



Ομαδικές Διαδικασίες Λήψης Αποφάσεων και Μηχανισμοί Ψηφοφορίας

Ομαδικές Διαδικασίες Λήψης Αποφάσεων



Brainstorming (Συγκέντρωση ιδεών)

- Αδόμητη μέθοδος για δημιουργία ιδεών σχετικών με ένα θέμα
- Όλες οι πιθανές λύσεις εξετάζονται
- Βασική προσέγγιση: καταγραφή ιδεών πρώτα και μετά αξιολόγησή τους
- Εισαγωγή του θέματος προς επίλυση
- Παρακίνηση ειδικών στη δημιουργία ιδεών
- Παρακολούθηση για σημάδια σύγκλισης
- Ψηφοφορία για τη σύγκλιση ή συμφωνία σε λύσεις

Θεμελιώδεις αρχές του brainstorming

- Δεν διακόπτεται το στάδιο της σκέψης
 - Η πρώτη βασική αρχή του brainstorming είναι να μην διακόπτεται η διαδικασία της σκέψης (thought process)
 - Οι ιδέες καταγράφονται χωρίς καθυστερήσεις
- Επιζητείται ο συνδυασμός και η βελτίωση ιδεών
 - Ο κανόνας αυτός προτρέπει τους συμμετέχοντες να χρησιμοποιούν ήδη υπάρχουσες ιδέες, να τις συνδυάζουν ή/και να τις αναδημιουργούν, παρέχοντας έτσι νέες ιδέες
 - Ο σκοπός αυτού του κανόνα είναι να ενθαρρύνει το 'χτίσιμο' ιδεών ενός ατόμου πάνω στις ιδέες των άλλων
- 'Κριτική στο τέλος'
 - Βασικός στόχος του brainstorming είναι να ακούγονται όλες οι ιδέες που έρχονται στο μυαλό κάθε ατόμου που συμμετέχει, χωρίς να υπάρχει φόβος ή/και αναστολή
 - Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στο να διατυπώνονται ασυνήθιστες ιδέες
 - Για να πραγματοποιηθεί κάτι τέτοιο είναι απαραίτητο να μην γίνεται κριτική της κάθε ιδέας τη στιγμή που διατυπώνεται, αλλά να υπάρχει 'ελεύθερη ροή' όλων των ιδεών
- 'Σημασία στην ποσότητα'
 - Όσο περισσότερες ιδέες παράγονται, τόσο αυξάνονται οι πιθανότητες να υπάρχει μια πολύ καλή ιδέα ανάμεσα σ' αυτές
 - Η τεχνική του brainstorming αξιοποιεί τους συσχετισμούς που εμφανίζονται κατά τη δημιουργία ιδεών
 - Μια ιδέα, όσο παράξενη και αν φαίνεται, μπορεί να οδηγήσει σε μια καλή ιδέα
 - Έτσι, δίνεται η δυνατότητα βάσει των υπάρχοντων προτάσεων, να γίνουν συνδυασμοί ή/και αναθεωρήσεις με αποτέλεσμα να παράγονται περισσότερες και πολυποικίλες ιδέες

Διαδικασία του brainstorming (1/3)

- Τα βασικά στάδια του brainstorming είναι :
 - Βήμα 1. Προετοιμασία
 - Η προετοιμασία συνήθως είναι μια ελεύθερη συζήτηση επί ενός ήσσονος σημασίας θέματος
 - Βήμα 2. Ορισμός και διευκρίνιση του θέματος
 - Ο ορισμός αυτός θα πρέπει να είναι σαφής και περιεκτικός
 - Βήμα 3. Εξήγηση κανόνων brainstorming
 - Στο επόμενο βήμα της διαδικασίας, εξηγούνται οι κανόνες της συνόδου
 - Οι κανόνες αυτοί περιλαμβάνουν τόσο τους τέσσερις γενικούς κανόνες του brainstorming, όσο και άλλους περιορισμούς όπως είναι:
 - η θέσπιση ενός χρονικού ορίου της διαδικασίας (time limit)
 - η εξασφάλιση της συμμετοχής όλων
 - τη διευκρίνιση ότι δεν υπάρχουν λανθασμένες απαντήσεις κ.α.

Διαδικασία του brainstorming (2/3)

□ Βήμα 4. Παραγωγή ιδεών

- Αυτό το στάδιο είναι ο πυρήνας όλης της διαδικασίας
- Εδώ γίνεται η παραγωγή ιδεών με τη μορφή καταιγισμού
- Όλες οι ιδέες καταγράφονται με τρόπο ώστε να είναι ορατές από όλους τους συμμετέχοντες
- Εδώ, εκτός από την καταγραφή σε χαρτί μπορεί να υπάρχουν και άλλοι τρόποι αποτύπωσης ιδεών (γραφικά, σκίτσα, χάρτες κτλ.)
- Καθ' όλη τη διάρκεια, ο συντονιστής ελέγχει να μην υπάρχει η παραμικρή αξιολόγηση ή/και κριτική μιας ιδέας, και γενικώς να ικανοποιούνται όλοι οι κανόνες

□ Βήμα 5. Επεξεργασία ιδεών

- Όταν ολοκληρωθεί η παραγωγή και καταγραφή των ιδεών, προτού κληθούν οι συμμετέχοντες να αξιολογήσουν κάθε πρόταση, θα πρέπει να γίνει ένα ξεκαθάρισμα των προτάσεων. Το ξεκαθάρισμα αυτό έγκειται στα εξής:
 - Διαγραφή προτάσεων που επαναλαμβάνονται ή είναι πολύ όμοιες
 - Ομαδοποίηση προτάσεων που συνάδουν
 - Καλύτερη διατύπωση μη ευκρινών ή ασαφών προτάσεων
 - Απαλοιφή τυχόν σχολίων και παρεμβάσεων
 - Διαγραφή προτάσεων που σίγουρα δεν αποτελούν λύση

Διαδικασία του brainstorming (3/3)

□ Βήμα 6. Αξιολόγηση προτάσεων

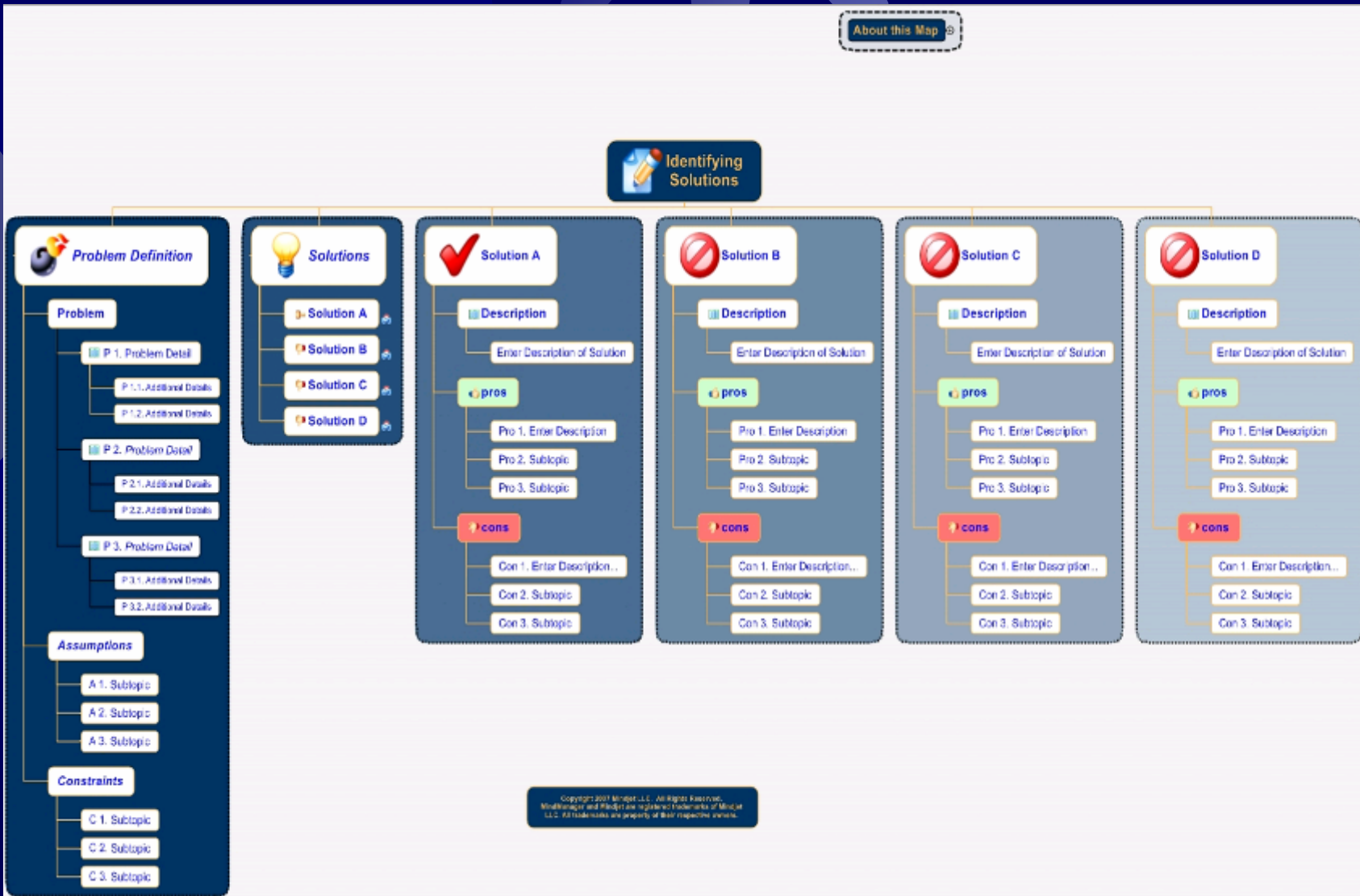
- Σε αυτό το τελικό στάδιο του brainstorming, πραγματοποιείται η κριτική των προτάσεων
- Κάθε χρήστης καλείται να αξιολογήσει τις ιδέες που παρουσιάστηκαν, βάσει κάποιων κριτηρίων. Η αξιολόγηση μπορεί να ακολουθεί απλές μεθόδους, μέχρι πολύπλοκα και εξεζητημένα μοντέλα πολυκριτήριας ανάλυσης
- Η πιο απλή μέθοδος που ακολουθείται είναι η απονομή ενός βαθμού από 1 (χειρότερη ιδέα) ως 5 (καλύτερη ιδέα)
 - Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως κλίμακα του Likert

Ρόλοι των μελών της ομάδας

- Ο συντονιστής ή επικεφαλής (facilitator)
 - Ο συντονιστής είναι υπεύθυνος για την ομαλή διεξαγωγή της συνόδου, για την παροχή οποιωνδήποτε διευκρινήσεων, για την τήρηση των κανόνων, για τη μετάβαση στο επόμενο στάδιο, και γενικώς για όλες τις ενέργειες ελέγχου και υποστήριξης της συνόδου
 - Θα πρέπει να διαθέτει αυξημένες ικανότητες για να χειρίζεται όλα τα παραπάνω θέματα, όπως επίσης και να βοηθά τους συμμετέχοντες να ξεπερνούν τον κορεσμό και να σκέφτονται με άλλο τρόπο
 - Ο συντονιστής μπορεί να είναι ταυτόχρονα και συμμετέχων, υπό την έννοια ότι μπορεί να διατυπώνει και εκείνος τις δικές του ιδέες.
- Οι συμμετέχοντες (participants)
 - Οι συμμετέχοντες είναι όλα τα μέλη της ομάδας τα οποία καλούνται να συνεισφέρουν τις ιδέες τους πάνω στο θέμα και να κάνουν την αξιολόγηση μετέπειτα
 - Ο ρόλος τους δεν είναι ελεγκτικός ούτε μπορούν να κατευθύνουν τη διαδικασία
 - Είναι οι τελικοί αποδέκτες των πληροφοριών και εντολών του συστήματος, αλλά και αυτοί που σε ένα GSS καταχωρούν οι ίδιοι τις προτάσεις τους στο σύστημα
- Ο γραμματέας (recorder)
 - Ο ρόλος του γραμματέα είναι να καταγράφει όλες τις προτάσεις που διατυπώνονται.
 - Με τη χρήση των GSS όμως, είναι ευνόητο πως το ρόλο αυτό τον έχει το ίδιο το σύστημα καθώς αυτό καταγράφει και παρουσιάζει όλες τις προτάσεις που εμφανίζονται
 - Σε αντίθετες περιπτώσεις, το ρόλο του γραμματέα αναλαμβάνει ο συντονιστής, ή ένα άτομο που μπορεί να καταγράφει γρήγορα ότι ακούγεται

Λογισμικό brainstorming

- Υπάρχει πληθώρα σχετικών εργαλείων
- Π.χ, mindjet (<http://www.mindjet.com/default.aspx#>)



Nominal Group Technique (NGT)

- Αποτελεσματική στην αποτύπωση γνώσης πολλών εμπειρογνωμόνων, ειδικά όταν απαιτείται εξισορρόπηση status εμπειρογνωμόνων
- Με την NGT, κάθε εμπειρογνώμονας έχει ίσες ευκαιρίες να εκφράσει ιδέες στην ομάδα
- Σειριακή οργάνωση συζήτησης κάνει τη NGT περισσότερο αποτελεσματική από τη μέθοδο brainstorming

Βήματα NGT (1/2)

- Βήμα 1: Σιωπηλή δημιουργία ιδεών
 - Ο διαχειριστής παρουσιάζει ερωτήσεις στην ομάδα
 - Μεμονωμένες αποκρίσεις καταγράφονται
 - (Δεν επιτρέπεται η ομαδική εργασία)
- Βήμα 2: Παρουσίαση και απαρίθμηση ιδεών
 - Κάθε μέλος με τη σειρά
- Βήμα 3: Σύνομη συζήτηση ιδεών
 - Διευκρινίσεις με σκοπό τη κατανόηση από την ομάδα

Βήματα NGT (2/2)

- Βήμα 4: Αρχική ψηφοφορία
 - Π.χ. κάθε μέλος ιεραρχεί 5 με 7 σημαντικότερες ιδέες και τις γράφει σε κάρτες
 - Ο συντονιστής καταμετρά ψήφους
- Βήμα 5: Συζήτηση ψηφοφορίας
 - Εξέταση πιθανών μη συνεπών ψήφων
- Βήμα 6: Τελική ψηφοφορία
 - Πιθανή χρήση περίπλοκων μεθόδων ψηφοφορίας
- Βήμα 7: Καταγραφή και συμφωνία στα προκριθέντα θέματα

Συμπεράσματα NGT

- Απαιτεί χρόνο
- Απαιτεί υπομονή από πλευράς διαχειριστών οι οποίοι πρέπει συμμετέχουν σε συζητήσεις με άλλους ειδικούς
- Δεν ενδείκνυται σε περιπτώσεις όπου απαιτείται επιλογή από προ-διαγεγραμμένα αποτελέσματα ή όταν απαιτείται ομοφωνία
- + Η μέθοδος NGT ενδείκνυται σε καταστάσεις που υπάρχει ασάφεια για τη φύση του προβλήματος

Μέθοδος Delphi

- Μέθοδος πρόβλεψης (έρευνας)
- Ερωτηματολόγια χρησιμοποιούνται για να συγκεντρώσουν αποκρίσεις ειδικών με σκοπό να επιτευχθεί συλλογική πρόβλεψη
- Πολλοί ειδικοί
- Περίπλοκο θέμα
- Θέμα που άπτεται πολλών ειδικοτήτων
- Ανώνυμες απαντήσεις

Βήματα Μεθόδου Delphi (1/4)

- Πρώτος Γύρος
 - Συμμετέχοντες ρωτούνται για καταγραφή απόψεών τους σε θέματα σημαντικά για το μέλλον
 - Ο συντονιστής οργανώνει τις αποκρίσεις
 - Παρεμφερείς απόψεις ομαδοποιούνται
 - Περιφερειακές απόψεις αποκλείονται
 - Απόψεις και επιχειρήματα αναλύονται
 - Δημιουργία ερ/γίων για 2ο γύρο

Βήματα Μεθόδου Delphi (2/4)

- Δεύτερος Γύρος
 - Περίληψη προβλέψεων αποστέλλεται στα μέλη του πάνελ
 - Μέλη δίνουν χρόνους υλοποίησης προβλέψεων
 - Συντονιστής παράγει στατιστική ανάλυση αποκρίσεων

Βήματα Μεθόδου Delphi (3/4)

- Τρίτος Γύρος
 - Επεξεργασμένα αποτελέσματα 2ου γύρου αποστέλονται στα μέλη
 - Μέλη ερωτούνται για νέες προβλέψεις / πιθανές αλλαγές απόψεων
 - Εξηγήσεις ζητούνται για προβλέψεις που βρίσκονται στα άνω / κάτω άκρα
 - Ακραίες απόψεις μπορεί να αγνοηθούν
 - Παράγεται σύνοψη

Βήματα Μεθόδου Delphi (4/4)

- Τέταρτος Γύρος
 - Συνοψισμένα αποτελέσματα 2ου γύρου αποστέλονται στα μέλη
 - Μέλη ερωτούνται για νέες προβλέψεις / πιθανές αλλαγές απόψεων
 - Εξηγήσεις ζητούνται για προβλέψεις που διαφοροποιούνται από μέσο όρο
 - Ακραίες απόψεις μπορεί να αγνοηθούν
 - Παράγεται σύνοψη

Συμπεράσματα Delphi

- + Επικεντρώνεται στο θέμα
- + Επιτρέπει τη συμμετοχή ειδικών με διαφορετικές ειδικότητες και από διαφορετικές τοποθεσίες
- + Παράγει ακριβείς και εστιασμένες αναφορές
- Απαιτεί χρόνο, έχει κόστος
- Ανωνυμία μπορεί να προκαλέσει έλλειψη δέσμευσης
- Συστηματικά λάθη
 - Ειδικοί συχνά δεν έχουν τη γνώση που απαιτείται για τελικές αποφάσεις
 - Ελλιπή ή άστοχα ερωτηματολόγια μπορούν να δημιουργήσουν διάφορα προβλήματα
 - Επιθυμητά γεγονότα προκρίνονται ως περισσότερο πιθανά
 - Μη διαφοροποιημένοι ειδικοί \Rightarrow πολωμένη εικόνα



Λήψη ομαδικής απόφασης με ψηφοφορία

- Η ψηφοφορία αποτελεί βασικό μηχανισμό σε ομαδικές διαδικασίες λήψης αποφάσεων στις οποίες εμπλέκονται πολλά άτομα

Ψηφοφορία



- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε:
 - Ν εναλλακτικές
 - Κ άτομα που συμμετέχουν στη λήψη απόφασης (DM1, DM2, ..., DMk)
 - Κάθε άτομο έχει προτίμηση στις εναλλακτικές
- Ποια εναλλακτική πρέπει να ακολουθήσει η ομάδα;

Πλειοψηφική ψηφοφορία (1/2)

- Κάθε ψηφοφόρος έχει μία ψήφο
 - Η εναλλακτική που παίρνει τις περισσότερες ψήφους είναι η επικρατέστερη
- Σε περίπτωση που η επικρατέστερη εναλλακτική δε συγκεντρώνει περισσότερες από 50% των ψήφων
 - απορρίπτονται οι εναλλακτικές λύσεις με το χαμηλότερο αριθμό ψήφων
 - επαναλαμβάνεται η ψηφοφορία έως ότου ικανοποιείται η συνθήκη του 50%

Πλειοψηφική ψηφοφορία (2/2)

Ας υποθέσουμε 3 εναλλακτικές A, B, C, και 9 ψηφοφόρους

4 δηλώνουν ότι $A > B > C$

3 δηλώνουν ότι $B > C > A$

2 δηλώνουν ότι $C > B > A$

Πλειοψηφική ψηφοφορία

4 ψήφοι για A



4 ψήφοι για A

3 ψήφοι για B



$3+2 = 5$ ψήφοι για B

2 ψήφοι για C



B επικρατέστερη

Παραδείγματα

		Ψηφοφόροι										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Σειρά Προτίμησης	1η	b	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a
	2η	a	a	a	a	a	a	c	c	c	d	d
	3η	c	c	c	d	d	d	d	d	d	c	c
	4η	d	d	d	c	c	c	b	b	b	b	b

- ο υποψήφιος a θεωρείται ως ο καλύτερος από σχεδόν τους μισούς από τους ψηφοφόρους (μια ακόμη ψήφος θα του έδινε την απόλυτη πλειοψηφία) και για όλους τους υπόλοιπους ψηφοφόρους είναι ο δεύτερος κατά σειρά προτίμησης ενώ ο υποψήφιος b είναι τελευταίος στη σειρά προτίμησης 5 ψηφοφόρων
- Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι θα έπρεπε να εκλεχθεί ο a
- Κι όμως, από μια μέθοδο απλής πλειοψηφίας θα κέρδιζε ο b

Παραδείγματα

		Ψηφοφόροι										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Σειρά Προτίμησης	1η	b	b	b	c	c	c	c	d	d	a	a
	2η	a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	d
	3η	d	c	d	b	b	b	d	c	b	d	c
	4η	c	d	c	d	d	d	b	b	c	c	b

- Ο πρώτος γύρος δεν βγάζει απόλυτη πλειοψηφία
 - Δεν υπάρχει υποψήφιος με πάνω από 5 πρώτες θέσεις
- Για το δεύτερο γύρο, αποκλείονται οι a και d, νικητής αναδεικνύεται ο c
- Κι όμως δεν φαίνεται να υπάρχει αμφιβολία ότι η εκλογή του a θα ήταν πιο αποδεκτή γενικά

Συγκριτική Μέθοδος (condorcet)

- Με αυτή τη μέθοδο, κάθε ζευγάρι εναλλακτικών λύσεων συγκρίνεται
- Η εναλλακτική λύση που είναι η καλύτερη στις περισσότερες συγκρίσεις είναι η επικρατέστερη
- Εξετάστε τις εναλλακτικές λύσεις A, B, C, 33 ψηφοφόροι και το ακόλουθο αποτέλεσμα ψηφοφορίας

	A	B	C
A	-	18,15	18,15
B	15,18	-	32,1
C	15,18	1,32	-

■ A P B, A P C, B P C (A P B σημαίνει ότι A is preferred over B)

■ $\Rightarrow A P B P C \Rightarrow A$ είναι η επικρατέστερη

Παραδείγματα

- 23 έδωσαν τη σειρά $a P c P b$
 - 19 έδωσαν τη σειρά $b P c P a$
 - 16 έδωσαν τη σειρά $c P b P a$
 - 2 έδωσαν τη σειρά $c P a P b$
-
- $23 + 2 = 25$ ψήφοι για το $a P b$, $19 + 16 = 35$ ψήφοι για το $b P a$
 - 23 ψήφους για το $a P c$, $19 + 16 + 2 = 37$ ψήφους για το $c P a$
 - 19 ψήφους για το $b P c$, $23 + 16 + 2 = 41$ ψήφους για το $c P b$
-
- $c P b$, $b P a$ και $c P a$ που είναι η διάταξη $c P b P a$
 - Ενώ με πλειοψηφική ψηφοφορία, η C αποκλείεται στο πρώτο γύρο και στο δεύτερο γύρω αναδεικνύεται νικήτρια η b
 - $23 + 2 = 25$ ψηφοφόροι εκφράζουν $a P b$, ενώ $19 + 16 = 35$ ψηφοφόροι εκφράζουν $b P a$

Παραδείγματα

- 23 ψήφοι: $a P b P c$
 - 17 ψήφοι: $b P c P a$
 - 2 ψήφοι: $b P a P c$
 - 10 ψήφοι: $c P a P b$
 - 8 ψήφοι: $c P b P a$
-
- $b P c$: $23 + 17 + 2 = 42$; $c P b$: $10 + 8 = 18$
 - $c P a$: $17 + 10 + 8 = 35$; $a P c$: $23 + 2 = 25$
 - $a P b$: $23 + 10 = 33$; $b P a$: $17 + 2 + 8 = 27$
-
- $b P c$, $c P a$ και $a P b$ που είναι ασύμβατες

Το παράδοξο Condorcet (1/2)

Παράδειγμα ο ακόλουθος πίνακας ψηφοφορίας

	DM ₁	DM ₂	DM ₃
A	1	3	2
B	2	1	3
C	3	2	1

Κάθε εναλλακτική
έχει υποστηριχτή!

Συγκρίσεις κατά ζεύγη:

- A είναι προτιμότερο του B (2-1)
- B είναι προτιμότερο του C (2-1)
- C είναι προτιμότερο του A (2-1)

Το παράδοξο Condorcet (2/2)

- Τρεις σειρές ψηφοφορίας ή τρόποι καταμέτρησης:
- 1) (A-B) \Rightarrow A επικρατεί, (A-C) \Rightarrow C επικρατέστερη
- 2) (B-C) \Rightarrow B επικρατεί, (B-A) \Rightarrow A επικρατέστερη
- 3) (A-C) \Rightarrow C επικρατεί, (C-B) \Rightarrow B επικρατέστερη

	DM ₁	DM ₂	DM ₃
A	1	3	2
B	2	1	3
C	3	2	1

Το αποτέλεσμα ψηφοφορίας εξαρτάται από τη σειρά ψηφοφορίας! Δεν υπάρχει καμία «κοινωνικά» καλύτερη εναλλακτική λύση.

Ανάλυση

- Έστω έξι σύνολα με πιθανές προτιμήσεις και n αριθμός ψηφοφόρων:
- (1) $a P b P c$
- (2) $a P c P b$
- (3) $c P a P b$
- (4) $c P b P a$
- (5) $b P c P a$
- (6) $b P a P c$

- Σύμφωνα με Cordocet πρέπει πρώτα να εξετασθεί η συμπεριφορά σχετικά με τα a και b
- Οι 6 κατηγορίες ανασχηματίζονται σε 2 κλάσεις:
- $\# \{ i: a P_i b \} = \#(1) \text{ και } \#(2) \text{ και } \#(3) = n_1 + n_2 + n_3$
- $\# \{ i: b P_i a \} = \#(4) \text{ και } \#(5) \text{ και } \#(6) = n_4 + n_5 + n_6$

- και ομοίως για τις άλλες εναλλακτικές:
- $\# \{ i: a P_i c \} = \#(1) \text{ και } \#(2) \text{ και } \#(6)$
- $\# \{ i: c P_i a \} = \#(3) \text{ και } \#(4) \text{ και } \#(5)$
- $\# \{ i: b P_i c \} = \#(1) \text{ και } \#(5) \text{ και } \#(6)$
- $\# \{ i: c P_i b \} = \#(2) \text{ και } \#(3) \text{ και } \#(4)$

Ανάλυση

- Ο κανόνας της πλειοψηφίας χρησιμοποιείται για τη σύγκριση του αριθμού των ψηφοφόρων σε δύο αντιτιθέμενες κλάσεις. Για παράδειγμα, αν έχουμε

$$n_1 + n_2 + n_3 > n_4 + n_5 + n_6$$

- θα θεωρήσουμε ως συλλογική κρίση την $a P b$
- Ασυμβατότητα θα εμφανιστεί αν έχουμε $a P b$, $b P c$, και $c P a$ ή $b P a$, $c P b$, και $a P c$
- Η πρώτη περίπτωση εμφανίζεται όταν οι ακόλουθες τρεις ανισότητες συμβαίνουν ταυτόχρονα:

$$n_1 + n_2 + n_3 > n_4 + n_5 + n_6$$

$$n_1 + n_5 + n_6 > n_2 + n_3 + n_4$$

$$n_3 + n_4 + n_5 > n_1 + n_2 + n_6$$

- Μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά παραδείγματα που οδηγούν σε ασυμβατότητα, το απλούστερο εκ των οποίων είναι να επιλέξουμε:

$$n_1 = n_3 = n_5 = 1$$

$$n_2 = n_4 = n_6 = 0$$

- Αυτή είναι μία ψηφοφορία τριών ατόμων που έχουν αντιστοίχως τις γνώμες (1), (3) και (5)

Ανάλυση

- Ο πρώτος από τους τρεις ψηφοφόρους μπορεί να έχει οποιαδήποτε από τις 6 απόψεις, και το ίδιο ισχύει για τον δεύτερο και τον τρίτο υποψήφιο, έτσι ώστε υπάρχουν $6 \times 6 \times 6 = 216$ διαφορετικές πιθανότητες για το τελικό αποτέλεσμα
- Μεταξύ των 216 πιθανοτήτων, υπάρχουν 12 οι οποίες αναδεικνύουν το φαινόμενο Condorcet – κάτι λιγότερο από το 6% των περιπτώσεων
- Οι 12 αυτές πιθανότητες είναι οι εξής:
 - (1) (3) (5), (1) (5) (3), (3) (1) (5), (3) (5) (1), (5) (1) (3), (5) (3) (1) και οι 6 ανάλογες διατάξεις των (2), (4) και (6)
- Γενικεύοντας για περισσότερους ψηφοφόρους
 - 3 ψηφοφόροι: 5,6%
 - 5 ψηφοφόροι: 7,0%
 - 9 ψηφοφόροι: 7,8%
 - κ.ο.κ.
- Έχειδειχθεί ότι η οριακή τιμή είναι λίγο πιο μικρότερη από 9%, που σημαίνει ότι το φαινόμενο του Condorcet αναπαριστά μόνο ένα μικρό κλάσμα των πιθανοτήτων (μεταξύ του 6% και του 9%), λιγότερο δηλαδή από μία φορά στις 10 σε μία αρκετά μεγάλη σειρά παρατηρήσεων για τις 3 εναλλακτικές

Ανάλυση

- Τα πράγματα όμως χειροτερεύουν όταν ο αριθμός των εναλλακτικών μεγαλώνει
- Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ότι η πιθανότητα ενός τέτοιου νικητή κυμαίνεται σύμφωνα με τον αριθμό των εναλλακτικών όταν ο αριθμός των ατόμων είναι πολύ μεγάλος
- Για παράδειγμα, όταν οι εναλλακτικές είναι 3, η πιθανότητα είναι, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, 8,77%. Αν είναι 4 οι εναλλακτικές, η πιθανότητα αυξάνεται σε 17,55% κλπ.

Limiting values of probabilities of no majority winner.

Number of Alternatives	Probability	Number of Alternatives	Probability
1	0.0000	10	0.4887
2	0.0000	15	0.6087
3	0.0877	20	0.6811
4	0.1755	25	0.7297
5	0.2513	30	0.7648
6	0.3152	35	0.7914
7	0.3692	40	0.8123
8	0.4151	45	0.8292
9	0.4545	49	0.8405

Συνάρτηση Condorcet

- Υπενθυμίζουμε ότι η αρχή του Condorcet είναι να επιλεγθεί ο υποψήφιος που νικά κάθε άλλο υποψήφιο με απλή πλειοψηφία όταν τέτοιος υποψήφιος υπάρχει.
- Όταν δεν υπάρχει τέτοιος νικητής απλής πλειοψηφίας ή / και έχουμε κυκλικές πλειοψηφίες, ο Condorcet πρότεινε την ακόλουθη προσέγγιση:

$$f_C(x) = \min_{y \in \Delta(x)} \#(i : x P_i y)$$

- και οι υποψήφιοι βαθμολογούνται με τη σειρά των τιμών της f_C
- Η $f_C(x)$ μετρά την χειρότερη βαθμολογία του x συγκρινόμενου με οποιονδήποτε άλλο υποψήφιο και, συνεπώς, η συνάρτηση του Condorcet είναι μία maximin συνάρτηση, αφού επιλέγει τους υποψήφιους εκείνους που η χειρότερη τους βαθμολογία εναντίον όλων των άλλων είναι η καλύτερη δυνατή

Παράδειγμα

- 23 ψήφοι: $a P b P c$
 - 17 ψήφοι: $b P c P a$
 - 2 ψήφοι: $b P a P c$
 - 10 ψήφοι: $c P a P b$
 - 8 ψήφοι: $c P b P a$
- $\#(i: a P_i b) = 33$ $\#(i: b P_i a) = 27$
 - $\#(i: a P_i c) = 25$ $\#(i: c P_i a) = 35$
 - $\#(i: b P_i c) = 42$ $\#(i: c P_i b) = 18$
- Και όπως είδαμε πριν: $a P b$, $b P c$, και $c P a$ αλλά είναι ασύμβατες

	a	b	c	f_c
a	-	33	25	25
b	27	-	42	27
c	35	18	-	18

- Σύμφωνα με την συνάρτηση του Condorcet, η διάταξη της κοινωνικής προτίμησης για τους υποψηφίους είναι $b P a P c$ αφού $f_c(b) > f_c(a) > f_c(c)$.

Borda

- Κάθε ψηφοφόρος δίνει $N-1$ ψήφους στην προτιμότερη εναλλακτική λύση, $N-2$ στη δεύτερη προτιμότερη..., και 0 ψήφους στη λιγότερη προτιμότερη εναλλακτική λύση
- Η εναλλακτική λύση με τον υψηλότερο συνολικό αριθμό ψήφων είναι η επικρατέστερη
- Παράδειγμα: 3 εναλλακτικές, 9 ψηφοφόροι

4 δηλώνουν ότι $A > B > C$

3 δηλώνουν ότι $B > C > A$

2 δηλώνουν ότι $C > B > A$

$$A : 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 8 \text{ ψήφοι}$$

$$B : 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 12 \text{ ψήφοι}$$

$$C : 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 \text{ ψήφοι}$$

⇒ B επικρατέστερη

Ψηφοφορία έγκρισης

- Κάθε ψηφοφόρος δίνει μια ψήφο για κάθε εναλλακτική λύση που εγκρίνει
- Η εναλλακτική λύση με τον υψηλότερο αριθμό ψήφων είναι η επικρατέστερη
- Παράδειγμα: 3 εναλλακτικές, 9 ψηφοφόροι

	DM ₁	DM ₂	DM ₃	DM ₄	DM ₅	DM ₆	DM ₇	DM ₈	DM ₉	total
A	X	-	-	X	-	X	-	X	-	4
B	X	X	X	X	X	X	-	X	-	7
C	-	-	-	-	-	-	X	-	X	2

Επικρατέστερη!

Ψηφοφορία στρατηγικής

- Ο ψηφοφόρος DM1 ξέρει τις προτιμήσεις των άλλων ψηφοφόρων και τη σειρά ψηφοφορίας (A-B, B-C, A-C)
- Γνωρίζει ότι η προτίμηση του A δεν μπορεί να κερδίσει *
- Εάν ψηφίσει για το B αντί του A στο πρώτο γύρο
 - τότε το B είναι ο νικητής.
 - με αυτό το τρόπο ο DM1 αποφεύγει τη λιγότερο προτιμότερη εναλλακτική C

* (εάν οι DM2 και DM3 ψηφίσουν σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους).

Συμμαχίες

- Εάν η διαδικασία ψηφοφορίας είναι γνωστή, οι ψηφοφόροι μπορούν να διαμορφώσουν τις συμμαχίες που εξυπηρετούν τους σκοπούς τους
- Με αυτό το τρόπο μπορούν
 - να αποβάλλουν μια ανεπιθύμητη εναλλακτική
 - να υποστηρίξουν μια εναλλακτική λύση που υποστηρίζεται από μία συμμαχία.



Οι συνθήκες του Arrow για την Συνάρτηση Κοινωνικής Ευημερίας

- Η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας του Arrow πρέπει να ικανοποιεί 2 αξιώματα και ένα σύνολο 5 συνθηκών.
 - Αξίωμα I: Για όλα τα x και y , ή $x R y$ ή $y R x$
 - Αξίωμα II: Για όλα τα x, y και z , τα $x R y$ ΚΑΙ $y R z$ υπονοούν $x R z$
 - Ο συμβολισμός $x R y$ σημαίνει «το x προτιμάται (P) από ή είναι αδιάφορο (I) ως προς το y »
 - Συνθήκη 1
 - (a). Ο αριθμός των εναλλακτικών είναι μεγαλύτερος ή ίσος με 3
 - (b). Η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας καθορίζεται για όλα τα πιθανά προφίλ των ατομικών προτιμήσεων
 - (c). Υπάρχουν τουλάχιστον 2 άτομα που ψηφίζουν

Οι συνθήκες του Arrow για την Συνάρτηση Κοινωνικής Ευημερίας

□ Συνθήκη 2 (Θετική συσχέτιση των κοινωνικών και ατομικών τιμών)

- Αν η συνάρτηση ευημερίας βεβαιώνει ότι το x προτιμάται από το y για ένα συγκεκριμένο προφίλ ατομικών προτιμήσεων, θα βεβαιώνει το ίδιο αν το προφίλ διαμορφωθεί ως ακολούθως:
 - Οι ατομικές συγκρίσεις ζευγών μεταξύ εναλλακτικών εκτός του x δεν αλλάζουν
 - Κάθε ατομική σύγκριση ζεύγους μεταξύ του x και οποιασδήποτε άλλης εναλλακτικής, είτε παραμένει αμετάβλητη είτε αλλάζει προς την εύνοια του x .
- Π.χ. Υποθέτουμε ότι η P είναι η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας που βεβαιώνει ότι η κοινωνία προτιμά το x από το y , δηλαδή $x P y$
 - Υποθέτουμε ότι το άτομο i έχει εκφράσει την προτίμησή του ως $x P_i y$ αλλά αλλάζει την προτίμησή του σε $x P'_i y$
 - Τότε περιμένουμε ότι η κοινωνία θα συνεχίσει να προτιμά το x από το y
- Αν η κοινωνία ήταν αρχικά αδιάφορη ως προς τα x και y , δηλαδή $x I y$, και αν το άτομο i άλλαζε την προτίμησή του από $x P_i y$ σε $x P'_i y$, θα περιμέναμε η κοινωνία να είναι, τουλάχιστον, αδιάφορη μεταξύ των x και y , ή ίσως και να προτιμά το x από το y

Οι συνθήκες του Arrow για την Συνάρτηση Κοινωνικής Ευημερίας

□ Συνθήκη 3 (Ανεξαρτησία μη συσχετιζόμενων εναλλακτικών)

- Έστω A_1 ένα υποσύνολο εναλλακτικών του A . Αν ένα προφίλ διατάξεων τροποποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε οι συγκρίσεις ανά ζεύγη μεταξύ των εναλλακτικών για κάθε άτομο να παραμένουν αμετάβλητες, οι διατάξεις κοινωνικής προτίμησης που είναι το αποτέλεσμα των αρχικών και τροποποιημένων προφίλ των ατομικών προτιμήσεων θα πρέπει να είναι πανομοιότυπες για τις εναλλακτικές στο A_1 .
- If for some X , Y , and Z , X is preferred to Y , then changing the position in the ordering of Z does not affect the relative ordering of X and Y i.e. X is still preferred to Y . In other words, changing the position of Z in the preference ordering should not be allowed to "flip" the social choice between X and Y .

Οι συνθήκες του Arrow για την Συνάρτηση Κοινωνικής Ευημερίας

□ Συνθήκη 4 (Η κυριαρχία του πολίτη)

- Θεωρείστε μια συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας που αξιώνει $x P y$ ανεξάρτητα από τις προτιμήσεις οποιουδήποτε από τα άτομα της κοινωνίας
- Μία τέτοια ανεπιθύμητη συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας λέμε ότι είναι επιβεβλημένη
- Η συνθήκη 4 εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας δεν πρέπει να είναι επιβεβλημένη, αλλά οι πολίτες να έχουν την κυριαρχία
- If everyone in society prefers a to b, then society should prefer a to b

□ Συνθήκη 5 (Μη-δικτατορία)

- Δεν υπάρχει άτομο (δικτάτορας) με την ιδιότητα ότι όποτε προτιμά το x από το y , για οποιαδήποτε x και y , η κοινωνία θα πρέπει να κάνει το ίδιο, ανεξάρτητα από τις προτιμήσεις των υπόλοιπων μελών

Θεωρήματα Arrow

- Θεώρημα I (Θεώρημα Πιθανότητας του Arrow για την Συνάρτηση Κοινωνικής Ευημερίας 2 εναλλακτικών)
 - Αν ο συνολικός αριθμός εναλλακτικών είναι 2, η μέθοδος απόφασης πλειοψηφίας είναι μία συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας που ικανοποιεί τις συνθήκες από 2 έως 5 και αποδίδει μία διάταξη κοινωνικής προτίμησης των 2 εναλλακτικών για κάθε σύνολο ατομικών διατάξεων
- Θεώρημα II (Impossibility Theorem)
 - Αν υπάρχουν τουλάχιστον τρεις εναλλακτικές επιλογές τις οποίες είναι ελεύθερα να διατάξουν όπως επιθυμούν τα μέλη της κοινωνίας, τότε κάθε συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας που ικανοποιεί τις συνθήκες 2 και 3 και αποδίδει μια κοινωνική διάταξη που ικανοποιεί τα Αξιώματα I και II πρέπει να είναι είτε επιβεβλημένη είτε δικτατορική
 - Παράδειγμα: *divide a cake between three people. Let us call them A, B and C*
 - *Choice 1: A gets nothing, B and C get half each*
 - *Choice 2: B gets nothing, A and C get half each*
 - *Choice 3: C gets nothing, A and B get half each*
 - *Choice 4: divide the cake equally*
 - *Choice 4 would be third from the top in everyone's list, and would in any direct choice lose 2 to 1 against an unequal distribution*
 - *Since all of these choices are Pareto-optimal - no one's welfare can be improved without reducing the welfare of others - choice 4 would not be chosen, since there would always be other preferred choices*