμού ισχύουσα κατάσταση με το να θέτει όρια αξόνων επιλεγμένα από τον χρήστη:

```
axis([xmin xmax ymin ymax])
```

Η εντολή `axis` επίσης δέχεται έναν αριθμό από λέξεις-κλειδιά για τον έλεγχο των αξόνων. Για παράδειγμα, η εντολή

```
axis square
```

κάνει τους άξονες x και y ισομήκεις και η εντολή

```
axis equal
```

κάνει τις αποστάσεις των διαβαθμίσεων των x και y επί των αξόνων ίσες. Έτσι η εντολή

```
plot(exp(i*t)),
```

ακολουθούμενη είτε από την εντολή `axis square` είτε από την `axis equal`, μετατρέπει το οβάλ σχήμα σε κανονικό κύκλο. Η εντολή

```
axis auto
```

επαναφέρει τις διαβαθμίσεις στις εξ ορισμού ισχύουσες τιμές τους. Η εντολή

axis on

ενεργοποιεί της επιγραφές των αξόνων και τις γραμμές διαβαθμίσεων, ενώ η εντολή

axis off

απενεργοποιεί τις επιγραφές των αξόνων και τις γραμμές διαβαθμίσεων. Τέλος, η εντολή

grid off

απενεργοποιεί τις γραμμές πλέγματος και η εντολή

grid on

τις επανενεργοποιεί.

B'.5.7 Επιγραφές και τίτλοι αξόνων

Οι συναρτήσεις xlabel, ylabel και zlabel προσθέτουν επιγραφές στους άξονες x, y και z. Η συνάρτηση title προσθέτει έναν τίτλο στην κορυφή του σχεδίου και η συνάρτηση text εισάγει κείμενο οπουδήποτε στο σχεδιάγραμμα. Ένα υποσύνολο του συμβολισμού του TeX παράγει ελληνικά γράμματα, μαθηματικά σύμβολα και εναλλακτικές γραμματοσειρές. Το ακόλουθο παράδειγμα χρησιμοποιεί \leq για \leq , \pi για π και \it για πλαγίου τύπου γραμματοσειρά:

```
t = -pi:pi/100:pi;
y = sin(t);
plot( t , y );
axis([-pi pi -1 1 ])
```

```
xlabel('-\pi \leq t \leq \pi')  
ylabel('sin(t)') title('Graph of the sine function');  
text(1,-1/3,'\it Note the odd symmetry')
```

Παράρτημα Γ'

Υπολογιστικές Ασκήσεις

Γ'.1 Δειγματοληψία και αναδίπλωση σήματος

Θεωρείστε το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = \cos(100\pi t) + \cos(200\pi t) + \sin(500\pi t)$$

1. Ποιά είναι η ελάχιστη απαιτούμενη συχνότητα δειγματοληψίας για να μπορεί επιτευχθεί ανακατασκευή του σήματος $x(t)$ από την ακολουθία των περιοδικών δειγμάτων του; Η απάντηση να δικαιολογηθεί αυστηρά.
2. Χρησιμοποιώντας το πακέτο MATLAB, σχεδιάστε το σήμα $x(t)$, $t \in [-10, 10]$. Χρησιμοποιείστε βήμα $\Delta t = 0,001$.
3. Εφαρμόστε τον τύπο ανακατασκευής του θεωρήματος δειγματοληψίας με συχνότητα αυτή που υπολογίσατε στο ερώτημα 1. Στο γράφημα του ερωτήματος 2, υπερθέσατε (με διαφορετικό χρώμα) το γράφημα του ανακατασκευασμένου σήματος.
4. Επαναλάβετε το ερώτημα 3 με συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από τη συχνότητα που υπολογίσατε στο ερώτημα 1.

Στο γράφημα των ερωτημάτων 2 και 3, υπερθέσατε (με διαφορετικό χρώμα) το γράφημα του νέου ανακατασκευασμένου σήματος.

5. Επαναλάβετε το ερώτημα 3 με συχνότητα δειγματοληψίας μικρότερη από τη συχνότητα που υπολογίσατε στο ερώτημα 1. Στο γράφημα των ερωτημάτων 2, 3 και 4, υπερθέσατε (με διαφορετικό χρώμα) το γράφημα του νέου ανακατασκευασμένου σήματος.
6. Τι παρατηρείτε; Συνοψίστε τα συμπεράσματά σας.

Γ'.2 Μετασχηματισμοί Fourier

1. Να γραφεί ένα πρόγραμμα MATLAB για τον υπολογισμό της σειράς Fourier που αντιστοιχεί σε σήμα πεπερασμένης διάρκειας T . Το σήμα να προσδιορίζεται ως όρισμα και για τον υπολογισμό να χρησιμοποιείται η προσέγγιση του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier που υλοποιεί η συνάρτηση `fft`.
2. Να γραφεί ένα πρόγραμμα MATLAB για την αντιστροφή δεδομένης σειράς Fourier. Το πρόγραμμα θα δέχεται ως είσοδο ένα διάνυσμα με τους συντελεστές της σειράς, τη θεμελιώδη συχνότητα, καθώς και τον επιθυμητό αριθμό συντελεστών στον τύπο αντιστροφής.
3. Να επιλεγεί ως σήμα ο χαρακτήρας ASCII που αντιστοιχεί στο πρώτο γράμμα του επωνύμου σας και να επαληθευτούν τα προγράμματα του ερωτήματος 1 και 2.

Γ'.3 Δημιουργία μουσικού κομματιού

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιούμε απλούς τόνους για τη σύνθεση ενός μουσικού κομματιού. Κάθε μουσική νότα μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα ημιτονοειδές σήμα συγκεκριμένης συχνότητας. Οι

μουσικές νότες κατατάσσονται σε ομάδες των δώδεκα, που ονομάζονται οκτάβες. Οι δώδεκα νότες σε κάθε οκτάβα διανέμονται λογαριθμικά ως προς τη συχνότητά τους, με τη συχνότητα κάθε νότας να ισούται με $2^{\frac{1}{12}}$ φορές τη συχνότητα της αμέσως χαμηλότερης νότας. Επομένως, ολίσθηση προς τα πάνω κατά μια οκτάβα αντιστοιχεί σε διπλασιασμό της συχνότητας των νοτών της αρχικής οκτάβας. Στη συγκεκριμένη άσκηση, όλες οι νότες βρίσκονται στην οκτάβα που περιέχει το εύρος συχνοτήτων 220 Hz – 440 Hz, σύμφωνα με τον πίνακα:

<i>A</i>	220
<i>A[#], B^b</i>	$220 * 2^{\frac{1}{12}}$
<i>B</i>	$220 * 2^{\frac{2}{12}}$
<i>C</i>	$220 * 2^{\frac{3}{12}}$
<i>C[#], D^b</i>	$220 * 2^{\frac{4}{12}}$
<i>D</i>	$220 * 2^{\frac{5}{12}}$
<i>D[#], E^b</i>	$220 * 2^{\frac{6}{12}}$
<i>E</i>	$220 * 2^{\frac{7}{12}}$
<i>F</i>	$220 * 2^{\frac{8}{12}}$
<i>F[#], G^b</i>	$220 * 2^{\frac{9}{12}}$
<i>G</i>	$220 * 2^{\frac{10}{12}}$
<i>G[#], A^b</i>	$220 * 2^{\frac{11}{12}}$

Στην απλούστερη περίπτωση, κάθε νότα μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα ημιτονοειδές σήμα περιορισμένης διάρκειας, ακολουθούμενο από μικρότερης διάρκειας έλλειψη ήχου (παύση). Η παύση επιτρέπει τη διάκριση μεταξύ δύο νοτών της ίδιας συχνότητας.

1. Χρησιμοποιώντας το πακέτο MATLAB, κατασκευάστε ένα διάγραμμα που να περιέχει την αναπαράσταση διακριτού χρόνου των νοτών κάποιου μουσικού κομματιού. Χρησιμοποιείστε συχνότητα δειγματοληψίας 8000 δειγμάτων ανά δευτερόλεπτο. Μην παραλείψετε να συμπεριλάβετε μικρές παύσεις μεταξύ των νοτών.

2. Επιφέρετε ψηφιακή ολίσθηση προς τα άνω και προς τα κάτω κατά μία οκτάβα με αντίστοιχη αλλαγή της διάρκειας κάθε νότας.
3. Μετατρέψτε την ένταση κάθε νότας σε μειούμενη με το χρόνο, έτσι ώστε η μουσική να ακούγεται περισσότερο ρεαλιστική.

Γ'.4 Συμπύεση εικόνας με χρήση μετασχηματισμών

Ο διακριτός συνημιτονικός μετασχηματισμός μιας δισδιάστατης εικόνας $g(i, k)$, $0 \leq i, k \leq N - 1$, ορίζεται από τη σχέση

$$G_c(m, n) = \alpha(m)\alpha(n) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} g(i, k) \cos\left[\frac{\pi(2i+1)m}{2N}\right] \cos\left[\frac{\pi(2k+1)n}{2N}\right],$$

με τύπο αντιστροφής

$$g(i, k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(m)\alpha(n) \cdot G_c(m, n) \cos\left[\frac{\pi(2i+1)m}{2N}\right] \cos\left[\frac{\pi(2k+1)n}{2N}\right]$$

και

$$\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad \alpha(m) = \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad 1 \leq m \leq N - 1.$$

Ο διακριτός συνημιτονικός μετασχηματισμός της δισδιάστατης εικόνας $g(i, k)$, $0 \leq i, k \leq N - 1$, μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή ορθομοναδιαίων πινάκων ως:

$$\underline{\underline{G_c}} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{g}} \underline{\underline{C}},$$

όπου

$$C(i, m) = \alpha(m) \cos\left[\frac{\pi(2i+1)m}{2N}\right].$$

1. Να υλοποιηθεί ο διακριτός συνημιτονικός μετασχηματισμός και να χρησιμοποιηθεί για συμπίεση εικόνας.

Γ'.5 Θόλωση και αποθόλωση εικόνας

Θεωρείστε ένα σύστημα απεικόνισης στο οποίο κατά τη διάρκεια της φωτογραφικής έκθεσης εμφανίζεται σχετική κίνηση ανάμεσα στη φωτογραφική μηχανή και το αντικείμενο το οποίο φωτογραφίζεται. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείστε ότι η κίνηση είναι γραμμική με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος του οριζόντιου άξονα. Στην περίπτωση αυτή, η μονοδιάστατη κρουστική απόκριση του συστήματος απεικόνισης δίνεται από τη σχέση

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{cT}, & 0 \leq x \leq cT \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς έχει μέτρο $|\hat{K}(s)|$ που δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$|\hat{K}(s)| = \text{σταθερά} \times \left| \frac{\sin(cTs/2)}{cTs/2} \right|.$$

1. Χρησιμοποιώντας το πακέτο MATLAB, σχεδιάστε το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.
2. Αποφανθείτε (με πλήρη τεκμηρίωση) για το αν αύξηση της γραμμικής ταχύτητας c βελτιώνει ή δυσχεραίνει το φαινόμενο του θολώματος από γραμμική κίνηση. Για διευκόλυνσή σας, εξετάστε τη θέση του πρώτου μηδενισμού της συνάρτησης μεταφοράς (δηλ. την πρώτη λύση ως προς s της εξίσωσης $|\hat{K}(s)| = 0$) και την εξάρτησή του από την ταχύτητα c .
3. Προσομοιώστε σε MATLAB τη διαδικασία θολώματος από οριζόντια γραμμική κίνηση, όπως περιγράφεται παραπάνω.

Γ'.6 Το σύστημα ψηφιακών επικοινωνιών BPSK

1. Να προσομοιωθεί ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνιών BPSK. Να προσομοιωθεί η διαμόρφωση και αποδιαμόρφωση και να συγκριθούν τα αποτελέσματα με τη θεωρητική ανάλυση του συστήματος.

Γ'.7 Προσέγγιση συναρτήσεων από τεχνητό νευρωνικό δίκτυο

1. Να προσεγγιστεί μια συνεχής συνάρτηση από τεχνητό νευρωνικό δίκτυο, το οποίο αναπτύσσεται με βάση έναν αριθμό ζευγών ορίσματος-τιμής συνάρτησης. Για την ευκολότερη υλοποίηση της εργασίας αυτής, προτείνεται η χρήση της εργαλειοθήκης (*toolbox*) νευρωνικών δικτύων του *MATLAB*.

Παράρτημα Δ΄

Βιβλιογραφία

Δ΄.1 Ελληνική

1. Σ. Θεοδωρίδης και Κ. Μπερμπερίδης, *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων*, Τυπωθήτω – Γιώργος Δάρδανος, Αθήνα, 1998
2. Ν. Καλουπτσίδης, *Σήματα, Συστήματα και Αλγόριθμοι*, Διάυλος, Αθήνα, 1994
3. Γ.Α. Τσιχριντζής, *Ανάλυση Εικόνας*, Εκδόσεις Βαρβαρήγου, 2002

Δ΄.2 Ξένη

1. F.J. Beutler, “Error-free recovery of signals from irregularly spaced samples”, *SIAM Rev.*, vol. 8, pp. 328-335, 1966
2. I. Bilinskis and A. Mikelsons, *Randomized Signal Processing*, Prentice-Hall, New York, 1992
3. D.R. Cox, *Renewal Theory*, Chapman and Hall, London, 1967

4. L.W. Couch II, *Digital and Analog Communication Systems*, Prentice Hall, London, 1997
5. P. Cvitanovic, *Universality in Chaos*, Adam Hilger, Bristol, 1989 (2η έκδοση)
6. C. Douligeris and G. Develekos, "A Fuzzy Logic Approach to Congestion Control in ATM Networks", in Proc. IEEE ICC 1995, Seattle, WA, June 18-22, pp. 1969-1973, 1995
7. D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980
8. Feldman and D.H. Ballard, "Connectionist models and their properties," *Cognitive Science*, vol. 6, 205-254, 1982
9. R.P. Feynman, "On the reliability of the [Challenger] shuttle", in *What Do You Care What Other People Think?*, Bantam, New York, pp. 224-225, 1989
10. D.B. Fogel (ed.), *Evolutionary Computation: The Fossil Record*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1998
11. D.B. Fogel, *Evolutionary Computation: Toward a New Philosophy of Machine Intelligence*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1995
12. J. Froyland, *Introduction to Chaos and Coherence*, IOP Publishing, Bristol, 1992
13. R.G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley & Sons, New York, 1968
14. L.C. Jain and N.M. Martin (eds.), *Fusion of Neural Networks, Fuzzy Sets, and Genetic Algorithms: Industrial Applications*, CRC Press, Boca Raton, 1999

15. J.-S.R. Jang, C.T. Sun, and E. Mizutani, *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997
16. M. Jamshidi, N. Vadiie and T. J. Ross, *Fuzzy Logic and Control: Software and Hardware Applications*, Prentice Hall, Englewood Hills, NJ, 1993
17. S.V. Kartalopoulos, *Understanding Neural Networks and Fuzzy Logic: Basic Concepts and Applications*, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1996
18. O.A.Z. Leneman, "Random sampling of random processes", *Inf. Contr.*, vol. 9, pp. 347-363, 1966
19. Y. C. Liu and C. Douligeris, "Rate Regulation with Feedback Controller in ATM Networks - A Neural Network Approach", *IEEE J. Selected Areas in Communications, Special Issue on Computational Intelligence for High Speed Networks*, vol. JSAC-15, No.2, pp. 200-208, 1997
20. S. Lopez Garcia, J. Enriquez, and C. de Paz, "Routing Controls in Telecommunication Networks Using Genetic Algorithms", in Proc. Fourth INFORMS Telecommunications Conference, 8-11 March 1998, Boca Raton, FL
21. K. Hirota, "Concepts of probabilistic sets", *Fuzzy Sets and Syst.*, vol. 5, pp. 31-46, 1981
22. P. Maragos and R.W. Schafer, "Morphological filters—part I: Their set-theoretic analysis and relation to linear, shift-invariant filters", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc.*, vol. ASSP-35, pp.1153–1169, 1987
23. P. Maragos and R.W. Schafer, "Morphological filters—part II: Their relation to median, order–statistic, and stack filters",

- IEEE Trans. Acoust., Speech, Sign. Proc.*, vol. ASSP-35, pp. 1170-1184, 1987
24. E. Masry, "Alias-free sampling: an alternative conceptualization and its applications", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-24, pp. 317-324, 1978
 25. M. Mizumoto and K. Tanaka, "Some properties of fuzzy sets of type 2", *Inform. Control*, vol. 31, pp. 312-340, 1976
 26. C.A. Murthy, S.K. Pal and D. Dutta Majumder, "Representation of fuzzy operators using ordinary sets", *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern.*, vol. SMC-17, no. 5, pp. 840-847, 1987
 27. A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, New York, 1989
 28. A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, and I.T. Young, *Signals and Systems*, Prentice-Hall, New York, 1983
 29. H.S. Shapiro and R.A. Silverman, "Alias-free sampling of random noise", *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 8, pp. 245-248, 1960
 30. B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998
 31. F.G. Stremmer, *Introduction to Communication Systems*, Addison Wesley, Reading, MA, 1990
 32. B. Turksen, "Interval-valued fuzzy sets based on normal forms", *Fuzzy Sets and Syst.*, vol. 20, pp. 191-210, 1986
 33. L.A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-352, 1965
 34. L.A. Zadeh, "Making computers think like people", *IEEE Spectrum*, vol. 21, pp. 26-32, August 1984

