ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΜΣ "ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ"

Σημειώσεις για το μάθημα
ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Π. ΤΣΙΚΟΥΡΑΣ

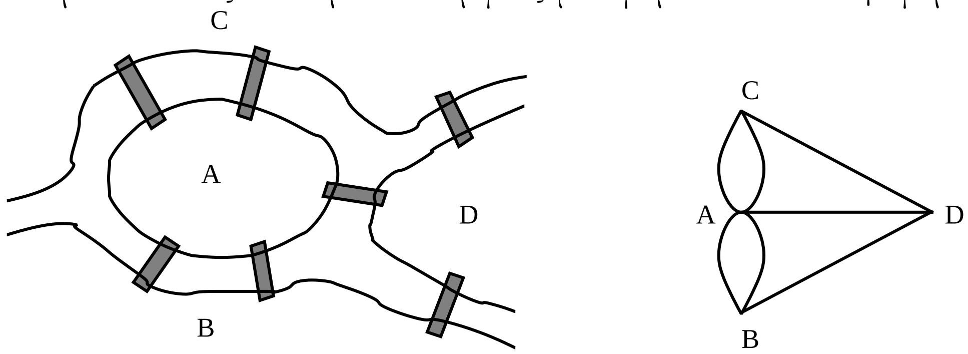
ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2016

Περιεχόμενα

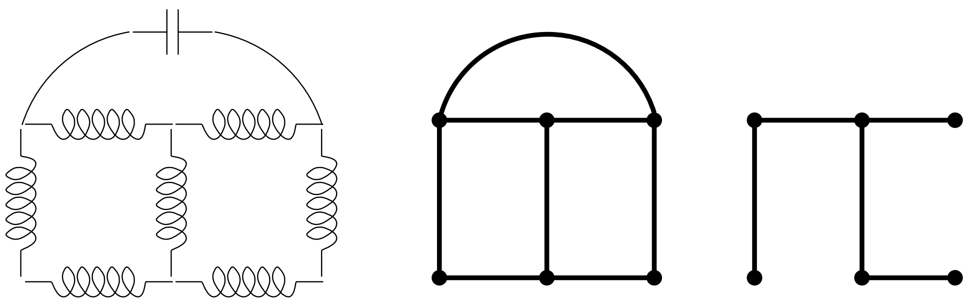
ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΙΣΤΟΡΙΚΟ

Euler (1736): Γέφυρες του Königsberg

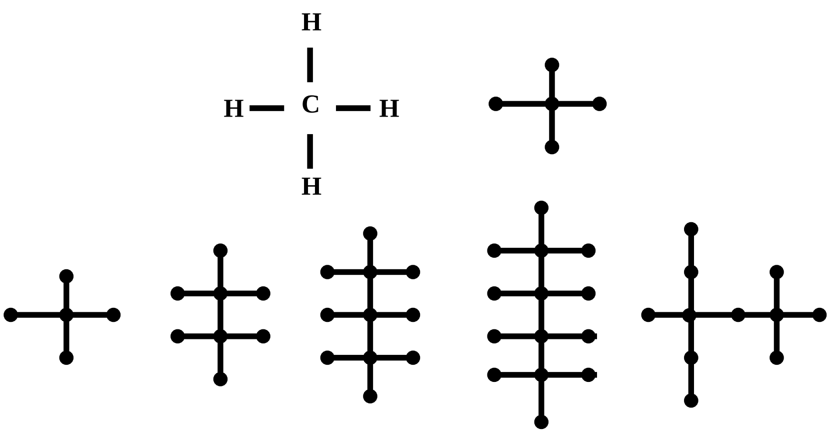
Μπορεί κάποιος να περάσει ακριβώς μια φορά από κάθε γέφυρα;



Kirchhoff (1847): Γενετικό δένδρο



Cayley (1857): Πλήθος κορεσμένων υδρογονάνθρακων C_nH_{2n+2}



Μερικές από τις εφαρμογές της Θεωρίας Γραφημάτων:

Πληροφορική (Δένδρα, Δυαδικά δένδρα, Διατεταγμένα δένδρα, Διάτρεξη (διάσχιση) δένδρων, Προγραμματισμός, Συνδεσμολογία κ.λπ.).

Αλγόριθμοι (Αλγόριθμοι γραφημάτων, Αναζήτηση πρώτα κατά πλάτος, Αναζήτηση πρώτα κατά βάθος, Τοπολογική διάταξη, Κατάταξη έργων με προθεσμίες κ.λπ.).

Διοίκηση Επιχειρήσεων (Οργανογράμματα, Κεντρικά σημεία κ.λπ.).

Οδοποιΐα (Οδικά δίκτυα - χωρητικότητα - μέγιστη ροή, Σηματοδότηση δρόμων).

Υδραυλικά (Δίκτυα - χωρητικότητα -μέγιστη ροή).

Ιστορία - Κοινωνιολογία (Γενεαλογικά δένδρα, Φιλία (γραφήματα δεσμών), Έρωτας (γραφήματα τόξων - δυστυχώς!)).

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΔΕΣΜΩΝ

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

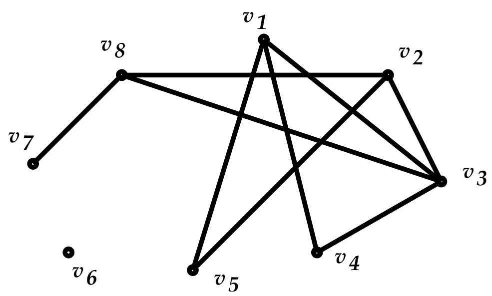
Κάθε δυάδα $G = (V(G), E(G))$, ή (V, E), ή (X, E) όπου V είναι ένα μη κενό σύνολο και E είναι ένα σύνολο από (μη διατεταγμένα) ζεύγη $\{u, v\}$, $u, v \in V$ ονομάζεται **γράφημα δεσμών**, ή **απροσανατόλιστο γράφημα**.

Τα στοιχεία του V καλούνται **κορυφές**, ή **σημεία**, ή **κόμβοι** (vertices, points), ενώ τα στοιχεία του E καλούνται **δεσμοί**, ή **γραμμές**, ή **χορδές**, ή **πλευρές**, ή **ακμές** (edges, lines).

Θα ασχοληθούμε εδώ με **πεπερασμένα γραφήματα**, (δηλαδή $|V| \in \mathbb{N}^*$). Το E μπορεί να είναι $\emptyset$. Συχνά γράφουμε $|V| = p$ ή n και $|E| = q$. Ο πληθάριθμος $|V|$ ονομάζεται **τάξη** του γραφήματος.

Αν $\{u, v\} \in E$, λέμε ότι τα u, v είναι **άκρα** του δεσμού $\{u, v\}$ ή, ισοδύναμα, ότι το u (και το v) **καλύπτει** τον δεσμό $\{u, v\}$, ή ότι ο δεσμός $\{u, v\}$ **καλύπτει** τα u και v. Αν δύο δεσμοί έχουν κοινή μια κορυφή, λέμε ότι είναι **γειτονικοί**.

Παράδειγμα: Η δυάδα $G = (V, E)$ όπου $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ και $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_8\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_8\}, \{v_7, v_8\}\}$ είναι ένα γράφημα δεσμών. Η γραφική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:



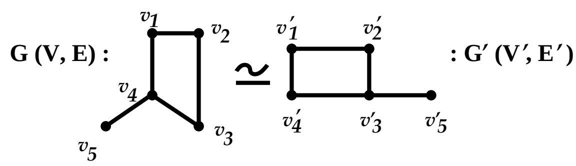
Αν οι x, y ταυτίζονται έχουμε ένα **βρόχο**.

Παρατήρηση: Δεδομένου ότι σε ένα σύνολο επιτρέπεται μία μόνο εμφάνιση κάθε στοιχείου του, από τον ορισμό του γραφήματος δεσμών προκύπτει ότι σε αυτό δεν επιτρέπονται ούτε βρόχοι, ούτε πολλαπλοί δεσμοί που να συνδέουν το ίδιο ζεύγος κορυφών. Τα γραφήματα αυτά ονομάζονται **απλά γραφήματα** και με τέτοια θα ασχοληθούμε, εκτός αν αναφερθεί ρητά το αντίθετο.

ΙΣΟΜΟΡΦΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Τα γραφήματα δεσμών $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ ονομάζονται **ισόμορφα** αν και μόνο αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : V \to V'$, με $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. Αν δύο γραφήματα G και G' είναι ισόμορφα, θα γράφουμε $G \simeq G'$.

Παραδείγματα: Τα επόμενα γραφήματα είναι ισόμορφα:



διότι για την $f : V \to V'$ με

$$\begin{aligned} f(v_1) &= v_4', \\ f(v_2) &= v_1', \\ f(v_3) &= v_2', \\ f(v_4) &= v_3', \\ f(v_5) &= v_5', \end{aligned}$$

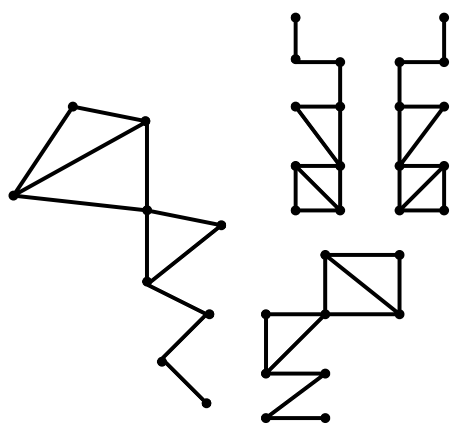
έχουμε πράγματι ότι

$$\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in E',$$

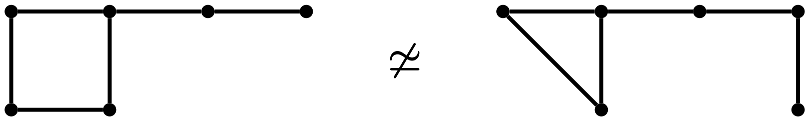
(για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} &\{v_1, v_2\} \in E \text{ και } \{v_4', v_1'\} \in E', \\ &\{v_2, v_4\} \notin E \text{ και } \{v_1', v_3'\} \notin E', \\ &\{v_4, v_5\} \in E \text{ και } \{v_3', v_5'\} \in E', \ \text{ κ.ο.κ.}). \end{aligned}$$

Τα επόμενα γραφήματα είναι όλα ισόμορφα:

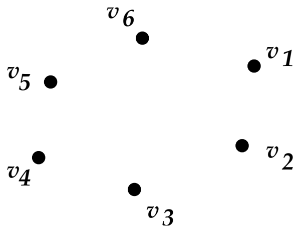


Αντίθετα τα επόμενα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα:



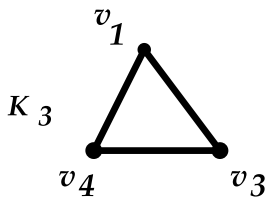
ΜΟΡΦΕΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1) **Μηδενικό γράφημα**: $G = (V, E)$ με $E = \emptyset$.
Παράδειγμα:

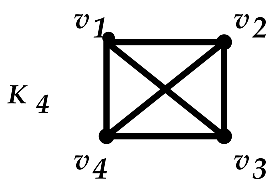


2) **Τετριμμένο γράφημα**: $G = (V, E)$ με $|V| = 1$.

3) **Πλήρες γράφημα**: $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in V$ με $x \neq y$ ισχύει ότι $\{x, y\} \in E$.
Παρατήρηση: Το πλήρες γράφημα με n κόμβους συμβολίζεται με K_n.
Παράδειγμα: Το γράφημα K_3 είναι το:



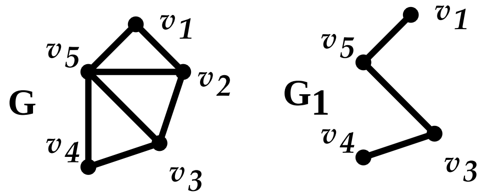
ενώ το γράφημα K_4 είναι το:



ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

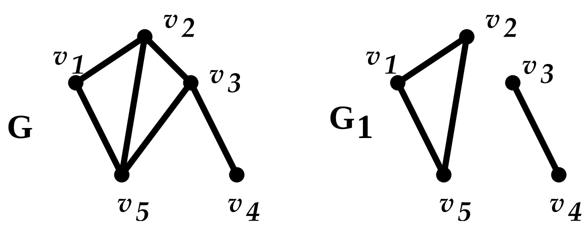
1) **Υπογράφημα** του $G = (V, E)$: Ένα γράφημα $G_1 = (V_1, E_1)$ με $V_1 \subseteq V$ και $E_1 \subseteq E$.

Παράδειγμα:



2) **Γενετικό** (ή **γεννητικό**, ή **μερικό**) **γράφημα**, ή **γράφημα ζεύξης** του $G = (V, E)$: Ένα γράφημα $G_1 = (V, E_1)$ με $E_1 \subseteq E$.

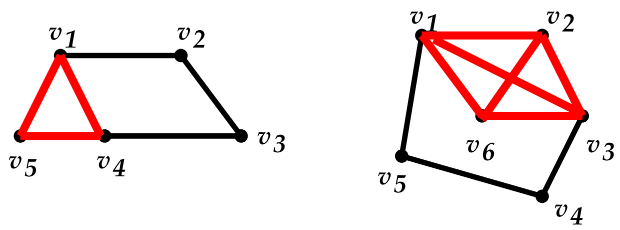
Παράδειγμα:



3) **Κλίκα**: Κάθε πλήρες υπογράφημα του G.

Μέγιστη κλίκα: Κλίκα με το μέγιστο δυνατό αριθμό κόμβων.

Παραδείγματα:

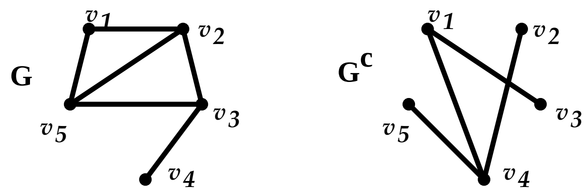


Οι μέγιστες κλίκες των δύο παραπάνω γραφημάτων είναι οι K_3 και K_4 αντίστοιχα.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

Συμπλήρωμα G^c (ή $\overline{G}$) του $G = (V, E)$ με $|V| = n$ είναι ένα γράφημα $G^c = (V, E^c)$, με $E^c = E(K_n) \setminus E(G)$.

Παράδειγμα:



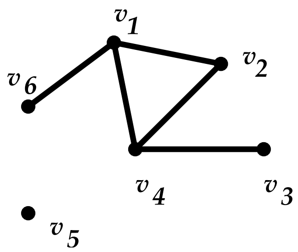
ΒΑΘΜΟΣ

Για κάθε $v \in V$ ορίζουμε $\Gamma_G(v) = \{u \in V(G) : \{v, u\} \in E(G)\}$.

Τότε $d_G(v)$, ή $d(v)$, ή $\deg(v) = |\Gamma_G(v)|$, είναι ο **βαθμός** του κόμβου v.

Δηλαδή, βαθμός του v στο G, λέγεται το πλήθος των δεσμών του G των οποίων ο v είναι άκρο.

Παράδειγμα:



Στο παραπάνω γράφημα, οι κόμβοι του έχουν τους ακόλουθους βαθμούς:

$$\begin{aligned} &d(v_1) = d(v_4) = 3, \\ &d(v_2) = 2, \\ &d(v_3) = d(v_6) = 1, \\ &d(v_5) = 0. \end{aligned}$$

Κάθε κόμβος βαθμού μηδέν λέγεται **μεμονωμένος** κόμβος.

Ένα γράφημα G λέγεται d-**κανονικό** αν $d_G(v) = d$, για κάθε $v \in V$.

Έστω $G = (V, E)$ με $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Ακολουθία βαθμών του G λέγεται η πεπερασμένη ακολουθία

$$(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)).$$

Παράδειγμα: Η ακολουθία βαθμών του παραπάνω γραφήματος είναι (3,3,2,1,1,0).

Παρατήρηση: Συνήθως γράφουμε την ακολουθία βαθμών ενός γραφήματος σε φθίνουσα τάξη.

2. ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πρόταση 1. $\sum_{i=1}^{|V|} d(v_i) = 2|E|$.

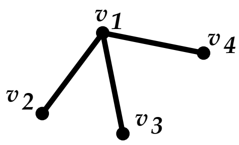
Απόδειξη: Κάθε δεσμός του γραφήματος συνεισφέρει κατά 2 στο άθροισμα των βαθμών (λόγω των άκρων του). Άρα, οι $|E|$ δεσμοί που περιέχει το γράφημα θα δημιουργούν συνολικό άθροισμα βαθμών $2|E|$. $\square$

Πόρισμα 2. *Σε κάθε γράφημα ο αριθμός κόμβων με περιττό βαθμό είναι άρτιος.*

Απόδειξη: Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}$ οι (περιττοί σε πλήθος) κόμβοι με περιττό βαθμό. Τότε το άθροισμα των βαθμών των κόμβων αυτών θα ήταν περιττό (έστω Π) ως άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών. Δεδομένου ότι το άθροισμα των βαθμών των κόμβων με άρτιο βαθμό είναι άρτιο (έστω A) ως άθροισμα άρτιων αριθμών, το συνολικό άθροισμα των βαθμών του γραφήματος θα ήταν $\Pi + A$: περιττός, το οποιο σύμφωνα με την Πρόταση 1 είναι άτοπο. Άρα το πλήθος των κόμβων με περιττό βαθμό είναι άρτιο. $\square$

Πρόταση 3. *Αν $|V| = 6$, τότε ή το G ή το G^c περιέχει τουλάχιστον ένα υπογράφημα ισόμορφο με το K_3, (δηλαδή ένα τρίγωνο).*

Απόδειξη: Έστω $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ και έστω ότι ο v_1 είναι ενωμένος με τουλάχιστον τρεις κόμβους στο G. Έστω λοιπόν: $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_4\} \in E$.



Αν $\{v_2, v_3\} \in E$ τότε οι v_1, v_2, v_3 είναι κορυφές τρίγωνου στο G.

Όμοια αν $\{v_2, v_4\} \in E$, ή $\{v_3, v_4\} \in E$.

Αν τώρα $\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\} \notin E$, τότε θα έχουμε $\{v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\} \in E^c$ και άρα οι v_2, v_3, v_4 είναι κορυφές τρίγωνου στο G^c.

Αν τέλος ο v_1 είναι ενωμένος με λιγότερους από τρεις κόμβους στο G, θα είναι ενωμένος με τουλάχιστον τρεις κόμβους στο G^c. Τότε παίρνουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα, ξεκινώντας από το G^c. $\square$

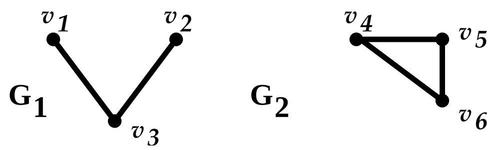
Πρόταση 4. *Αν δύο γραφήματα G, H είναι ισόμορφα, τότε:*
i) Έχουν την ίδια ακολουθία βαθμών, και μάλιστα ισχύει ότι $d_G(v) = d_H(f(v))$, για κάθε $v \in V(G)$.
ii) Έχουν ισόμορφα υπογραφήματα.

3. ΠΡΑΞΕΙΣ

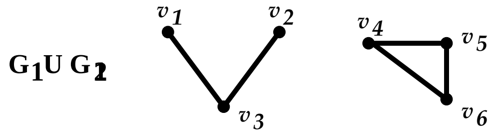
Έστω $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.

Ένωση $G = G_1 \cup G_2$ είναι το γράφημα $G = (V, E)$ με $V = V_1 \cup V_2$ και $E = E_1 \cup E_2$.

Παράδειγμα: Έστω

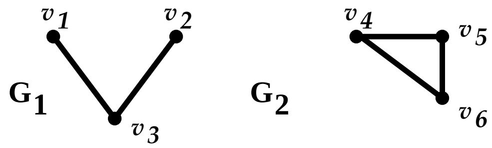


Η ένωση των γραφημάτων G_1 και G_2 είναι το γράφημα $G = G_1 \cup G_2$:

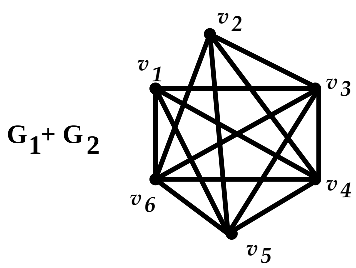


Άθροισμα $G = G_1 + G_2$ είναι το γράφημα $G = (V, E)$ με $V = V_1 \cup V_2$ και $E = E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_i, v_j\} : v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$ (δηλαδή το $G_1 + G_2$ είναι το $G_1 \cup G_2$ μαζί με όλους τους δεσμούς που ενώνουν τα στοιχεία του V_1 με στοιχεία του V_2).

Παράδειγμα: Έστω



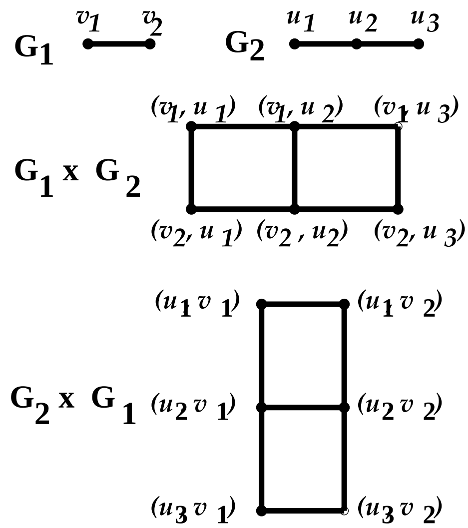
Το άθροισμα των γραφημάτων G_1 και G_2 είναι το γράφημα $G = G_1 + G_2$:



Γινόμενο $G = G_1 \times G_2$ είναι το γράφημα $G = (V, E)$ με $V = V_1 \times V_2$ και αν $\alpha = (v_1, u_1)$, $\beta = (v_2, u_2) \in V$ τότε $\{\alpha, \beta\} \in E$ αν και μόνο αν:

$$(v_1 = v_2 \text{ και } \{u_1, u_2\} \in E(G_2)), \text{ ή } (u_1 = u_2 \text{ και } \{v_1, v_2\} \in E(G_1)).$$

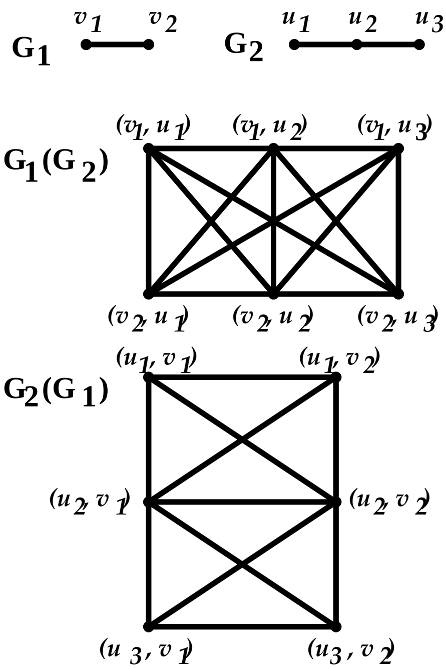
Παράδειγμα:



Σύνθεση $G = G_1(G_2)$ είναι το γράφημα $G = (V, E)$ με $V = V_1 \times V_2$ και αν $\alpha = (v_1, u_1)$, $\beta = (v_2, u_2) \in V$ τότε $\{\alpha, \beta\} \in E$ αν και μόνο αν:

$(\{v_1, v_2\} \in E(G_1))$, ή $(v_1 = v_2$ και $\{u_1, u_2\} \in E(G_2))$.

Παράδειγμα:

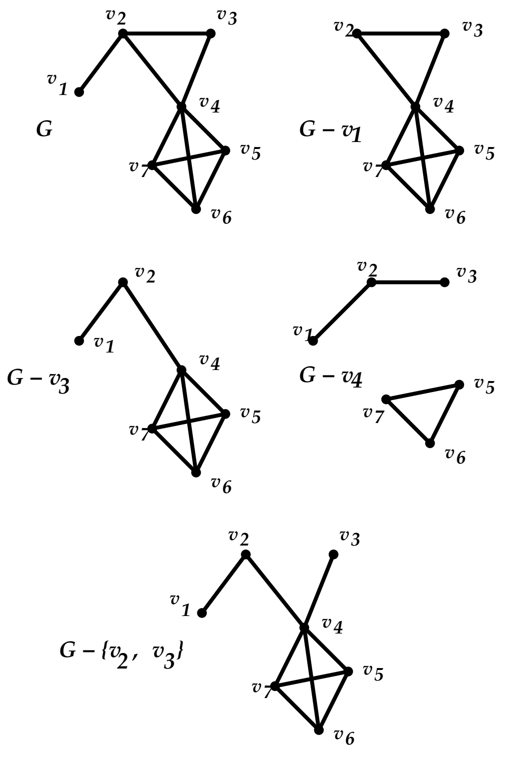


Τέλος αν $G = (V, E)$ και $v \in V$, $e \in E$ ορίζουμε τα γραφήματα $\boldsymbol{G - v}$, $\boldsymbol{G - e}$ ως εξής:

$V(G - v) = V \setminus \{v\}$, $E(G - v) = E \setminus \{e_i \in E : v \in e_i\}$, ενώ

$V(G - e) = V$, $E(G - e) = E \setminus \{e\}$.

Παραδείγματα:



4. ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

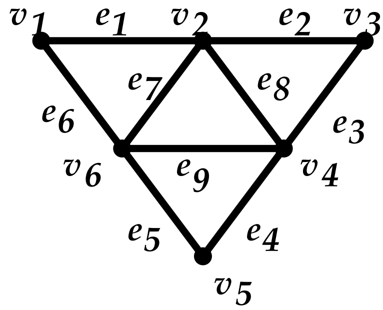
Διαδρομή που ενώνει τους κόμβους v_i, v_j ενός γράφηματος G (ή $v_i - v_j$ **διαδρομή**) είναι μια ακολουθία της μορφής $(v_i, e_{ik}, v_k, e_{kl}, v_l, \ldots, v_r, e_{rj}, v_j)$, όπου e_{st} είναι ο δεσμός του γραφήματος που ενώνει τους κόμβους v_s και v_t. (Συνήθως περιγράφουμε μια διαδρομή μόνο με τους διαδοχικούς κόμβους της: $(v_i, v_k, v_l, \ldots, v_r, v_j)$).

Μήκος μιας διαδρομής ονομάζεται το πλήθος των δεσμών της.

Αν σε μια $v_i - v_j$ διαδρομή του G κάθε δεσμός εμφανίζεται μια μόνο φορά, η διαδρομή λέγεται $v_i - v_j$ **δρόμος** του G. Αν επιπλέον, σε ένα $v_i - v_j$ δρόμο του G κάθε κόμβος εμφανίζεται μια μόνο φορά, ο δρόμος λέγεται $v_i - v_j$ **μονοπάτι** του G.

Μια $v_i - v_j$ διαδρομή ή ένας $v_i - v_j$ δρόμος του G, με $v_i = v_j$ λέγεται **κλειστή διαδρομή** του G ή **κλειστός δρόμος** του G. Τέλος, ένας κλειστός δρόμος του G μήκους n, με n κορυφές λέγεται **κύκλος** του G.

Παράδειγμα: Για το γράφημα G έχουμε:



$v_1 - v_5$ διαδρομή του G: $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_9, v_4, e_8, v_2, e_7, v_6, e_5, v_5)$, ή συντομότερα $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ δρόμος του G: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5)$.

$v_1 - v_5$ μονοπάτι του G: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_5)$.

Κλειστή διαδρομή του G: $(v_1, v_2, v_6, v_4, v_3, v_2, v_6, v_1)$.

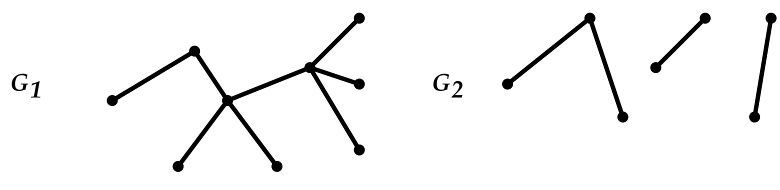
Κλειστός δρόμος του G: $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_1)$.

Κύκλος του G: $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_1)$.

Άκυκλο λέγεται ένα γράφημα που δεν έχει κύκλους.

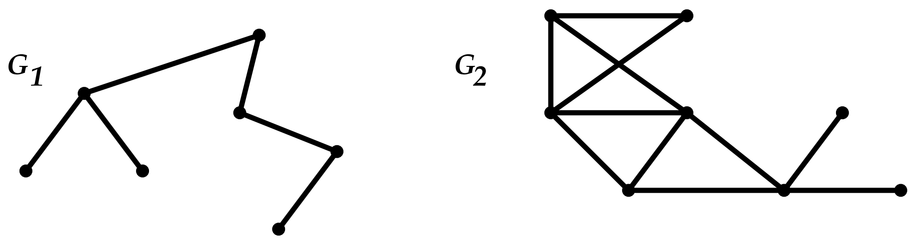
Μονοκυκλικό λέγεται ένα γράφημα που περιέχει ακριβώς έναν κύκλο.

Παραδείγματα:

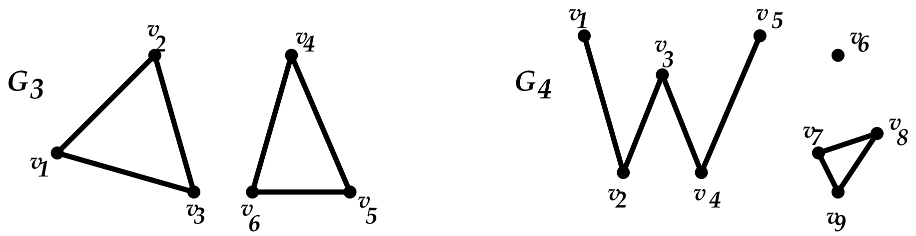


Ένα γράφημα λέγεται **συνεκτικό** αν για οποιουσδήποτε δύο κόμβους του, υπάρχει μονοπάτι που τους ενώνει.

Παραδείγματα:



Συνεκτικά γραφήματα



Μη συνεκτικά γραφήματα

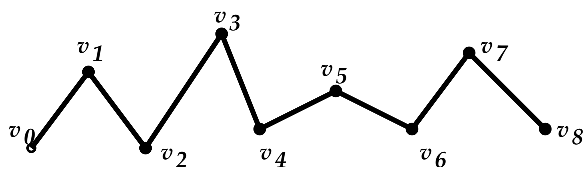
Συνιστώσα ενός γραφήματος G ονομάζεται κάθε μεγιστικό (maximal) συνεκτικό υπογράφημά του (δηλαδή κάθε συνεκτικό υπογράφημά του που δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου συνεκτικού υπογραφήματος του G).

Προφανώς τα συνεκτικά γραφήματα αποτελούνται από μια μόνο συνιστώσα: τον εαυτό τους.

Παραδείγματα: Στο προηγούμενο σχήμα οι συνιστώσες του G_3 είναι τα δύο τρίγωνα $G_{3,1}$, $G_{3,2}$ με $V(G_{3,1}) = \{v_1, v_2, v_3\}$ και $V(G_{3,2}) = \{v_4, v_5, v_6\}$ αντίστοιχα, ενώ το G_4 έχει προφανώς τρεις συνιστώσες.

Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ λέγεται $v_0 - v_n$ **μονοπάτι** (ή απλά **μονοπάτι**) μήκους n, αν $d(v_0) = d(v_n) = 1$ και $d(v_i) = 2$, για κάθε $i \neq 0, n$.

Παράδειγμα:

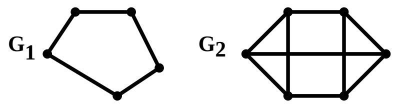


Μονοπάτι μήκους 8

Ένα συνεκτικό 2-κανονικό γράφημα λέγεται **κύκλος**, ενώ ένα 3-κανονικό γράφημα λέγεται **κυβικό γράφημα**.

Ο κύκλος με n κορυφές συμβολίζεται με C_n.

Παραδείγματα:

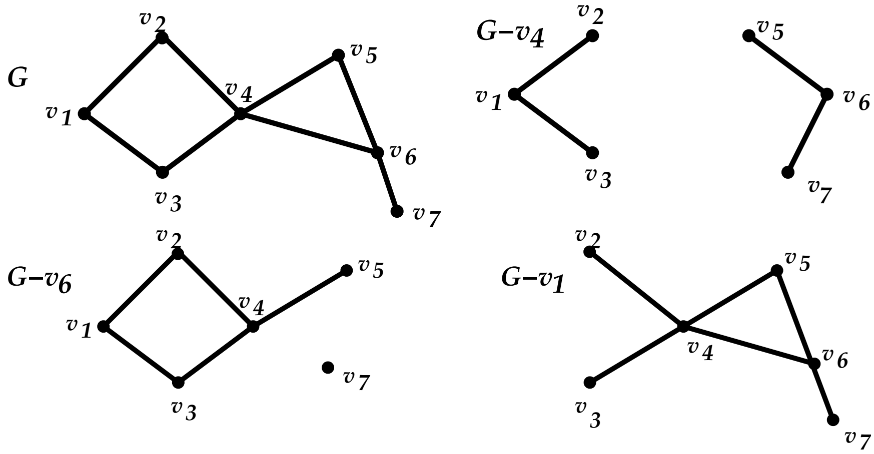


Τα γραφήματα G_1, G_2 είναι ο κύκλος C_5 και ένα κυβικό γράφημα αντίστοιχα.

Παρατήρηση: Παρατηρήστε τη διαφορά ανάμεσα στους ορισμούς «μονοπάτι γραφήματος» και «κύκλος γραφήματος» που δόθηκαν νωρίτερα και στους ορισμούς των γραφημάτων «μονοπάτι» και «κύκλος» που δίνονται εδώ.

Κλείδωση (ή **σημείο κοπής**) ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $v \in V$ τέτοιο ώστε $G - v$: μη συνεκτικό.

Παραδείγματα: Οι κόμβοι v_4, v_6 του παρακάτω γραφήματος G είναι κλειδώσεις, ενώ ο v_1 δεν είναι.

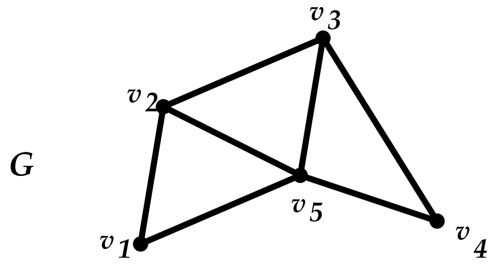


Προφανώς, κλειδώσεις ενός μη συνεκτικού γραφήματος G ονομάζονται οι κλειδώσεις των συνιστωσών του G.

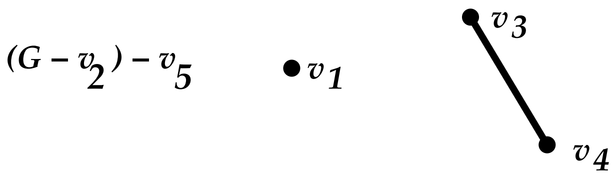
Σύνολο κλειδώσεων ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ τέτοιο ώστε το $(((G - v_1) - v_2) - \cdots) - v_n$ να είναι μη συνεκτικό.

Παρατήρηση: Συνήθως μας ενδιαφέρουν τα ελάχιστα σύνολα κλειδώσεων. Αν ένα ελάχιστο σύνολο κλειδώσεων ενός γραφήματος έχει πληθάριθμο k, τότε το γράφημα λέγεται **k-συνεκτικό**.

Παράδειγμα: Το γράφημα



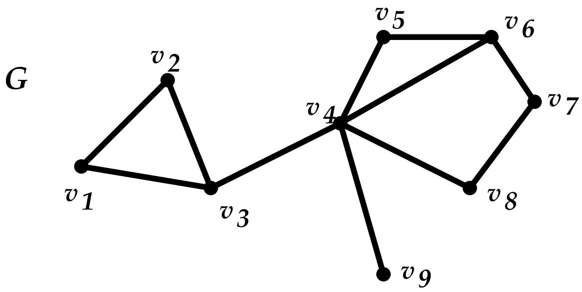
είναι 2-συνεκτικό, αφού το σύνολο $\{v_2, v_5\}$ είναι ένα ελάχιστο σύνολο κλειδώσεων:



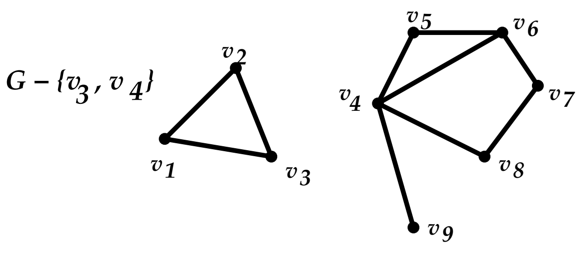
Ισθμός (ή **γέφυρα**) ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται κάθε $e \in E$ τέτοιος ώστε $G - e$: μη συνεκτικό.

Παράδειγμα:

Για το γράφημα



ο $\{v_3, v_4\}$ είναι γέφυρα, αφού το γράφημα

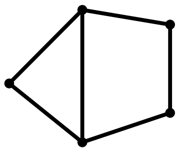


είναι μη συνεκτικό.

Προφανώς, ισθμοί ενός μη συνεκτικού γραφήματος G ονομάζονται οι ισθμοί των συνιστωσών του G.

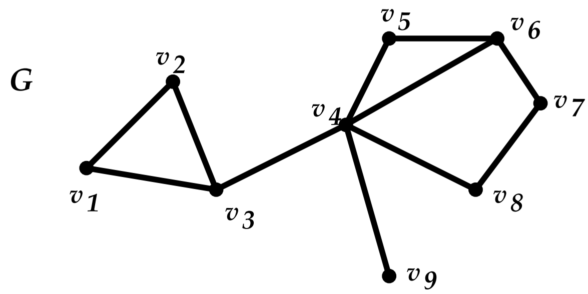
Ένα μη τετριμμένο, συνεκτικό γράφημα χωρίς κλειδώσεις λέγεται **μη διαχωρίσιμο** (ή **συμπαγές**, ή **δισυνεκτικό**).

Παράδειγμα: Το παρακάτω γράφημα είναι μη διαχωρίσιμο:

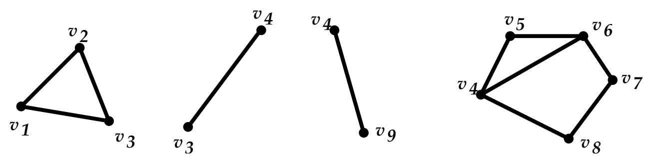


Αν το H είναι ένα μεγιστικό μη διαχωρίσιμο υπογράφημα του G (δηλαδή το H δεν είναι υπογράφημα κάποιου άλλου μη διαχωρίσιμου υπογραφήματος του G) τότε λέγεται **μπλοκ** (ή **δισυνεκτική συνιστώσα**) του G.

Παράδειγμα: Τα μπλοκ του γραφήματος



είναι τα



Προταση 5. *Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και $v \in V$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
i) Ο κόμβος v είναι κλείδωση του G.
ii) Υπάρχει μια διαμέριση του $V \setminus \{v\}$ σε υποσύνολα U, W τέτοια ώστε, για κάθε $u \in U$ και για κάθε $w \in W$ ο κόμβος v ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.
iii) Υπάρχουν κόμβοι u, w διάφοροι του v τέτοιοι ώστε ο v ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.

Προταση 6. *Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα και $e \in E$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
i) Ο δεσμός e είναι ισθμός.
ii) Ο δεσμός e δεν ανήκει σε κανένα κύκλο του G.
iii) Υπάρχει διαμέριση του V σε U, W τέτοια ώστε για κάθε $u \in U$, $w \in W$ ο δεσμός e ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.
iv) Υπάρχουν $u, w \in V$ τέτοιοι ώστε ο δεσμός e ανήκει σε κάθε $u - w$ μονοπάτι.

Απόσταση $d(u,v)$ μεταξύ δύο κόμβων u,v μιας συνιστώσας του G ονομάζεται το ελάχιστο μήκος μεταξύ όλων των διαδρομών που τους συνδέουν.

Μερικοί συγγραφείς γενικεύουν τον παραπάνω ορισμό, ορίζοντας ως απόσταση δύο κόμβων που ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες ενός μη συνεκτικού γραφήματος το ∞.

Γεωδαισικό λέγεται κάθε $u-v$ μονοπάτι ενός γραφήματος G, με μήκος ίσο με $d(u,v)$.

Διάμετρος $d(G)$ ενός συνεκτικού γραφήματος G λέγεται το μήκος του μεγαλύτερου γεωδαισικού του, (δηλαδή η μεγαλύτερη απόσταση ανάμεσα σε όλα τα δυνατά ζεύγη κόμβων).

Εκκεντρότητα $e(v)$ ενός κόμβου v ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι η $\max\limits_{u\in V(G)} d(u,v)$.

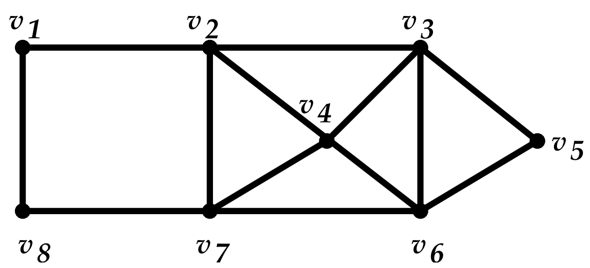
Παρατήρηση: Προφανώς $d(G)=\max\limits_{v\in V(G)} e(v)$.

Ακτίνα $r(G)$ ενός συνεκτικού γραφήματος G είναι η ελάχιστη εκκεντρότητα, ανάμεσα σε όλους τους κόμβους του G, δηλαδή $r(G)=\min\limits_{v\in V(G)} e(v)$.

Ο v λέγεται **κεντρικός κόμβος** του συνεκτικού γραφήματος G, αν $e(v)=r(G)$.

Κέντρο του συνεκτικού γραφήματος ονομάζεται το σύνολο των κεντρικών του κόμβων.

Παράδειγμα:



$d(v_1,v_6)=3$.
(v_1,v_2,v_4,v_6): γεωδαισικό, (v_1,v_2,v_7,v_6): γεωδαισικό.
(v_1,v_2,v_4,v_7,v_6): όχι γεωδαισικό.
$d(G)=3$.
$e(v_1)=e(v_3)=e(v_5)=e(v_6)=e(v_8)=3$.
$e(v_2)=e(v_4)=e(v_7)=2$.
$r(G)=2$.
Κέντρο του $G=\{v_2,v_4,v_7\}$.

ΓΡΑΦΗΜΑ EULER

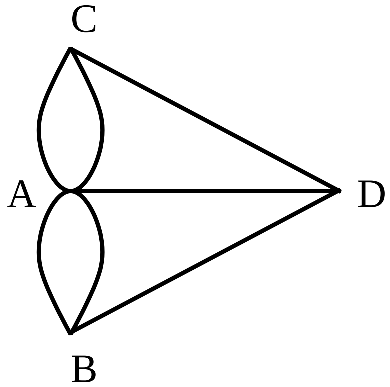
Αν υπάρχει (τουλάχιστον) ένας δρόμος του γραφήματος G, ο οποίος χρησιμοποιεί όλους τους δεσμούς του G, λέγεται **δρόμος Euler**. Αν το G περιέχει ένα κλειστό δρόμο Euler, τότε λέγεται **γράφημα Euler**.

Πρόταση 7.

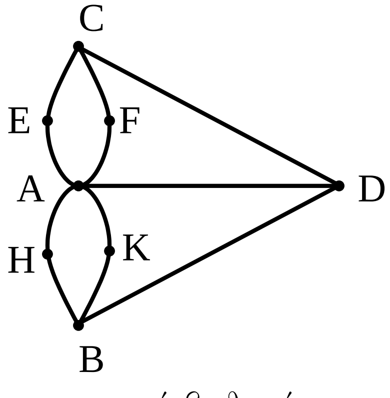
i) Έστω G ένα συνεκτικό γράφημα που περιέχει τουλάχιστον ένα δρόμο Euler. Τότε περιέχει το πολύ δύο κόμβους περιττού βαθμού. Αν περιέχει δύο τέτοιους κόμβους v_1, v_2, τότε όλοι οι δρόμοι Euler του G είναι $v_1 - v_2$ δρόμοι.

ii) Ένα συνεκτικό γράφημα G είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν όλοι οι κόμβοι του έχουν άρτιο βαθμό. Στην περίπτωση αυτή, όλοι οι δρόμοι Euler του G είναι κλειστοί.

Παρατήρηση: Η Πρόταση 7 i) δίνει και την (αρνητική) απάντηση στο πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg, που παρουσιάστηκε στην εισαγωγή, αφού το γράφημα

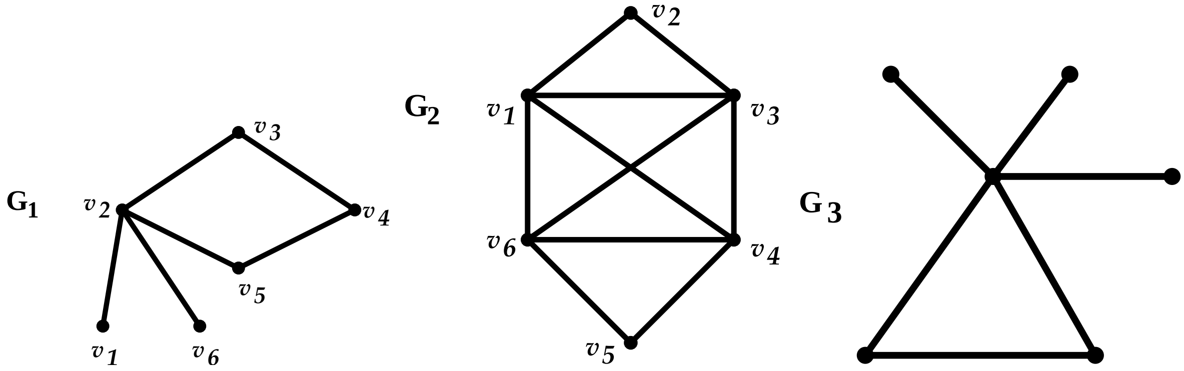


ή, αυστηρότερα, το γράφημα



έχει πάνω από δύο κόμβους περιττού βαθμού.

Παραδείγματα:



Το γράφημα G_1 περιέχει το δρόμο Euler

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_2, v_6)$$

αλλά δεν είναι γράφημα Euler, (αφού περιέχει και κόμβους περιττού βαθμού).

Το γράφημα G_2 (του οποίου όλοι οι κόμβοι έχουν άρτιο βαθμό) είναι γράφημα Euler, αφού περιέχει τον κλειστό δρόμο Euler

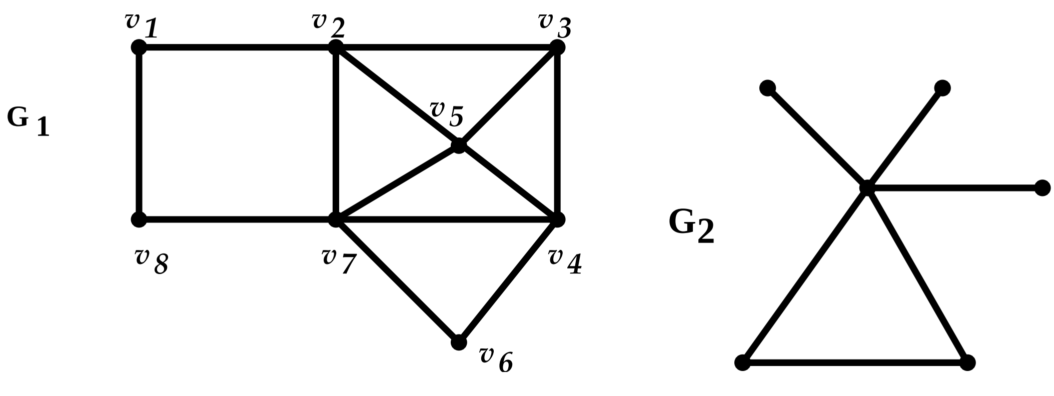
$$(v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_3, v_6, v_4, v_5, v_6).$$

Το γράφημα G_3 δεν περιέχει δρόμο Euler, (αφου περιέχει πάνω από δύο κόμβους περιττού βαθμού.

ΓΡΑΦΗΜΑ HAMILTON

Ένας κύκλος του G ο οποίος διέρχεται από όλους τους κόμβους του G λέγεται **κύκλος Hamilton**. Αν το G περιέχει ένα κύκλο Hamilton, λέγεται **γράφημα Hamilton**.

Παραδείγματα:



Το γράφημα G_1 είναι γράφημα Hamilton, αφού περιέχει τον κύκλο Hamilton $(v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_1)$, ενώ το γράφημα G_2 δεν είναι γράφημα Hamilton, αφού προφανώς δεν περιέχει ένα κύκλο Hamilton.

5. ΔΙΜΕΡΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Ένα γράφημα G λέγεται **διμερές** αν το V μπορεί να διαμεριστεί σε δύο υποσύνολα V_1, V_2 τέτοια ώστε κάθε $e \in E$ ενώνει ένα κόμβο του V_1 με ένα κόμβο του V_2.

Προταση 8. *Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν όλοι οι κύκλοι του είναι άρτιου μήκους.*

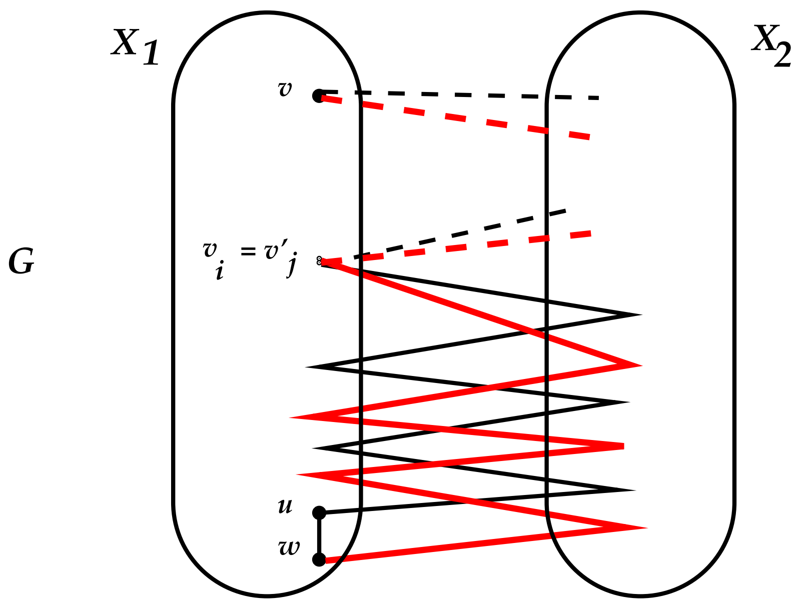
Απόδειξη: *Ευθύ*: Έστω G διμερές, με $V = V_1 \cup V_2$, ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) και $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ ένας κύκλος του με $v_1 \in V_1$. Αφού σε κάθε «βήμα» πηγαίνουμε από το ένα σύνολο κόμβων στο άλλο και αφού καταλήγουμε στο ίδιο σύνολο V_1 από το οποίο ξεκινήσαμε θα έχουμε κάνει άρτιο αριθμό «βημάτων», δηλαδή ο κύκλος θα έχει άρτιο μήκος.

Αντίστροφο: Έστω G συνεκτικό (διαφορετικά, εργαζόμαστε αντίστοιχα σε κάθε συνιστώσα του). Έστω $v_1 \in V$. Διαμερίζουμε το V σε V_1, V_2 ως εξής: Το V_1 αποτελείται από το v_1 και όλους τους κόμβους του V που απέχουν άρτια απόσταση από το v_1, ενώ $V_2 = V \setminus V_1$. Θα δείξουμε ότι κάθε $\{u, w\}$ του $E(G)$ ενώνει ένα κόμβο του V_1 με ένα κόμβο του V_2, (οπότε το G είναι πράγματι διμερές).

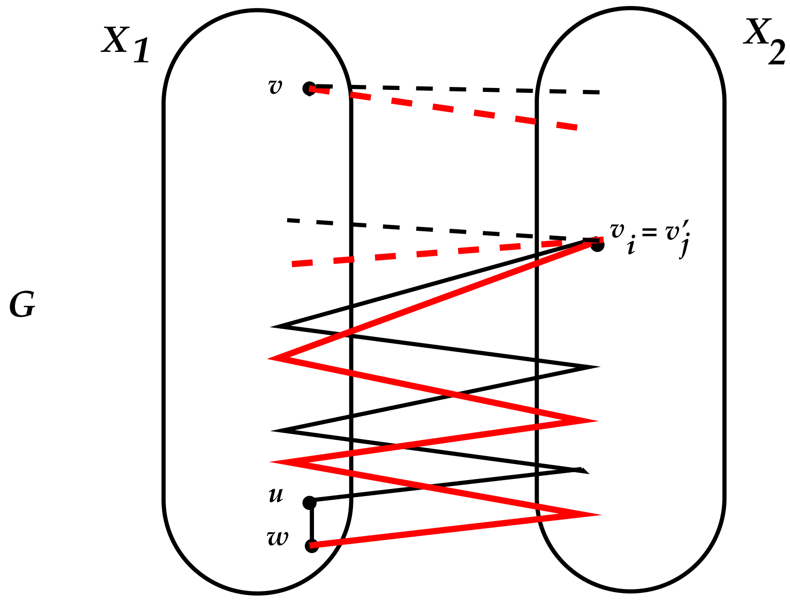
Πράγματι, αν ο $\{u, w\}$ ένωνε δύο κόμβους του V_1 (ή, όμοια, του V_2), τότε έστω

$$(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k = u) \text{ και } (v_1, v_2', \ldots, v_{\lambda-1}', v_\lambda' = w)$$

τα συντομότερα $v_1 - u$ και $v_1 - w$ μονοπάτια, τα οποία θα ήταν άρτιου μήκους (αφού αρχίζουν και τελειώνουν στο ίδιο σύνολο V_1). Άρα k, λ: περιττοί. Έστω $v_i = v_j'$ ο τελευταίος κοινός κόμβος των μονοπατιών αυτών. Τότε ο κύκλος $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k = u, w = v_\lambda', \ldots, v_{j+1}', v_j')$ έχει μήκος: $(k-i)+1+(\lambda-j) = (k+\lambda)-(i+j)+1$. Αλλά οι i, j είναι και οι δύο περιττοί (αν $v_i = v_j' \in V_1$), ή και οι δύο άρτιοι (αν $v_i = v_j' \in V_2$). Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, $i + j$: άρτιος. Επίσης $k + \lambda$: άρτιος (αφού k, λ: περιττοί). Άρα το μήκος του παραπάνω κύκλου είναι περιττό. Άτοπο.



ή

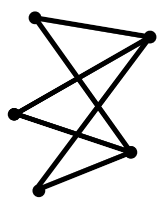


$\square$

Χρησιμοποιήσαμε ήδη το συμβολισμό K_n για το πλήρες γράφημα με n κόμβους. Με $K_{n,m}$ συμβολίζουμε ένα διμερές γράφημα $G = (V, E)$ με $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $|V_1| = n$, $|V_2| = m$ και τέτοιο ώστε: για κάθε $v \in V_1$ και για κάθε $u \in V_2$ να ισχύει ότι $\{v, u\} \in E$.

Παράδειγμα:

$K_{3,2}$



6. ΕΠΙΠΕΔΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

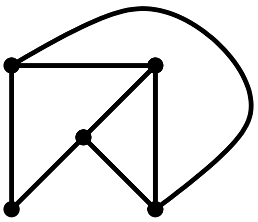
Επίπεδο γράφημα λέγεται ένα γράφημα που μπορεί να απεικονισθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε:

α) Οι κόμβοι του να είναι διακεκριμένα σημεία.

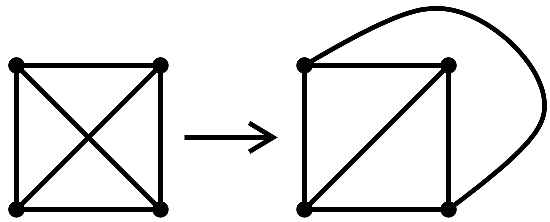
β) Οι δεσμοί του να είναι απλές, επίπεδες καμπύλες.

γ) Κάθε ζεύγος δεσμών (αν συναντιούνται), συναντιούνται μόνο στους κόμβους.

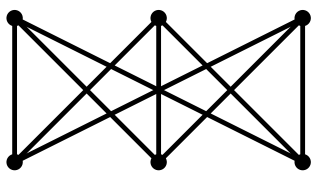
Παράδειγμα:



Επίπεδο γράφημα



Επίπεδο γράφημα



Μη επίπεδο γράφημα

Επίπεδο τοπολογικό γράφημα λέγεται ένα επίπεδο γράφημα που έχει ήδη απεικονισθεί στο επίπεδο, έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες α), β) και γ).

Παράδειγμα: Το πρώτο από τα παραπάνω γραφήματα είναι επίπεδο τοπολογικό γράφημα. Η πρώτη μορφή του δεύτερου γραφήματος δεν είναι επίπεδο τοπολογικό γράφημα, ενώ η δεύτερη είναι.

Παρατήρηση: Στο "**πρόβλημα σύνδεσης**" το ερώτημα που τίθεται (κατά πόσον κάποιοι κόμβοι μπορούν να συνδεθούν με κάποιους άλλους χωρίς να υπάρχουν "διασταυρώσεις") είναι ουσιαστικά το ερώτημα: κατά πόσον το προκύπτον γράφημα είναι επίπεδο. (Εφαρμογές: Πληροφορική, ηλεκτρολογία (συνδεσμολογίες), συγκοινωνίες κ.λπ.).

Ένα θεώρημα σχετικό με το θέμα αυτό (ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είνα ένα γράφημα μη επίπεδο) είναι το διάσημο θεώρημα του Kuratowski, που θα δούμε αργότερα.

Σχετικός με το πρόβλημα σύνδεσης είναι και ο παρακάτω ορισμός:

Αριθμός διασταυρώσεων $v(G)$ ενός γραφήματος G είναι ο ελάχιστος αριθμός διασταυρώσεων των δεσμών του G ανά δύο, όταν το G ζωγραφιστεί στο επίπεδο.

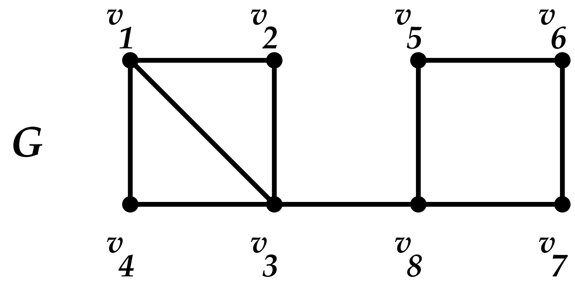
Προφανώς $v(G) = 0$ αν και μόνο αν το G είναι επίπεδο γράφημα. Έχει αποδειχθεί ότι ο αριθμός διασταυρώσεων ενός πλήρους γραφήματος K_n ικανοποιεί την ανισότητα:

$$v(K_n) \leq \frac{1}{4}[\frac{n}{2}]\,[\frac{n-1}{2}]\,[\frac{n-2}{2}]\,[\frac{n-3}{2}]$$

(και μάλιστα, για $n \leq 10$, ισχύει το ''='').

Ορίζουμε σαν **έδρες** ενός επίπεδου τοπολογικού γραφήματος G τις κλειστές περιοχές του επίπεδου που ορίζονται από του δεσμούς του γραφήματος. Η ανοιχτή περιοχή ονομάζεται **εξωτερική έδρα** του G.

Παράδειγμα:



Το γράφημα G έχει τρεις έδρες: Τα ''τρίγωνα'' που ορίζονται από τους κύκλους (v_1, v_2, v_3, v_1) και (v_1, v_3, v_4, v_1) και το ''τετράγωνο'' που ορίζεται από τον κύκλο $(v_5, v_6, v_7, v_8, v_5)$.

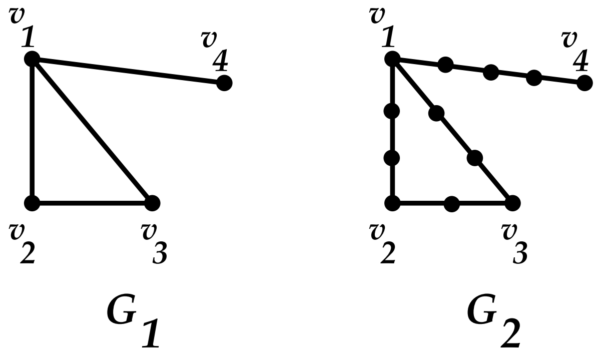
ΠΡΟΤΑΣΗ 9 (Τύπος του Euler). *Έστω G ένα συνεκτικό επίπεδο τοπολογικό γράφημα με $f(G)$ έδρες (συμπεριλαμβανόμενης και της εξωτερικής). Τότε*

$$|V(G)| - |E(G)| + f(G) = 2.$$

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο γράφημα G έχουμε:
$|V(G)| = 8$, $|E(G)| = 10$, $f(G) = 4$ και πράγματι $8 - 10 + 4 = 2$.

Εάν ένα γράφημα G_2 προκύπτει από ένα γράφημα G_1 με αντικατάσταση ενός ή περισσότερων δεσμών του G_1 από ένα μονοπάτι μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων (δηλαδή, με την παρεμβολή νέων κόμβων), τότε το G_2 λέγεται **εκλέπτυνση** ή **υποδιαίρεση** του G_1.

Παράδειγμα:



Το G_2 είναι μια εκλέπτυνση του G_1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10 (Θεώρημα Kuratowski). *Ένα γράφημα είναι μη επίπεδο αν και μόνο αν έχει ένα υπογράφημα που είναι εκλέπτυνση του K_5 ή του $K_{3,3}$.*

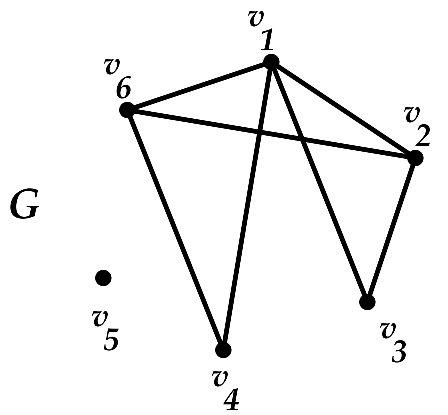
7. ΜΗΤΡΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΔΕΣΜΩΝ

Έστω $G = (V, E)$. Ορίζουμε την $|V| \times |V|$ μήτρα (πίνακα) M_G ή M του G ως εξής:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{αν } \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Η μήτρα αυτή ονομάζεται **μήτρα (γειτονικότητας) του γραφήματος δεσμών**.

Παράδειγμα: Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις:

1. Η μήτρα M είναι προφανώς συμμετρική.
2. Ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{|V|} m_{ij} = \sum_{j=1}^{|V|} m_{ji} = d(v_i)$$

(δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της i στήλης και με τον βαθμό του κόμβου v_i).

Έστω M η μήτρα ενός γραφήματος G. Ονομάζουμε **φάσμα** του γραφήματος G (και γράφουμε spec G) τις ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές τιμές) λ_i της μήτρας M, συνοδευόμενες από την πολλαπλότητά τους μ_i. Δηλαδή,

$$specG = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_k \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση: Επειδή η M είναι συμμετρική μήτρα, βάσει γνωστού θεωρήματος της Άλγεβρας οι ιδιοτιμές της θα είναι πραγματικοί αριθμοί.

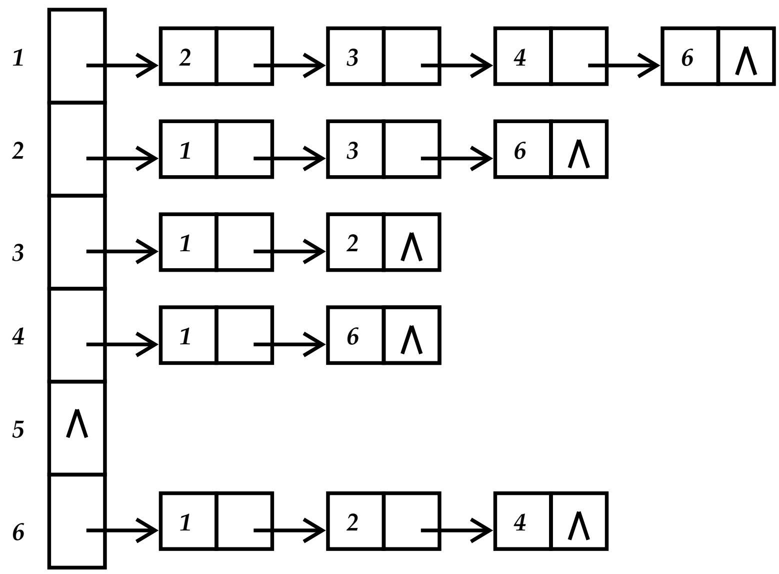
Για να εκφραστούν και να υλοποιηθούν σαφέστερα κάποιοι αλγόριθμοι στον υπολογιστή, χρησιμοποιούνται και οι **λίστες γειτονικότητας**.

Σ' αυτές, κάθε γραμμή (λίστα) αντιστοιχεί σε ένα κόμβο v_i, ο δείκτης i του οποίου εμφανίζεται ως επικεφαλής δείκτης της λίστας. Τα υπόλοιπα στοιχεία της λίστας έχουν τη μορφή

κόμβος	δείκτης

όπου στην πρώτη θέση εφανίζεται ο δείκτης ενός κόμβου που συνδέεται με τον v_i, ενώ η δεύτερη θέση συνδέεται με το επόμενο στοιχείο της λίστας (αν υπάρχει και άλλος κόμβος που συνδέεται με τον v_i) ή περιέχει ένα σύμβολο Λ (αν δεν υπάρχει άλλος κόμβος που συνδέεται με τον v_i).

Παράδειγμα: Για το γράφημα G στην αρχή της παραγράφου, η λίστα γειτονικότητας είναι:



Παρατήρηση: Σε κάθε γραμμή εμφανίζονται όλοι οι κόμβοι που συνδέονται με τον επικεφαλής κόμβο (και όχι κατ' ανάγκη μεταξύ τους).

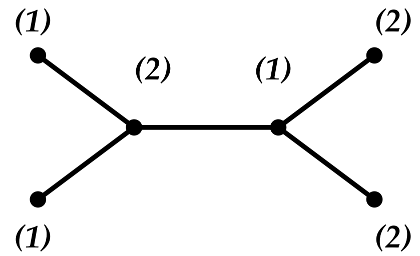
8. ΧΡΩΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Ένα γράφημα ονομάζεται r-**χρωματικό** αν οι κόμβοι του μπορούν να ‘‘χρωματισθούν’’ με r διαφορετικά χρώματα (συνήθως αντί να χρωματίζουμε, χαρακτηρίζουμε κάθε κορυφή με έναν αριθμό), έτσι ώστε κάθε δύο ενωμένοι κόμβοι να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Ο μικρότερος φυσικός r για τον οποίο το γράφημα είναι r-χρωματικό ονομάζεται **χρωματικός αριθμός** του G, και συμβολίζεται συνήθως με $\gamma(G)$.

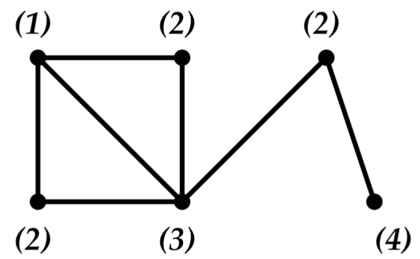
Παράδειγματα:

G_1



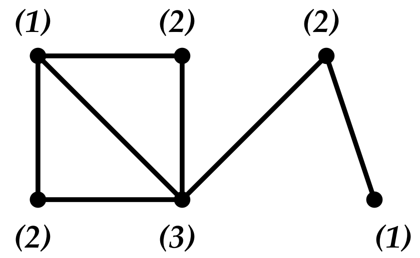
Το γράφημα G_1 είναι 2-χρωματικό με $\gamma(G_1) = 2$.

G_2



Το γράφημα G_2 είναι 4-χρωματικό, αλλά $\gamma(G_2) = 3$ αφού είναι και 3-χρωματικό (αλλά όχι 2-χρωματικό).

G_2

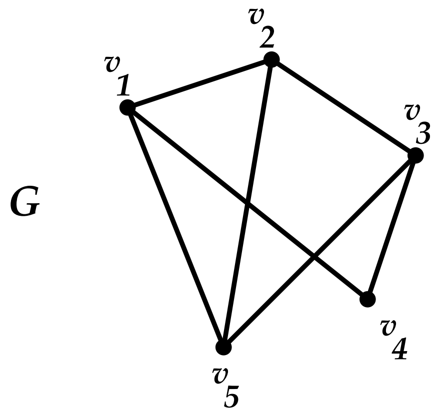


9. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΔΕΣΜΩΝ

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών. Ορίζουμε την απεικόνιση $\Gamma : V \to \mathcal{P}(V)$ με $\Gamma(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$.

Παρατήρηση: Το ζεύγος (V, Γ) ορίζει το γράφημα G ισοδύναμα με το (V, E) και γι' αυτό μπορούμε να αναφερόμαστε και στο γράφημα (V, Γ) αντί (V, E). Η Γ ονομάζεται **απεικόνιση του γραφήματος δεσμών**.

Παράδειγμα: Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η απεικόνιση Γ, με

$$\begin{aligned}
\Gamma(v_1) &= \{v_2, v_4, v_5\},\\
\Gamma(v_2) &= \{v_1, v_3, v_5\},\\
\Gamma(v_3) &= \{v_2, v_4, v_5\},\\
\Gamma(v_4) &= \{v_1, v_3\},\\
\Gamma(v_5) &= \{v_1, v_2, v_3\}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε τα εξής:

Αν $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, τότε

$$\Gamma(A) = \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_2) \cup \cdots \cup \Gamma(v_k)$$

και (αναδρομικά) για $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma^n(v) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(v)).$$

Παράδειγμα: Για το γράφημα G έχουμε:

Αν $A = \{v_1, v_2\}$ τότε $\Gamma(A) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Επίσης, $\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(v_1)) = \Gamma(\{v_2, v_4, v_5\}) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$.

10. ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ - ΚΑΛΥΨΗ

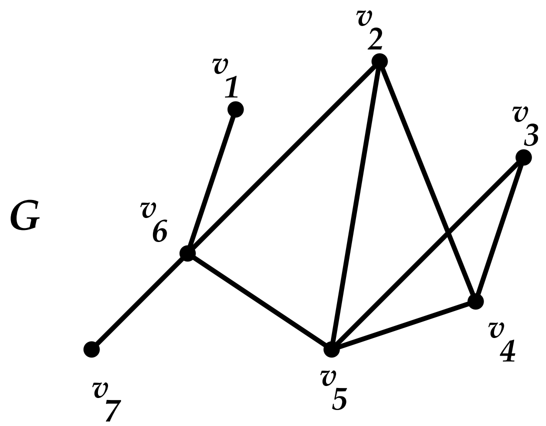
Ένα σύνολο $A \subseteq V$ σε ένα γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται **ανεξάρτητο** αν

για κάθε $v, u \in A$, $\{v, u\} \notin E$,

(δηλαδή αν οποιοιδήποτε δύο κόμβοι του δεν συνδέονται μεταξύ τους), τα δε στοιχεία του A λέγονται **ανεξάρτητοι** κόμβοι.

Ο μέγιστος αριθμός ανεξάρτητων κόμβων του G λέγεται **δείκτης ανεξαρτησίας κόμβων** του G.

Παράδειγμα: Έστω το γράφημα



Το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ δεν είναι ανεξάρτητο, διότι οι κόμβοι v_3, v_4 συνδέονται στο G. Το σύνολο $\{v_1, v_5, v_7\}$ είναι ανεξάρτητο, αλλά ο δείκτης ανεξαρτησίας κορυφών του G είναι 4, αφού και το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3, v_7\}$ είναι ανεξάρτητο, (ενώ δεν υπάρχει ανεξάρτητο υποσύνολο του V με περισσότερα στοιχεία).

Προταση 11. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και $A \subseteq V$.*

i). Το A είναι ανεξάρτητο στο G αν και μόνο αν τα στοιχεία του αποτελούν τις κορυφές μιας κλίκας του G^c.

ii). Ο δείκτης ανεξαρτησίας κόμβων του G είναι ίσος με το μέγιστο μέγεθος κλίκας του G^c.

Κάλυμμα από κόμβους ή **κ-κάλυμμα** ενός γραφήματος δεσμών $G = (V, E)$ λέγεται ένα σύνολο $B \subseteq V$, αν

για κάθε $e \in E$, υπάρχει $v \in B$ τέτοιος ώστε $v \in e$,

δηλαδή κάθε δεσμός του G καλύπτεται από (τουλάχιστον) ένα κόμβο του B.

Κάλυμμα από δεσμούς ή **δ-κάλυμμα** ενός γραφήματος δεσμών $G = (V, E)$ λέγεται ένα σύνολο $\Delta \subseteq E$, αν

για κάθε $v \in V$, υπάρχει $e \in \Delta$ τέτοιος ώστε $v \in e$,

δηλαδή αν κάθε κόμβος του G καλύπτει (τουλάχιστον) ένα δεσμό του Δ.

Ο ελάχιστος αριθμός στοιχείων σε ένα κ-κάλυμμα (αντίστοιχα σε ένα δ-κάλυμμα) λέγεται **κ-δείκτης κάλυψης** (αντίστοιχα **δ-δείκτης κάλυψης**).

Παραδείγματα:

1. Για το προηγούμενο γράφημα G, το σύνολο $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ δεν είναι κ-κάλυμμα, αφού ο δεσμός $\{v_6, v_7\}$ δεν καλύπτεται από κανένα κόμβο του B_1.

   Το σύνολο $B_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_6\}$ είναι ένα κ-κάλυμμα, αλλά ο κ-δείκτης κάλυψης του G είναι 3, αφού και το σύνολο $\{v_4, v_5, v_6\}$ είναι ένα k-κάλυμμα του G με 3 στοιχεία, (ενώ δεν υπάρχει κ-κάλυμμα του G με λιγότερα στοιχεία).
2. Για το ίδιο γράφημα G, το σύνολο $\Delta_1 = \{\{v_1, v_6\}, \{v_6, v_7\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}\}$ δεν είναι δ-κάλυμμα του G, αφού ο κόμβος v_4 δεν καλύπτει κανένα δεσμό του Δ_1.

   Το σύνολο $\Delta_2 = \{\{v_1, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_5\}\}$ είναι ένα δ-κάλυμμα του G, αλλά ο δ-δείκτης κάλυψης του G είναι 4, αφού και το σύνολο $\Delta_3 = \{\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_6, v_7\}\}$ είναι ένα δ-κάλυμμα του G με 4 στοιχεία, (ενώ δεν υπάρχει δ-κάλυμμα του G με λιγότερα στοιχεία).

Πρόταση 12. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών και $A \subseteq V$.*

i) Το A είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν το $V \setminus A$ είναι κ-κάλυμμα του G.

ii) Το άθροισμα του δείκτη ανεξαρτησίας και του κ-δείκτη κάλυψης του G ισούται με $|V|$.

11. ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΟΣΤΟΥΣ

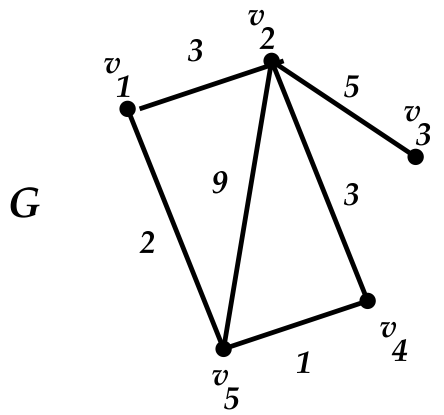
Με ένα γράφημα $G(V,E)$ μπορεί να συσχετισθεί κάποια **συνάρτηση κόστους**, δηλαδή μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$. Οι τιμές $f(\{v_i,v_j\})$ για κάθε $\{v_i,v_j\} \in E$, δίδονται αντίστοιχα και πάνω στο γράφημα.

Βασικές έννοιες, όπως ο ισομορφισμός, τα υπογραφήματα κ.λπ. μεταφέρονται κατά προφανή τρόπο στα γραφήματα με συνάρτηση κόστους.

Προφανώς, μπορούμε επίσης να ορίσουμε και την αντίστοιχη μήτρα γειτονικότητας:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} f(\{v_i,v_j\}), & \text{αν } \{v_i,v_j\} \in E \\ 0, & \text{αν } \{v_i,v_j\} \notin E. \end{cases}$$

Παράδειγμα: Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

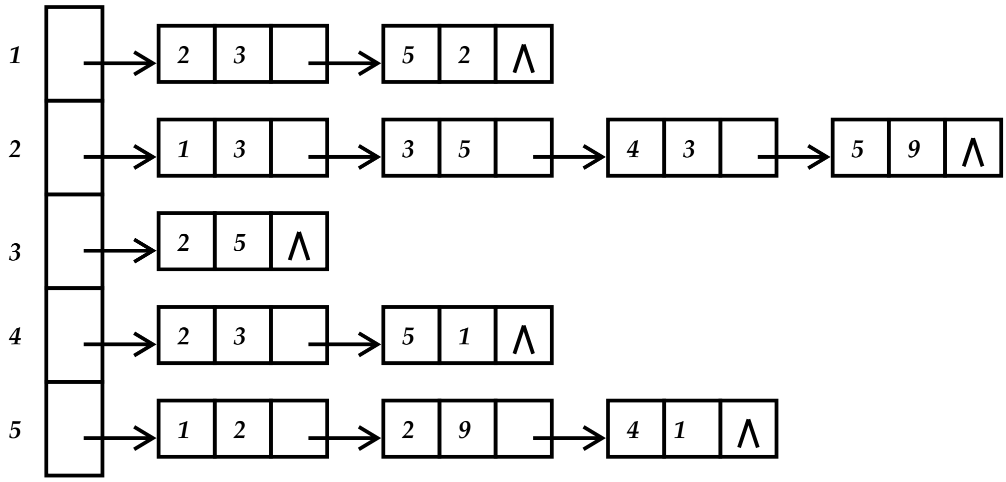
Παρατήρηση: Προφανώς τα γραφήματα χωρίς συνάρτηση κόστους μπορούν να θεωρηθούν σαν ειδική περίπτωση, όπου $f(\{v_i,v_j\}) = 1$, για κάθε $\{v_i,v_j\} \in E$.

Στην περίπτωση που το γράφημα έχει συνάρτηση κόστους, τα στοιχεία της λίστας έχουν την μορφή

κόμβος	κόστος	δείκτης

όπου στη δεύτερη θέση εμφανίζεται το κόστος του αντίστοιχου δεσμού.

Παράδειγμα: Για το γράφημα G η λίστα γειτονικότητας είναι:

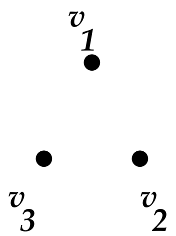


12. ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΜΕ ΚΟΡΥΦΕΣ ΜΕ ΕΠΙΓΡΑΦΗ

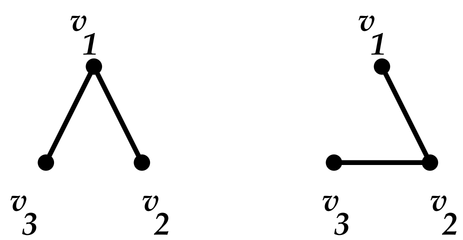
Σε κάποιες περιπτώσεις, οι κόμβοι που χρησιμοποιούνται για τα γραφήματα είναι διακεκριμένοι μεταξύ τους και φέρουν μια συγκεκριμένη ''επιγραφή'' (ή ''ετικέττα'', ή''όνομα'', ή ''ταμπέλα'') ο καθένας, οπότε ονομάζονται **γραφήματα με κορυφές με επιγραφή**.

Έτσι, ενώ τα γραφήματα

είναι ισόμορφα, δεν ισχύει το ίδιο αν ονομάσουμε τους τρεις συγκεκριμένους κόμβους:



οπότε έχουμε τα γραφήματα

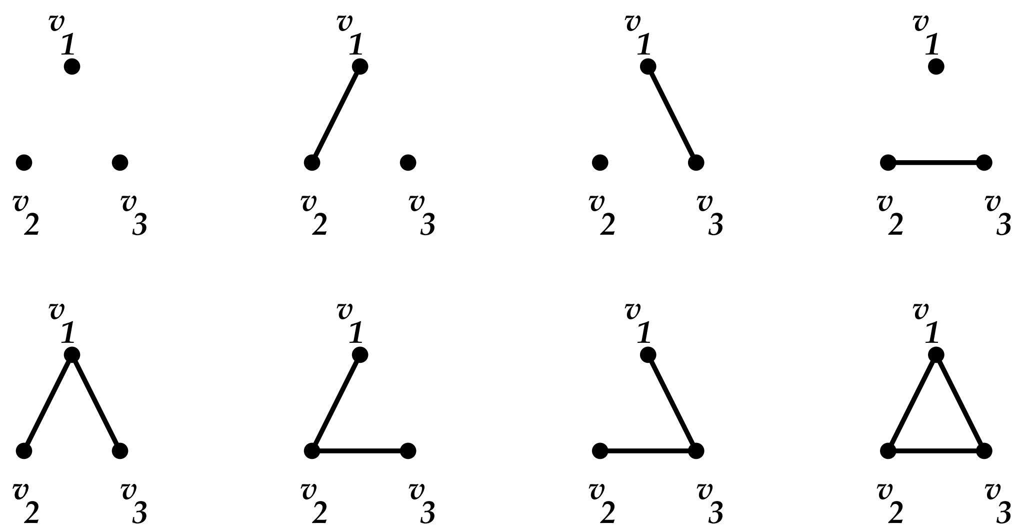


τα οποία δεν είναι ισόμορφα (αφού, προφανώς, στη περίπτωση των γραφημάτων με κορυφές με επιγραφή, πρέπει να ταυτίζονται όχι μόνο οι δεσμοί αλλά και οι ''επιγραφές'' τους).

Τώρα, ο v_1 για παράδειγμα έχει βαθμό 2 στο G_1 ενώ έχει βαθμό 1 στο G_2.

Έτσι, ενώ υπάρχουν 4 διακεκριμένα (μη ισόμορφα) γραφήματα με τρεις κόμβους:

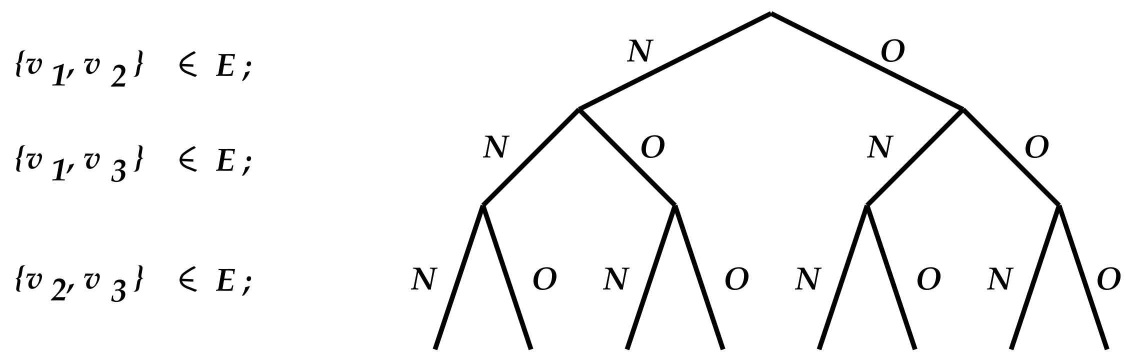
υπάρχουν 8 διακεκριμένα γραφήματα με κορυφές με επιγραφή με τρεις κόμβους:



ΠΡΟΤΑΣΗ 13. *Το πλήθος των γραφημάτων* $G = (V, E)$ *με κόμβους με κορυφές με επιγραφή είναι* $2^{\binom{|V|}{2}}$.

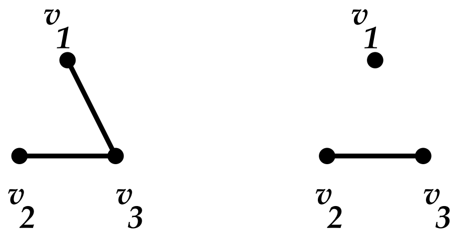
Απόδειξη: Υπάρχουν συνολικά $\binom{|V|}{2}$ ζεύγη (μη διατεταγμένα) αριθμημένων κόμβων. Για κάθε τέτοιο ζεύγος υπάρχουν δύο επιλογές: Να γραφεί ή να μην γραφεί ο δεσμός που τα ενώνει. Άρα οι επιλογές είναι $2^{\binom{|V|}{2}}$. □

Παράδειγμα: Έστω $V = \{v_1, v_2, v_3\}$.



Πλήθος $\binom{3}{2} = 3$ Πλήθος $2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8.$

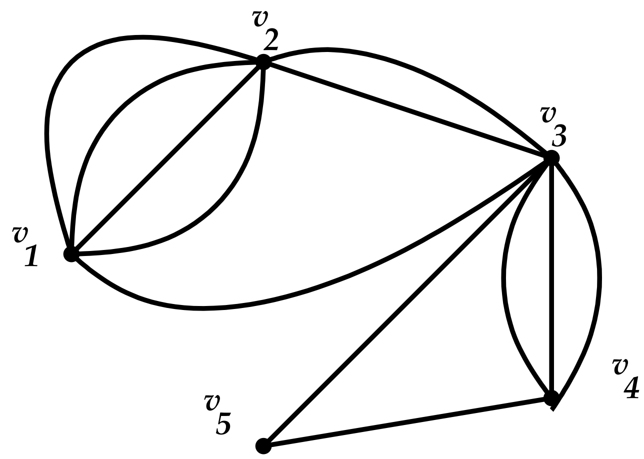
Έτσι για παράδειγμα, οι επιλογές ONN και OON δίνουν αντίστοιχα τα παρακάτω γραφήματα με κορυφές με επιγραφή:



13. p-ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΔΕΣΜΩΝ

Το διατεταγμένο ζεύγος (V, F), όπου $V \neq \emptyset$ και F είναι μια οικογένεια ζευγών $\{v, u\}$ με $v, u \in V$ τέτοια ώστε κανένα στοιχείο της δεν εμφανίζεται περισσότερες από p φορές, λέγεται p-**γράφημα δεσμών**.

Παράδειγμα: Το παρακάτω γράφημα είναι ένα 4-γράφημα δεσμών (αφού το $\{v_1, v_2\}$ εμφανίζεται 4 φορές).

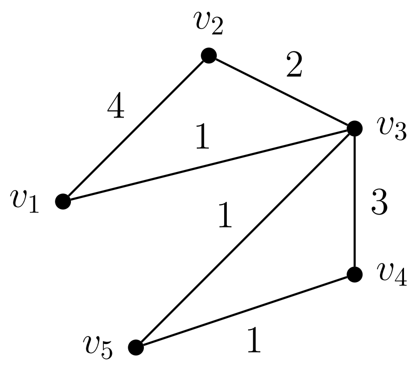


Η μήτρα του παραπάνω 4-γραφήματος είναι προφανώς η

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις:

i) Προφανώς, ένα p-γράφημα δεσμών μπορεί να θεωρηθεί και ως γράφημα με συνάρτηση κόστους, όπου το κόστος εκφράζει το πλήθος των δεσμών που ενώνουν δύο κορυφές (όπως φαίνεται άλλωστε και από τη σχετική μήτρα). Έτσι, το παραπάνω γράφημα μπορεί να περιγραφεί και μέσω του γραφήματος



ii) Για $p = 1$ παίρνουμε τα γραφήματα δεσμών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό συνεκτικό γράφημα δεσμών, με $|V(G)| \geq 2$. Να δειχθεί ότι αν $|V(G)| > |E(G)|$, τότε το G θα περιέχει τουλάχιστον ένα κόμβο βαθμού 1.

2) Να εξετασθεί αν υπάρχουν απλά γραφήματα δεσμών με τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών.

   i) (1, 3, 3, 4, 4),

   ii) (1, 1, 1, 1, 1, 1),

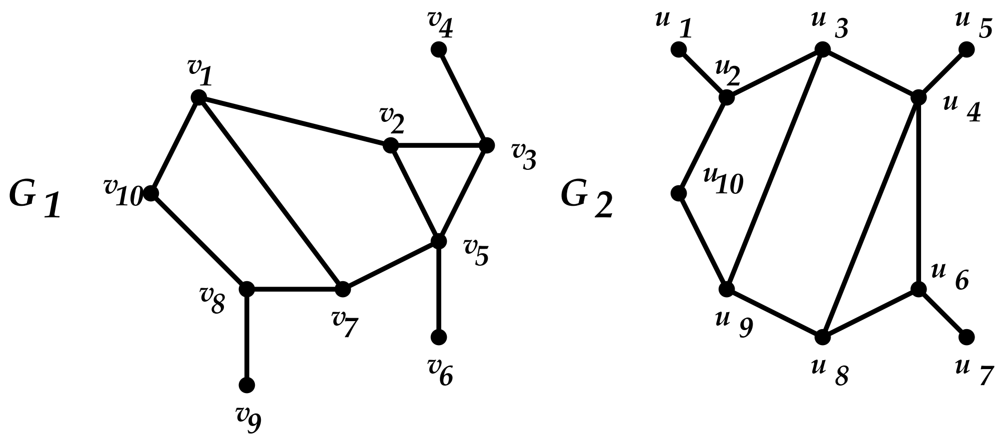
   iii) (1, 1, 2, 2, 3, 5),

   iv) (2, 2, 3, 3, 5).

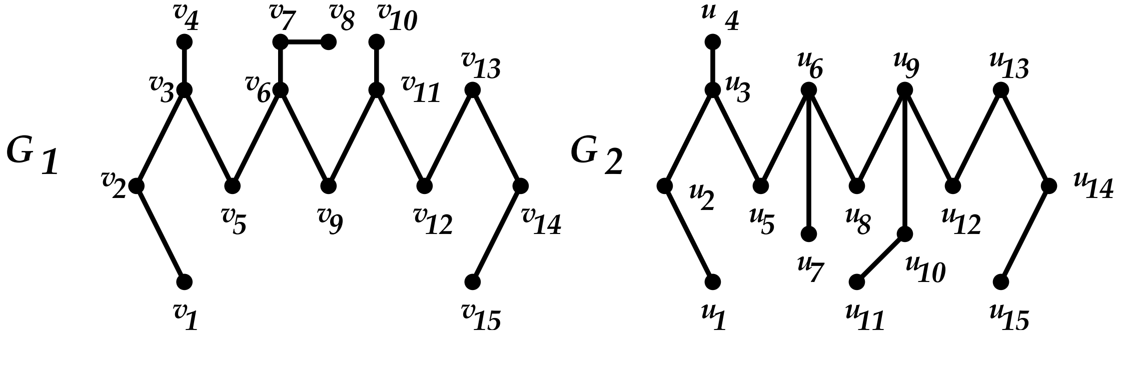
3) Να αποδειχθεί ότι σε κάθε απλό γράφημα δεσμών G, με $|V(G)| \geq 2$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο κόμβοι με τον ίδιο βαθμό.

4) Να σχεδιασθεί ένα κυβικό γράφημα (V, E) με $|V| = 2n$ (για κάποιο $n \geq 3$), το οποίο να μην περιέχει τρίγωνα.

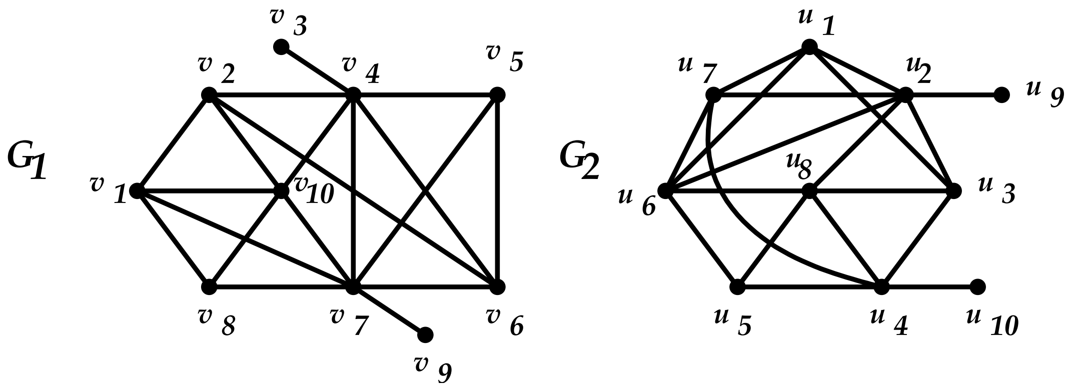
5) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω γραφήματα:



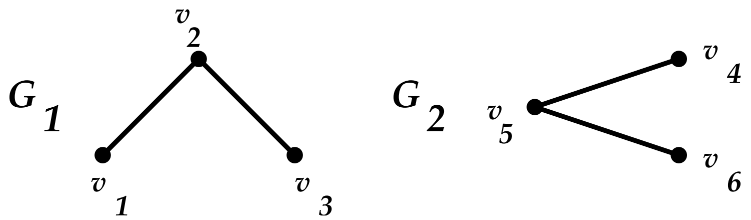
6) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω γραφήματα:



7) Να εξετασθεί αν είναι ισόμορφα τα παρακάτω γραφήματα:



8) Έστω τα γραφήματα



Να ορισθούν τα γραφήματα $G_1 \cup G_2$, $G_1 + G_2$, $G_1 \times G_2$ και $G_1(G_2)$.

9) Δίδονται τα $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$. Να βρεθούν τα $|V|$, $|E|$ συναρτήσει των $|V_1|$, $|V_2|$, $|E_1|$, $|E_2|$ όταν $G = (V, E)$ με
   i) $G = G_1 \cup G_2$
   ii) $G = G_1 + G_2$
   iii) $G = G_1 \times G_2$
   iv) $G = G_1(G_2)$.

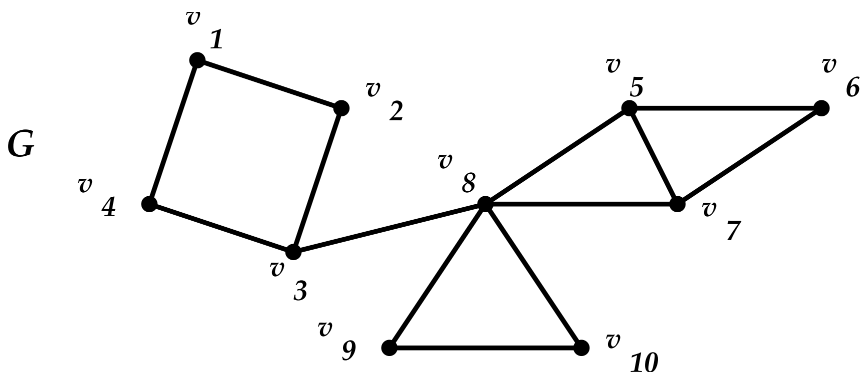
10) Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών του γραφήματος K_n.

11) Να δειχθεί ότι σε ένα απλό γράφημα δεσμών με ακριβώς δύο κόμβους περιττού βαθμού, υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους αυτούς.

12) Να δειχθεί ότι αν το G είναι μη συνεκτικό απλό γράφημα δεσμών, τότε το συμπλήρωμά του G^c είναι συνεκτικό.

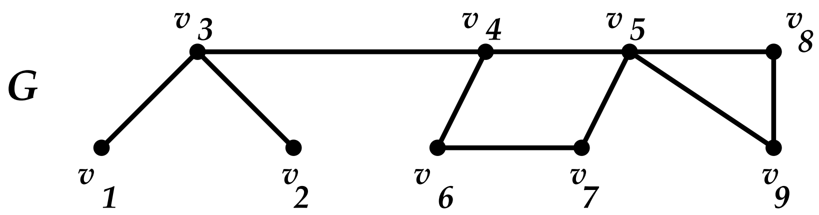
13) Να δειχθεί ότι αν ένα απλό γράφημα δεσμών $G = (V, E)$ έχει $|V| = 2n$ και όλοι οι κόμβοι του είναι βαθμού n, τότε είναι συνεκτικό.

14) Να βρεθούν τα μπλοκ του παρακάτω γραφήματος:

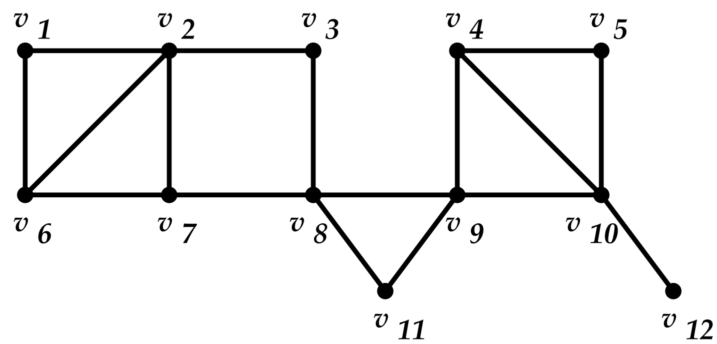


Επίσης, να εξετασθεί αν το G είναι διμερές.

15) Να βρεθεί η ακτίνα, η διάμετρος και το κέντρο του παρακάτω γραφήματος:



16) Δίδεται το γράφημα:



Να βρεθούν:

i) Η ακολουθία βαθμών του.

ii) Η διάμετρός του.

iii) Οι αποστάσεις $d(v_1, v_9)$ και $d(v_4, v_6)$.

iv) Ένα μονοπάτι του, μήκους 5.

v) Ένας κύκλος του, μήκους 5.

vi) Όλα τα $v_1 - v_8$ μονοπάτια του.

vii) Ένα δένδρο ζεύξης του.

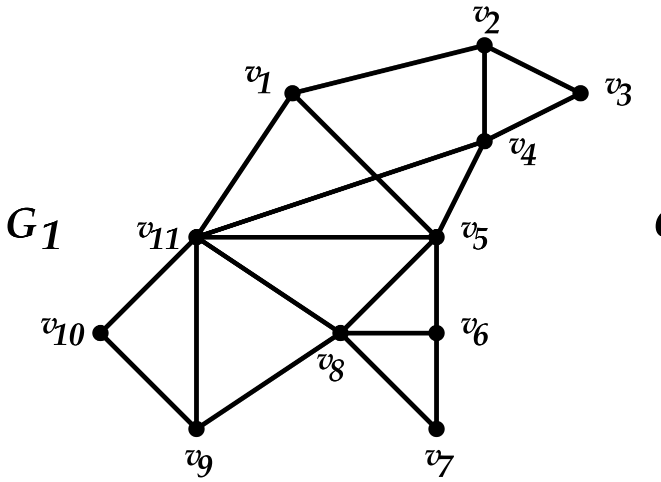
viii) Οι κλειδώσεις και οι ισθμοί του (αν υπάρχουν).

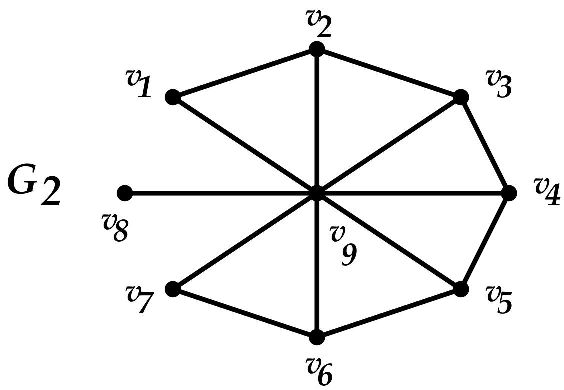
ix) Τα μπλοκ του.

x) Το κέντρο του.

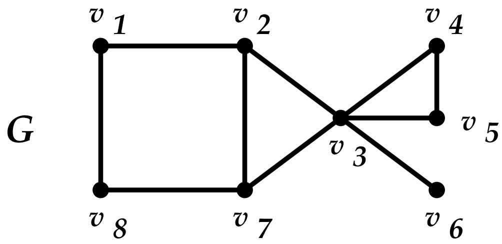
17) Να δειχθεί ότι κάθε συνεκτικό απλό γράφημα δεσμών G, με $|V(G)| \geq 2$ περιέχει τουλάχιστον δύο κόμβους που δεν είναι κλειδώσεις.

18) Να βρεθεί το ελάχιστο σύνολο κλειδώσεων για τα γραφήματα G_1 και G_2.





19) Δίνεται το γράφημα



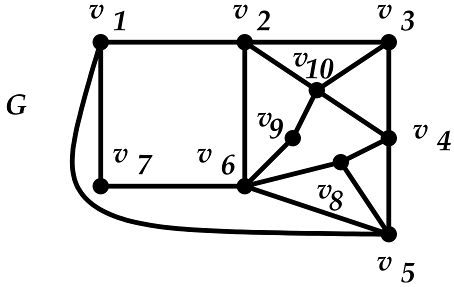
Να βρεθεί

i) Ένα σύνολο κόμβων του που το καλύπτει.

ii) Ένα ανεξάρτητο σύνολο κόμβων του.

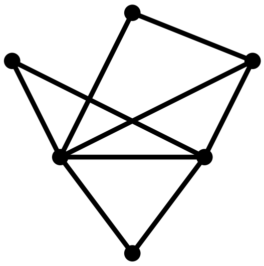
iii) Ο βαθμός ανεξαρτησίας του.

20) Να βρεθεί (αν υπάρχει) ένας κύκλος Hamilton στο παρακάτω γράφημα:

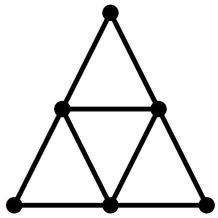


21) Να εξετασθεί αν καθένα από τα παρακάτω γραφήματα περιέχει ένα δρόμο Euler ή είναι γράφημα Euler.

G_1

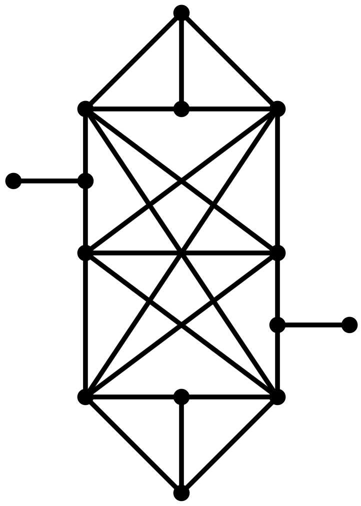


G_2



22) Να εξετασθεί αν το παρακάτω γράφημα είναι επίπεδο:

G

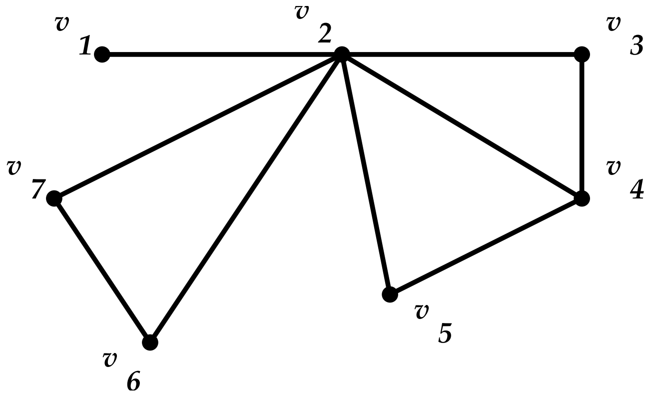


23) Δίνεται το γράφημα δεσμών (V, E) όπου $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$, με την ακόλουθη μήτρα:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί μια διαδρομή του, μήκους 4.

24) Δίνεται το γράφημα

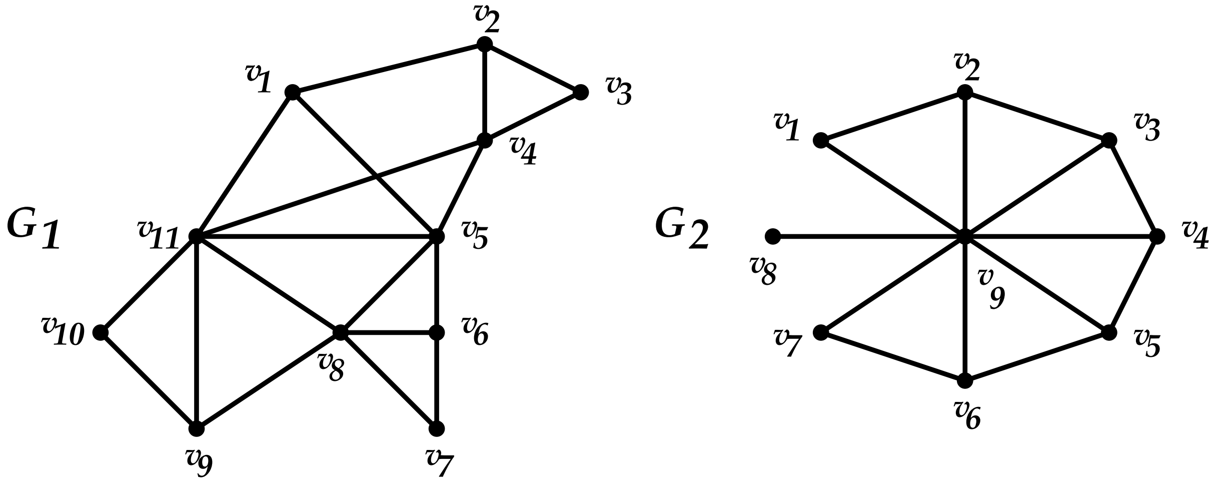


α) Να γραφεί η μήτρα του.

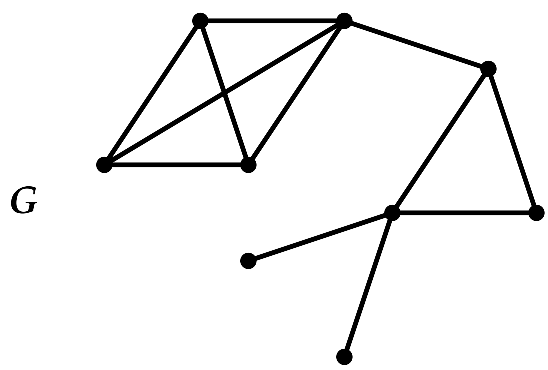
β) Να γραφεί μια διαδρομή του, μήκους 4.

25) Χρωματίζουμε κάθε δεσμό του K_6 με ένα από δύο χρώματα (είτε κόκκινο, είτε μπλε). Να δειχθεί ότι υπάρχει πάντα είτε ένα μπλε, είτε ένα κόκκινο τρίγωνο στο γράφημα αυτό.

26) Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός των παρακάτω γραφημάτων:



27) Δίδεται το γράφημα



i) Να εξετασθεί αν είναι διμερές, 5-χρωματικό, διαχωρίσιμο ή γράφημα Euler.

ii) Να βρεθεί ο χρωματικός αριθμός του.
iii) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι κλειδώσεις, οι ισθμοί και οι μέγιστες κλίκες του.

28) Να σχεδιασθεί το 4-γράφημα δεσμών, καθώς και το γράφημα δεσμών με συνάρτηση κόστους, τα οποία έχουν μήτρα γειτονικότητας

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

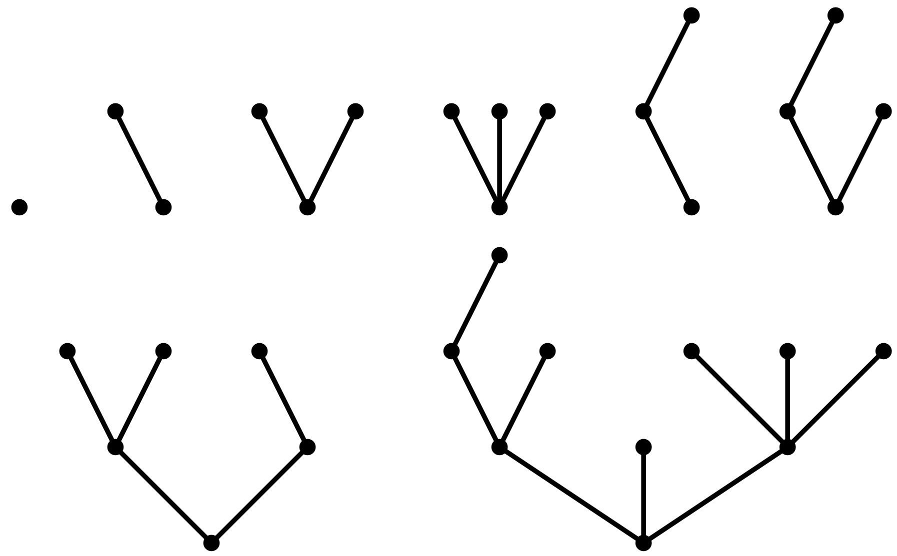
Κεφάλαιο 2

ΔΕΝΔΡΑ

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ - ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Ένα συνεκτικό άκυκλο γράφημα δεσμών λέγεται **δένδρο** (ή **ελεύθερο δένδρο**).

Παραδείγματα:

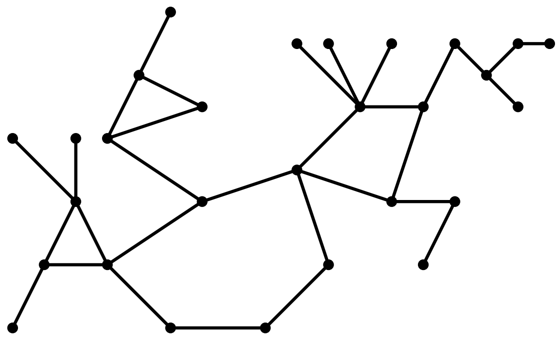


Οι κόμβοι ενός δένδρου με βαθμό 1 λέγονται **φύλλα** του δένδρου.
Μέγεθος ενός δένδρου ονομάζεται το πλήθος των δεσμών του.
Ένα άκυκλο γράφημα δεσμών λέγεται **δάσος**.

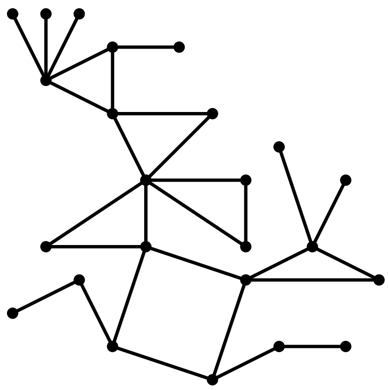
Παρατήρηση: Σε ένα δένδρο, κάθε μπλοκ του είναι δεσμός. Γενικεύοντας ορίζουμε ως **κάκτο** κάθε συνεκτικό γράφημα δεσμών του οποίου κάθε μπλοκ είναι ή δεσμός, ή κύκλος.

Παραδείγματα: Τα γραφήματα G_1 και G_2 είναι κάκτοι

G_1

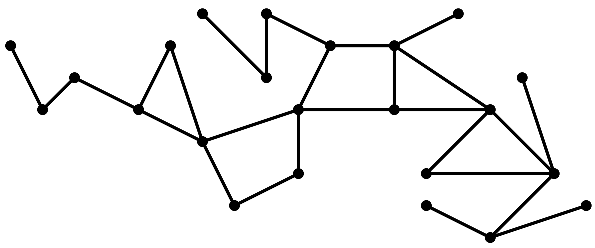


G_2

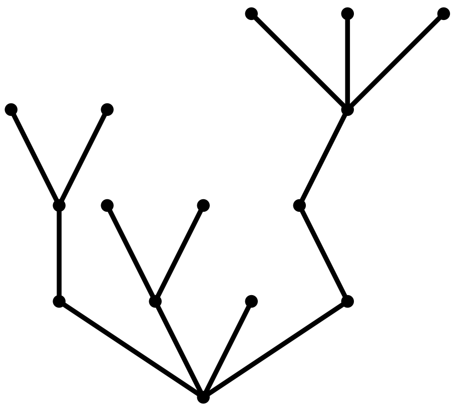


ενώ το γράφημα G_3 δεν είναι

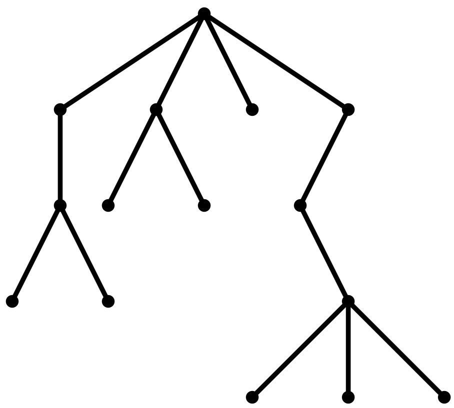
G_3



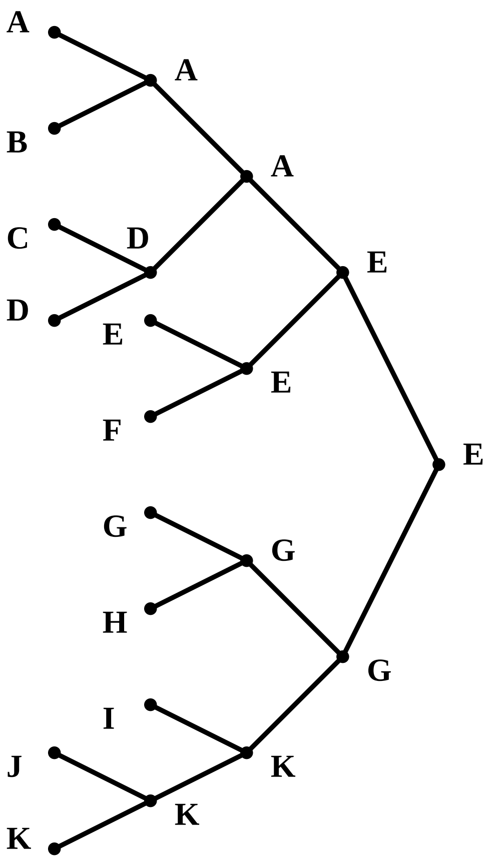
ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΕΝΔΡΩΝ



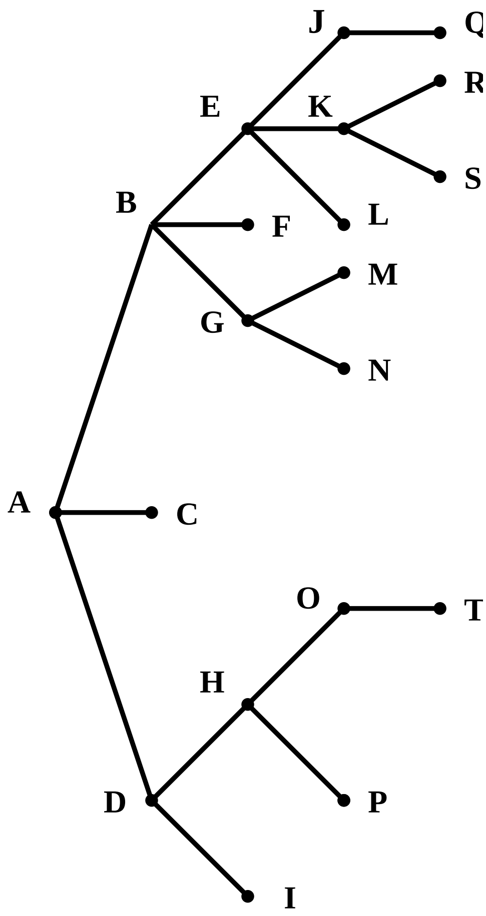
‘‘Φυσικός’’ τρόπος



Στην πληροφορική



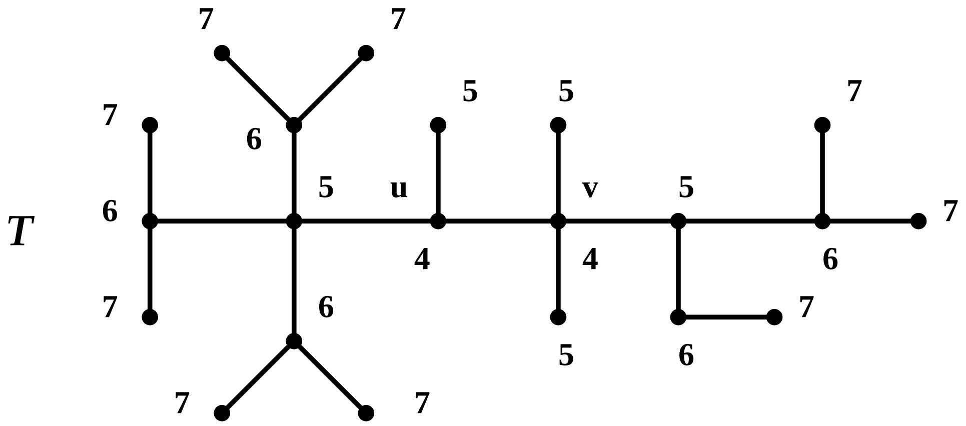
Τουρνουά



Γενεαλογικά δένδρα

Πρόταση 14. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
1) Το G είναι δένδρο.
2) Κάθε δύο κόμβοι του G ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι.
3) Το G είναι συνεκτικό, με $|V| = |E| + 1$.
4) Το G δεν έχει κύκλους και $|V| = |E| + 1$.
5) Το G δεν έχει κύκλους και αν ενώσουμε δύο οποιουσδήποτε μη γειτονικούς κόμβους δημιουργούμε γράφημα με ακριβώς ένα κύκλο.

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε γράφημα G, ορίσαμε το κέντρο του ως το σύνολο των κόμβων του με ελάχιστη εκκεντρότητα.



Οι εκκεντρότητες των κορυφών του δένδρου T

Κέντρο: $\{u, v\}$

Πρόταση 15. *Το κέντρο κάθε δένδρου αποτελείται από ένα, ή δύο (συνδεδεμένους) κόμβους.*

Απόδειξη: (Προφανής αν το T είναι το K_1 ή το K_2). Το δένδρο T' που προκύπτει από τη διαγραφή όλων των φύλλων του T έχει το ίδιο κέντρο με το T. Πράγματι, η διαγραφή αυτή μειώνει την εκκεντρότητα όλων των κόμβων που απομένουν στο T' κατά 1. Άρα, όποιοι κόμβοι έχουν ελάχιστη εκκεντρότητα στο T, θα έχουν και στο T'. Άρα το T' έχει το ίδιο κέντρο με το T. Όμοια τώρα, διαγράφοντας όλα τα φύλλα του T', δημιουργούμε ένα δένδρο T'' με το ίδιο κέντρο, κ.ο.κ. μέχρι να παραμείνει ή το K_1 ή το K_2, που αποτελείται μόνο από 1 ή 2 κεντρικούς κόμβους, οι οποίοι αποτελούν και το κέντρο του αρχικού δένδρου T. $\square$

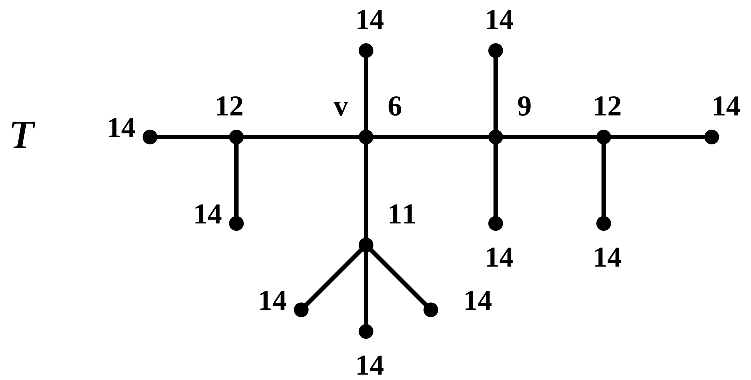
Κλαδί ενός δένδρου T σε ένα κόμβο του v λέγεται κάθε μεγιστικό υποδένδρο του T που έχει το v για φύλλο. (Προφανώς ένα δένδρο έχει τόσα κλαδιά στο v όσος ο βαθμός του v).

Βάρος ενός κόμβου v λέγεται ο μέγιστος αριθμός γραμμών σε ένα κλαδί του.

Κεντροειδής κόμβος ενός δένδρου λέγεται κάθε κόμβος με ελάχιστο βάρος.

Κεντροειδές ενός δένδρου λέγεται το σύνολο των κεντροειδών κόμβων του.

Παράδειγμα:

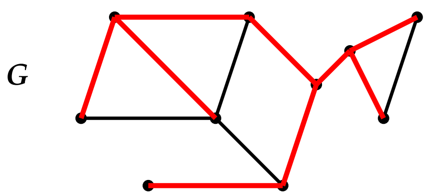


Τα βάρη των σημείων του T
v: κεντρειδές σημείο του T
$\{v\}$: κεντροειδές του T.

Προταση 16. *Το κεντροειδές κάθε δένδρου αποτελείται από ένα ή δύο (συνδεδεμένους) κόμβους.*

Υπενθυμίζουμε ότι ένα γράφημα $G_1 = (V, E_1)$ λέγεται γενετικό υπογράφημα ενός γραφήματος $G = (V, E)$, αν $E_1 \subseteq E$. Αν το G_1 είναι δένδρο, τότε έχουμε ένα **γενετικό** (ή **γεννητικό**, ή **μερικό**) δένδρο, ή **δένδρο ζεύξης** του G.

Παράδειγμα:



Το "κόκκινο" γράφημα είναι γενετικό δένδρο του G.

(Φυσικά μπορούμε να βρούμε κι άλλα γενετικά δένδρα για το ίδιο G).

Προταση 17. *Ένα γράφημα έχει (τουλάχιστον ένα) δένδρο ζεύξης αν και μόνο αν είναι συνεκτικό.*

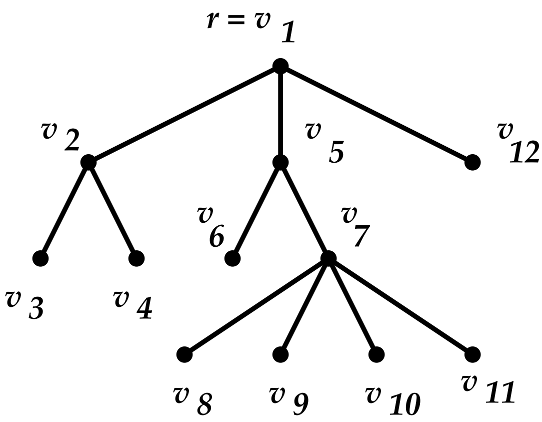
2. ΔΕΝΔΡΑ ΜΕ ΡΙΖΑ

Δένδρο με ρίζα είναι ένα δένδρο με έναν ειδικά επιλεγμένο κόμβο (τη **ρίζα** του δένδρου).

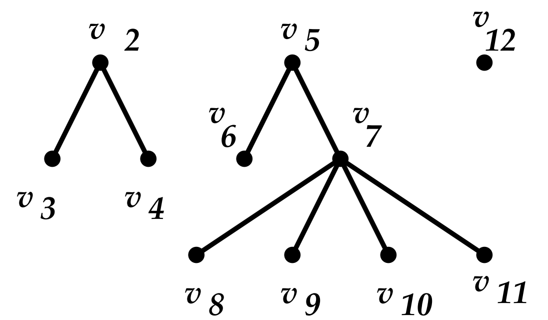
Παρατήρηση: Για να είναι δύο δένδρα με ρίζα ισόμορφα, πρέπει προφανώς να ισχύει ο ορισμός του ισομορφισμού των δένδρων, με την επιπλέον απαίτηση ότι η ρίζα του πρώτου δένδρου να απεικονίζεται στη ρίζα του δεύτερου.

Έστω r η ρίζα του δένδρου T. Τα δένδρα του δάσους $T - r$ λέγονται **υποδένδρα της ρίζας** r. Τα δένδρα του δάσους $T - r$ θεωρούνται επίσης δένδρα με ρίζα: Ρίζα καθενός είναι το άλλο άκρο του δεσμού που περιέχει την ρίζα r του T. Η έννοια των υποδένδρων ενός οποιουδήποτε κόμβου (που δεν είναι φύλλο) ορίζεται ανάλογα.

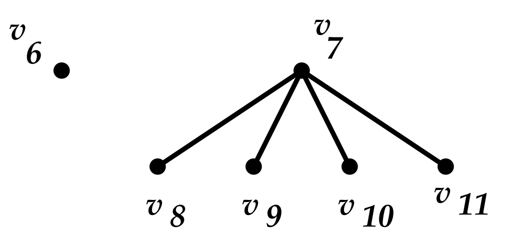
Παραδείγματα:



Υποδένδρα της ρίζας v_1 είναι τα



Υποδένδρα του κόμβου v_5 είναι τα



Ορίζουμε το **επίπεδο** $l(v)$ ενός κόμβου v του T ως εξής: $l(r) = 1$ και αν στο (μοναδικό) $r-v$ μονοπάτι $(r, \ldots, u, v)$ έχουμε $l(u) = i$, τότε $l(v) = i+1$. (Στην περίπτωση αυτή το u λέγεται **γονέας** του v και το v λέγεται **παιδί** του u. Παιδιά του ίδιου γονέα λέγονται **αδέλφια**).

Παρατήρηση: Στα δένδρα με ρίζα, ο βαθμός ενός κόμβου ορίζεται διαφορετικά απ᾽ ό,τι στα προηγούμενα: **Βαθμός** $d(v)$ ενός κόμβου v είναι το πλήθος των παιδιών του.

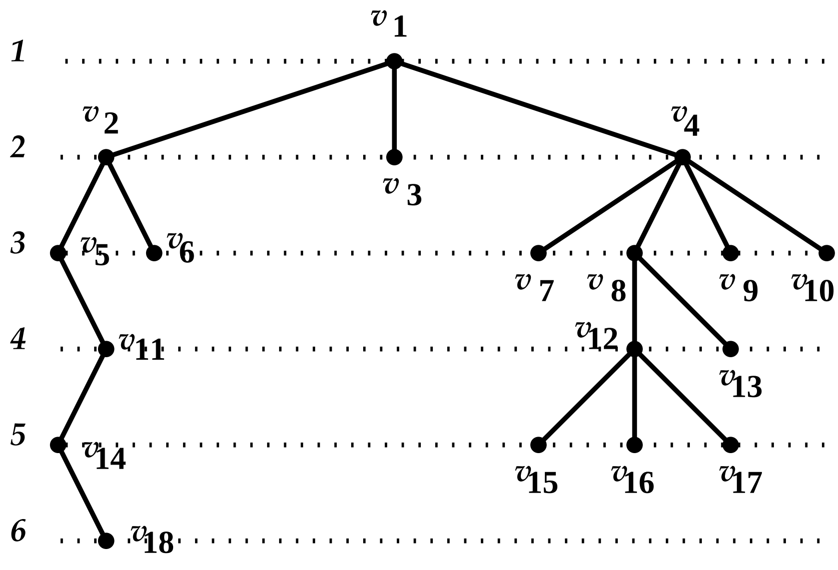
Αν υπάρχει στο T διαδρομή από ένα κόμβο v_1 σε ένα κόμβο v_k, η οποία χρησιμοποιεί κόμβους με επίπεδα που συνεχώς αυξάνουν τότε λέμε ότι το v_1 είναι **πρόγονος** του v_k και το v_k είναι **απόγονος** του v_1.

Ένας κόμβος χωρίς παιδιά λέγεται **φύλλο** (ή **τερματικός κόμβος**). Αλλιώς λέγεται **ενδιάμεσος** κόμβος. Προφανώς, ο βαθμός κάθε φύλλου ισούται με 0.

Ύψος (ή **βάθος**) ενός δένδρου λέγεται το μεγαλύτερο από τα επίπεδα των κόμβων του.

Παράδειγμα:

Επίπεδα



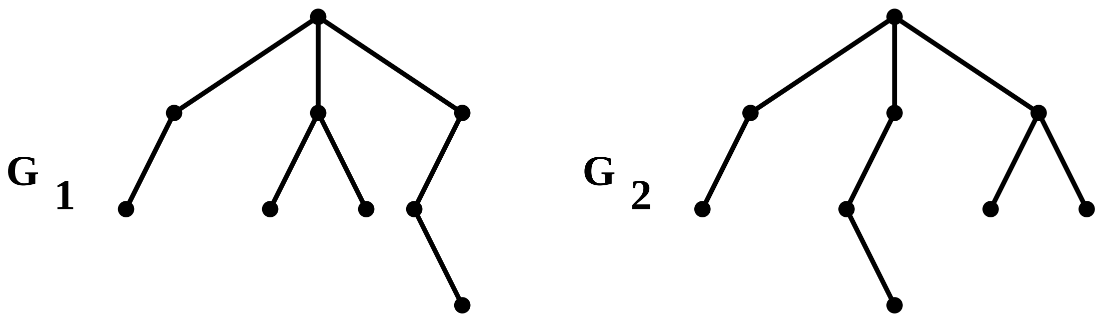
1: ρίζα	2: γονέας των 5, 6
5, 6: παιδιά του 2	4: γονέας του 7
7, 8, 9, 10: παιδιά του 4	15, 16, 17: αδέλφια
2: πρόγονος των 5,6, 11,14,18	15: απόγονος των 1, 4, 8, 12
3, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18: φύλλα.	$d(v_1) = 3$, $d(v_8) = 2$, $d(v_{18}) = 0$
11: ενδιάμεσος κόμβος	Ύψος του δένδρου = 6.

Παρατήρηση: Κάποιοι συγγραφείς ορίζουν $l(r) = 0$ αντί 1.

3. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΕΝΔΡΑ

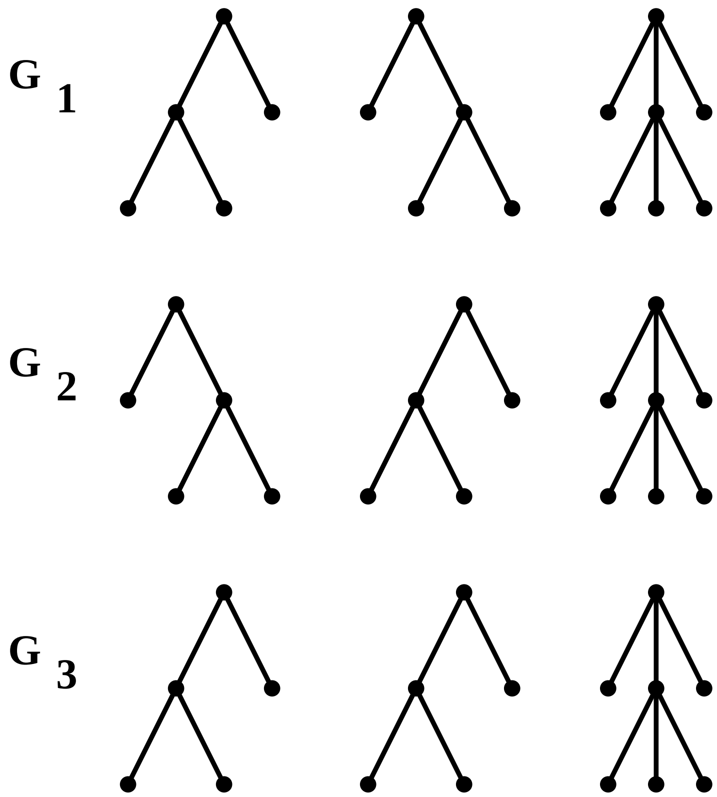
Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **διατεταγμένο** αν η αλλαγή της σχετικής θέσης δύο μη ισόμορφων υποδένδρων ενός κόμβου του θεωρείται ότι δημιουργεί μη ισόμορφο δένδρο.

Παράδειγμα:



Αν τα G_1, G_2 δεν θεωρηθούν διατεταγμένα τότε $G_1 \simeq G_2$, αλλά τα διατεταγμένα δένδρα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα. (Σ΄ ένα διατεταγμένο δένδρο, τα υποδένδρα κάθε κόμβου χαρακτηρίζονται ως πρώτο, δεύτερο κ.λπ. από αριστερά πρός τα δεξιά).

Διατεταγμένο δάσος είναι ένα (διατεταγμένο) σύνολο από ξένα, διατεταγμένα δέντρα.



Τα τρία δάση G_1, G_2, G_3 είναι ισόμορφα. Δεν είναι όμως ισόμορφα, αν θεωρηθούν ως διατεταγμένα δάση.

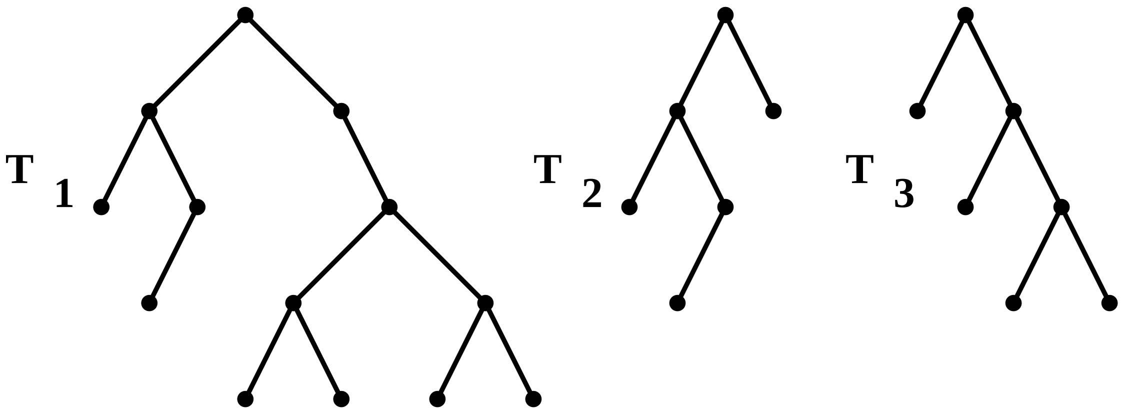
Ένα διατεταγμένο δένδρο, στο οποίο κάθε κόμβος επιτρέπεται να έχει το πολύ k παιδιά, λέγεται **k-δένδρο**.

Παράδειγμα: Το πρώτο και το δεύτερο διατεταγμένο δένδρο του διατεταγμένου δάσους G_1 του τελευταίου παραδείγματος, είναι 2-δένδρα, ενώ το τρίτο είναι 3-δένδρο.

4. ΔΥΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ

Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **δυαδικό δένδρο** αν κάθε κόμβος του που δεν είναι φύλλο έχει είτε ένα αριστερό, είτε ένα δεξιό παιδί, είτε δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξιό).

Παράδειγμα: Τα παρακάτω δένδρα T_1, T_2 και T_3 είναι δυαδικά.



Παρατηρήσεις:

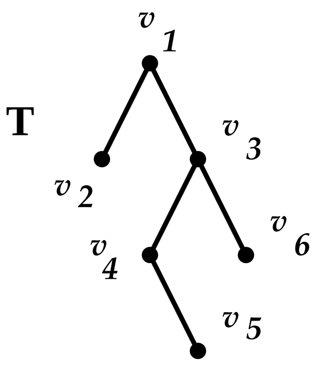
i) Σε αντίθεση με τον γενικό ορισμό των γραφημάτων, στα δυαδικά δένδρα συμπεριλαμβάνεται και το κενό δυαδικό δένδρο, δηλαδή το δένδρο T με $V(T) = \emptyset$.

ii) Προφανώς, αντίστοιχα με το διατεταγμένο δάσος διατεταγμένων δένδρων, ορίζεται και το **διατεταγμένο δάσος δυαδικών δένδρων**.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ (ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΣ) ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΥΑΔΙΚΟΥ ΔΕΝΔΡΟΥ

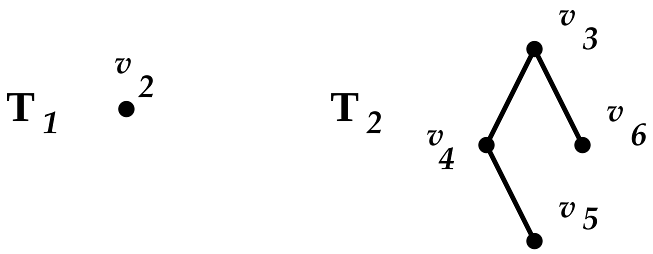
Δυαδικό δένδρο είναι το κενό γράφημα καθώς και κάθε δένδρο που περιέχει μια ρίζα, τα υποδένδρα της οποίας είναι δυαδικά δένδρα - το αριστερό και το δεξιό.

Παράδειγμα:

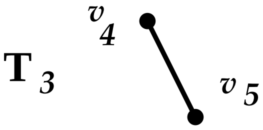


Το T είναι δυαδικό δένδρο αφού η ρίζα του (v_1) έχει δύο δυαδικά υποδένδρα:

Το T_1 (αριστερό) και το T_2 (δεξιό):

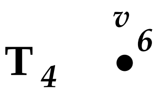


Πράγματι, το T_1 είναι δυαδικό αφού η ρίζα του (v_2) έχει δύο δυαδικά υποδένδρα: το κενό (αριστερό) και το κενό (δεξιό). Επίσης, το T_2 είναι δυαδικό αφού η ρίζα του (v_3) έχει δύο δυαδικά υποδένδρα: το T_3:



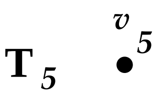
(αριστερό)

και το T_4:



(δεξιό)

(Πράγματι το T_3 είναι δυαδικό αφού η ρίζα του (v_4) έχει δύο δυαδικά υποδένδρα: το κενό (αριστερό) και το

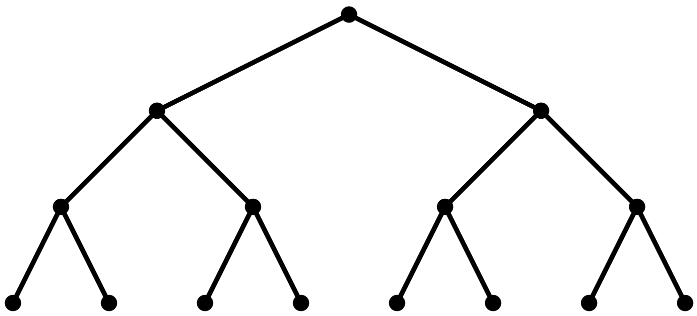


(δεξιό)

Επίσης το T_4 είναι δυαδικό).

Αν κάθε εσωτερικός κόμβος έχει ακριβώς δύο παιδιά και όλα τα φύλλα έχουν το ίδιο επίπεδο έχουμε ένα **πλήρες δυαδικό** δένδρο.

Παράδειγμα:



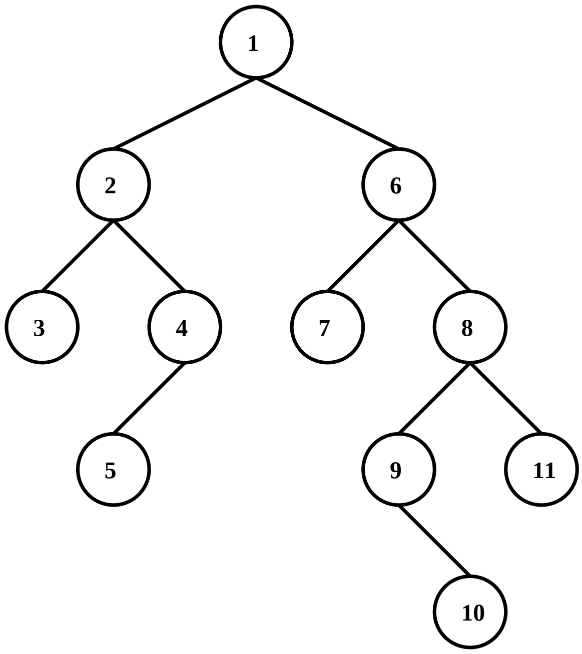
Παρατήρηση: Αν το ύψος ενός πλήρους δυαδικού δένδρου είναι h, τότε το δένδρο αυτό περιέχει προφανώς $2^h - 1$ ακριβώς κόμβους.

5. ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΔΕΝΔΡΩΝ

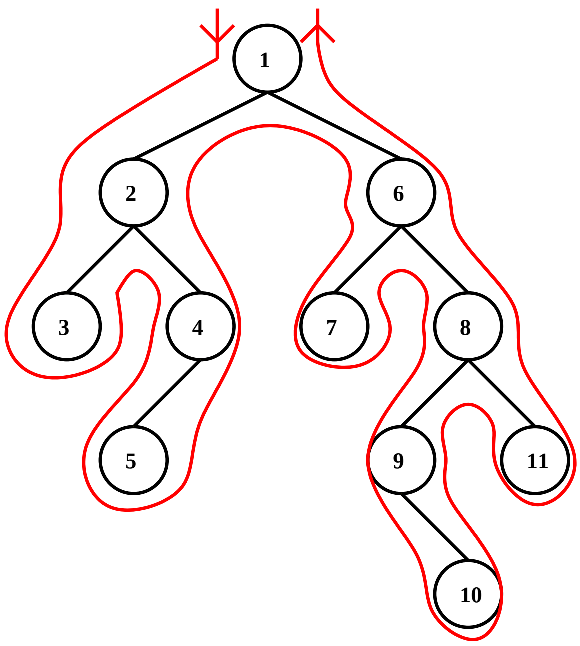
ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΔΕΝΔΡΩΝ

1) **Προδιάταξη**: Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πρίν επισκεφθούμε (αριθμήσουμε) σε προδιάταξη το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο του.

Παράδειγμα:

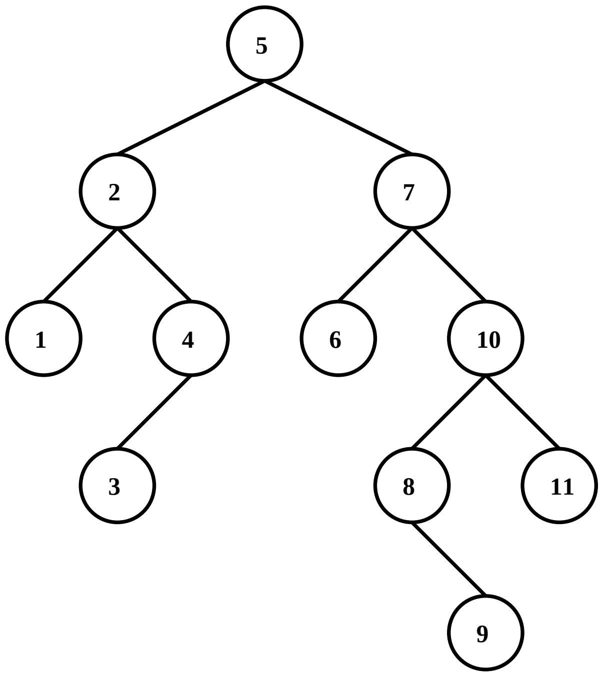


"Πρακτικός" τρόπος: Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο την πρώτη φορά που τον συναντάμε καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα:



2) Ενδοδιάταξη: Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο μετά την επίσκεψη (αρίθμηση) σε ενδοδιάταξη του αριστερού και πρίν την επίσκεψη (αρίθμηση) σε ενδοδιάταξη του δεξιού υποδένδρου του.

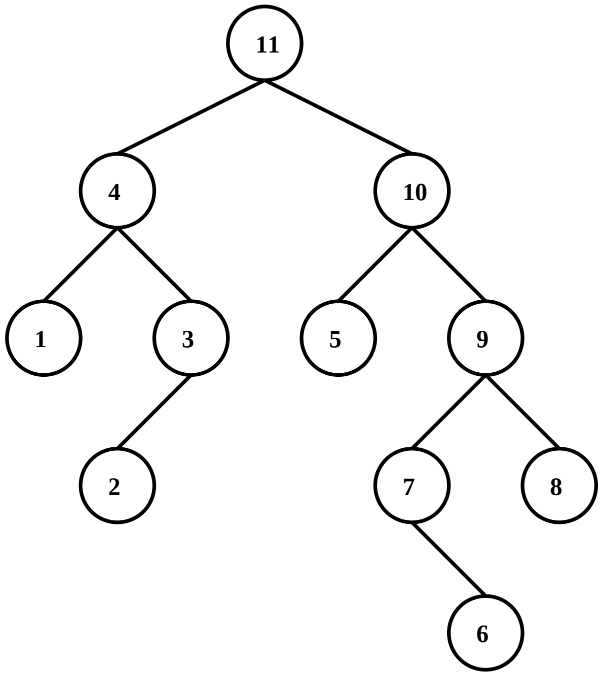
Παράδειγμα:



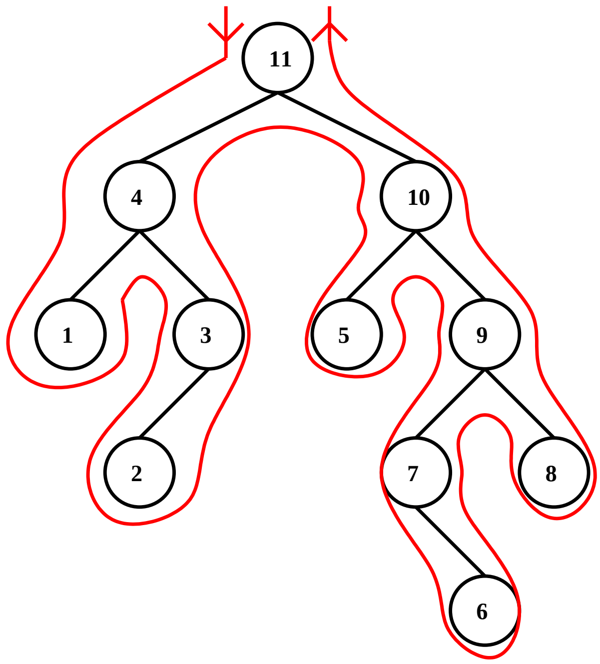
"Πρακτικός" τρόπος: Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τον κάθε κόμβο την πρώτη φορά που τον συναντάμε αν δεν έχει αριστερό παιδί, και τη δεύτερη φορά αν έχει αριστερό παιδί,

3) Μεταδιάταξη: Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού έχουμε επισκεφθεί (αριθμήσει) σε μεταδιάταξη και το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο του.

Παράδειγμα:

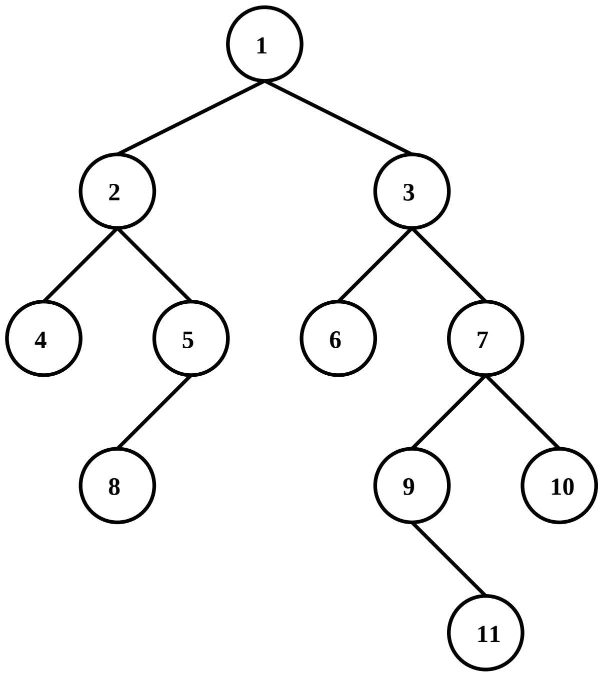


''Πρακτικός'' τρόπος: Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο την τελευταία φορά που τον συναντάμε (δηλαδή καθως τον εγκαταλείπουμε για να πάμε προς τον γονέα του) καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα:



4) **Διάσχιση κατά σειρά επιπέδων**: Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τις κορυφές κατά επίπεδο (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τις κορυφές από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα:

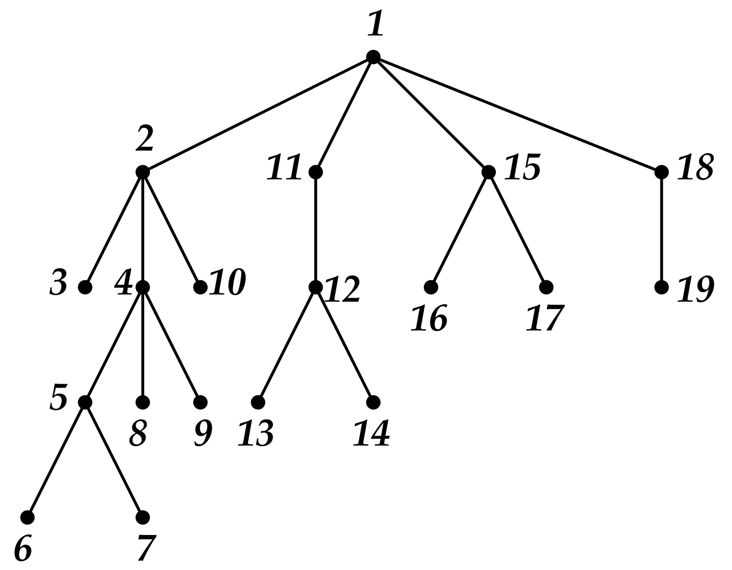


ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΔΕΝΔΡΩΝ

1) Προδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξή τους) τα δένδρα-παιδιά του σε προδιάταξη. Δηλαδή πρώτα ο γονέας και έπειτα τα δένδρα παιδιά του.

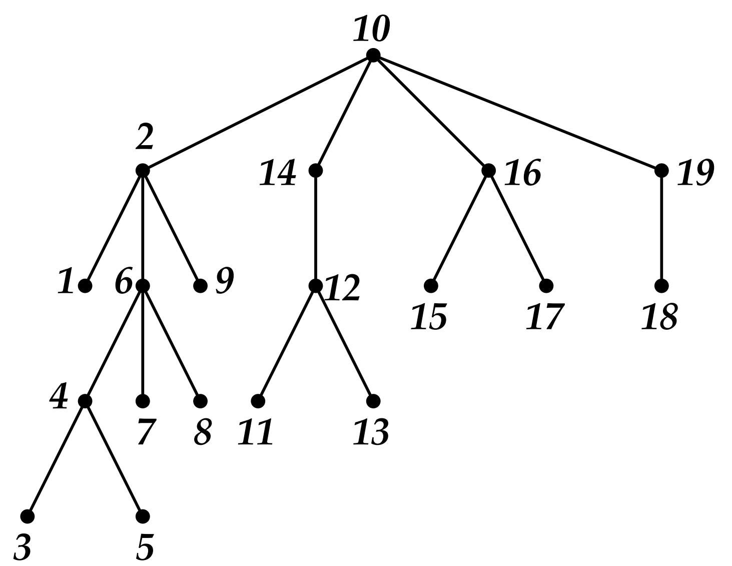
Παράδειγμα:



2) Ενδοδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε σε ενδοδιάταξη το πρώτο δένδρο-παιδί και πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με την διάταξή τους) τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του σε ενδοδιάταξη. Δηλαδή πρώτα το πρώτο παιδί, μετά ο γονέας κι έπειτα τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του.

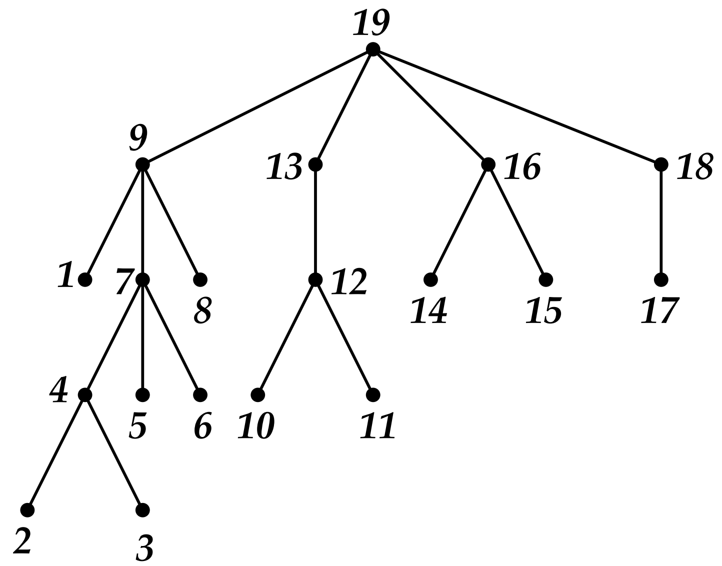
Παράδειγμα:



3) Μεταδιάταξη

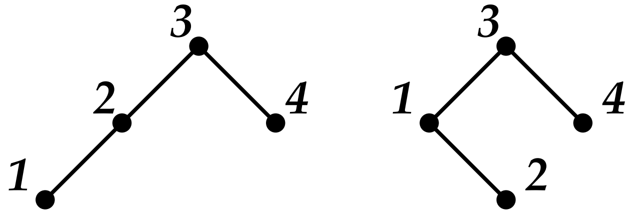
Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξή τους) τα δένδρα-παιδιά του σε μεταδιάταξη. Δηλαδή πρώτα τα δένδρα-παιδιά και έπειτα ο γονέας.

Παράδειγμα:

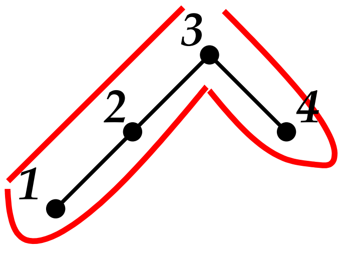


Παρατήρηση: Μπορούμε να αριθμήσουμε τα διατεταγμένα δένδρα σε προδιάταξη και μεταδιάταξη με πρακτικό τρόπο, αντίστοιχα με τα δυαδικά δένδρα. Στην ενδοδιατάξη των διατεταγμένων δένδρων ο πρακτικός τρόπος είναι διαφορετικός: Αριθμούμε τον κάθε κόμβο τη δεύτερη φορά που τον συναντάμε, εκτός αν είναι φύλλο, οπότε τον αριθμούμε την πρώτη φορά.

Η διαφορά στον πρακτικό τρόπο της ενδοδιάταξης οφείλεται στο ότι στα δυαδικά δένδρα, στην περίπτωση γονέα με μοναδικό παιδί, η σειρά αρίθμησής τους δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Πράγματι, όπως ήδη έχουμε δεί στα δυαδικά δένδρα αν το παιδί είναι αριστερό παιδί, τότε προηγείται του γονέα, ενώ αν είναι δεξιό, τότε έπεται του γονέα:



Ο πρακτικός τρόπος των διατεταγμένων δέδρων όμως θα έδινε για τα δυαδικά δένδρα

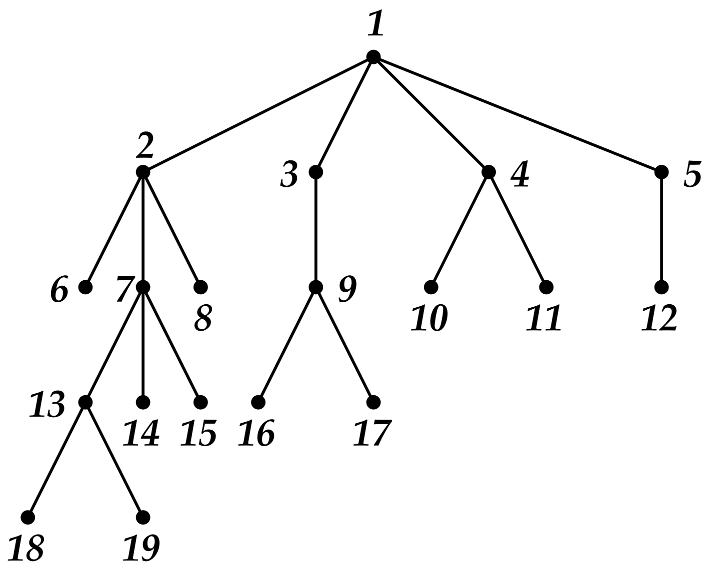


με το δεύτερο δένδρο να δίνει λανθασμένη ενδοδιάταξη.

4) Διάταξη κατά επίπεδα

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τους κόμβους κατά επίπεδο (από το μικρότερο επίπεδο στο μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τους κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Παράδειγμα:



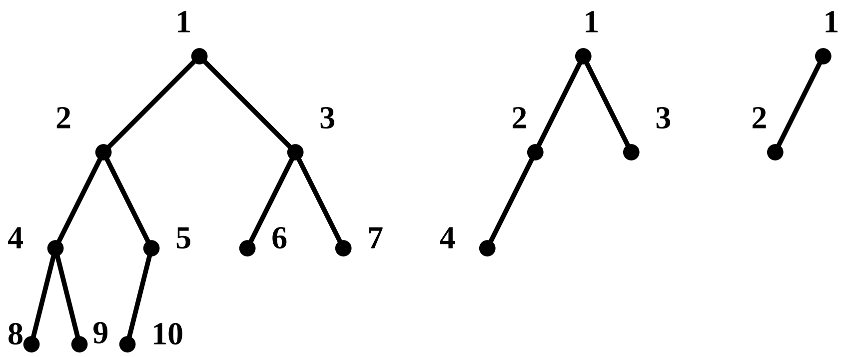
Παρατήρηση: Οι διασχίσεις των δένδρων (δυαδικών, ή διατεταγμένων) σύμφωνα με οποιαδήποτε από τις παραπάνω διατάξεις γενικεύονται προφανώς στα διατεταγμένα δάση δυαδικών ή διατεταγμένων δένδρων, διασχίζοντας σύμφωνα με τη συγκεκριμένη κάθε φορά διάταξη το πρώτο δένδρο του διατεταγμένου δάσους, ακολούθως το δεύτερο δένδρο, κ.ο.κ.

6. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΕΝΑ ΔΥΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ

Έστω T ένα πλήρες δυαδικό δένδρο ύψους h, αριθμημένο κατά σειρά επιπέδων και k οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός με $0 \leq k \leq 2^{h-1} - 1$.

Το δένδρο που προκύπτει αν διαγράψουμε τα k σημεία του T που είναι αριθμημένα με αριθμούς μεγαλύτερους από $2^h - k - 1$ ονομάζεται **συμπληρωμένο δυαδικό δένδρο**.

Παράδειγμα:



Τρία συμπληρωμένα δυαδικά δένδρα.

Υπάρχουν πολλές ακόμα ειδικές κατηγορίες δυαδικών δένδρων: εκτεταμένα, αναζήτησης (ισορροπημένα, AVL) κ.λπ.

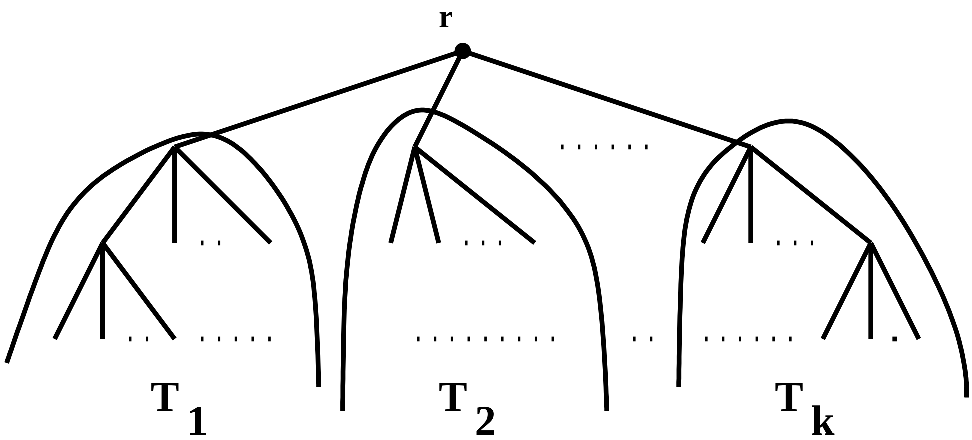
7. ΔΕΝΔΡΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Στον προγραμματισμό συχνά χρησιμοποιούνται δένδρα, για να διευκολύνουν την έρευνα και τη διερεύνηση περιπτώσεων και για να μοντελοποιήσουν τη λογική των αλγορίθμων.

Προταση 18. *Το ύψος h ενός k-δένδρου με l φύλλα είναι τουλάχιστον* $\log_k l + 1$.

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι $h \geq \log_k l + 1$, ή ισοδύναμα ότι $k^{h-1} \geq l$, δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι ένα k-δένδρο ύψους h έχει το πολύ k^{h-1} φύλλα. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς h: Για $h = 1$, το δένδρο είναι τέτριμένο και ο μοναδικός του κόμβος είναι και φύλλο, άρα έχει πράγματι k^0 φύλλα.

Έστω ότι ισχύει για $h \leq n$, και έστω T ενα k-δένδρο ύψους $n+1$. Στο γράφημα $T - r$ (όπου r η ρίζα του T) έχουμε k το πολύ υποδένδρα, τα $T_1, T_2, \ldots, T_k$.



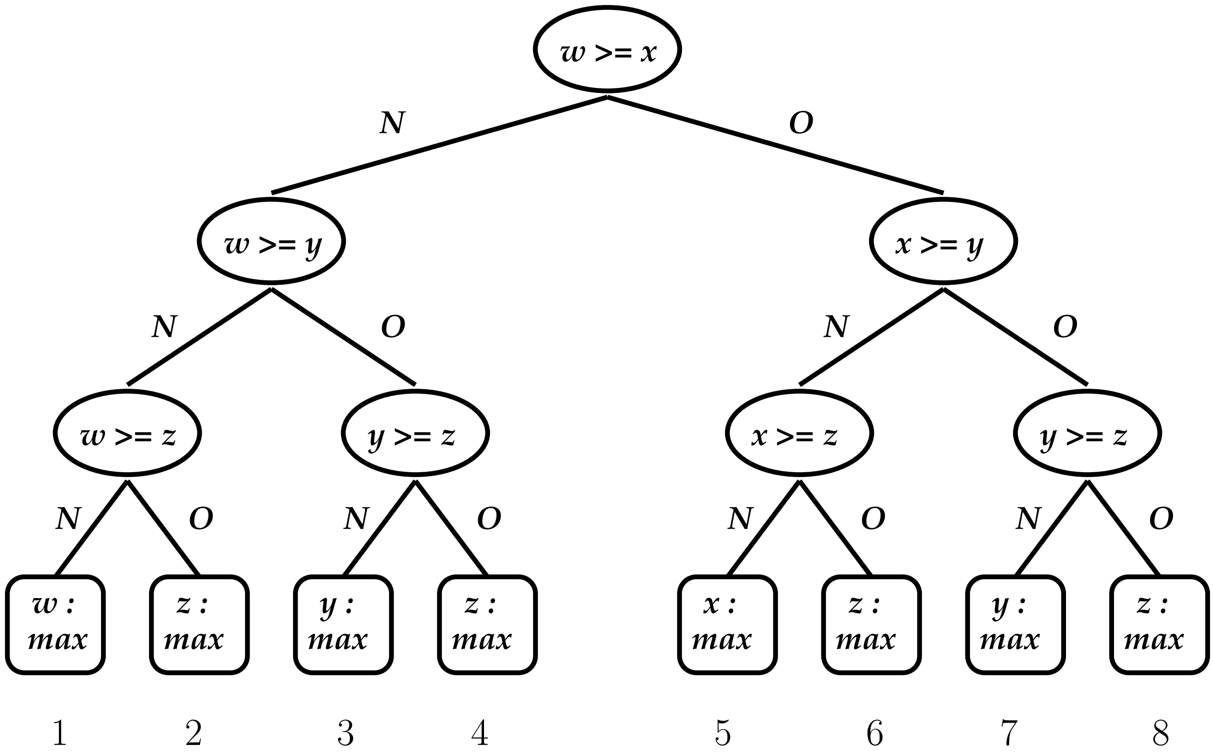
Αλλά τα $T_1, T_2, \ldots, T_k$ έχουν ύψος το πολύ n. Άρα, από την υπόθεση της επαγωγής, έχουν συνολικά k^{n-1} το πολύ φύλλα το καθένα. Συνολικά λοιπόν, τα υποδένδρα $T_1, T_2, \ldots, T_k$ έχουν το πολύ $k \cdot k^{n-1} = k^n$ φύλλα, τα οποία είναι τα φύλλα και του αρχικού δένδρου T. □

Το θεώρημα αυτό εφαρμόζεται και στα δένδρα αποφάσεων, (δες Εφαρμογή 2).

Δένδρο αποφάσεων λέγεται ένα k-δένδρο του οποίου κάθε εσωτερική κορυφή παριστάνει μια ερώτηση για την οποία πρέπει να αποφασίσουμε. Οι δυνατές απαντήσεις (αποφάσεις) παριστάνονται από τους δεσμούς που συνδέουν τον κόμβο με τους κόμβους του επόμενου επίπεδου. Τα τελικά αποτελέσματα της διαδικασίας παριστάνονται από τα φύλλα του δένδρου.

Πολύ συχνά, οι δυνατές απαντήσεις κάθε φορά είναι: ''Ναι'' (Ν) ή ''Όχι '' (Ο), οπότε το δένδρο απαφάσης είναι ένα δυαδικό δένδρο, όπως φαίνεται στην παρακάτω εφαρμογή.

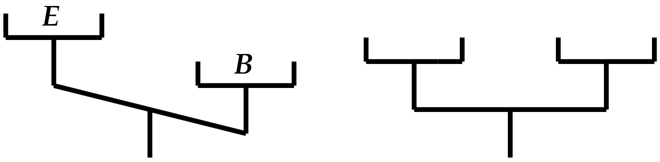
Εφαρμογή 1: Η λογική του προγράμματος που βρίσκει το $\max\{w, x, y, z\}$, όπου $w, x, y, z \in \mathbb{R}$, μπορεί να παρασταθεί από το παρακάτω δυαδικό δένδρο αποφάσεων:



1. $w \geq x, y, z$
2. $z > w \geq x, y$
3. $y \geq z, \quad y > w \geq x$
4. $z > y > w \geq x$
5. $x > w, \quad x \geq y, z$
6. $z > x \geq y, \quad x > w$
7. $y \geq z, \quad y > x > w$
8. $z > y > x > w.$

Ας δούμε τώρα μια εφαρμογή που χρησιμοποιεί ένα 3-δένδρο αποφάσεων:

Εφαρμογή 2 (Το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων): Ένα κανονικό νόμισμα έχει αριθμό 0. Υπάρχουν n άλλα νομίσματα ίδια ακριβώς στην εμφάνιση με το 0, που έχουν όμως αριθμούς $1, 2, \ldots, n$. Υποψιαζόμαστε ότι ένα νόμισμα μπορεί να είναι "κίβδηλο" (είτε λίγο ελαφρύτερο, είτε λίγο βαρύτερο). Να δειχθεί ότι χρειάζονται τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$ ζυγίσματα σε μια ζυγαριά η οποία δείχνει το ελαφρύτερο και το βαρύτερο, ή δύο ίσου βάρους



για να αποφασίσουμε αν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα, ποιο είναι αυτό και αν είναι βαρύ ή ελαφρύ.

Να περιγραφεί μια διαδικασία που να χρησιμοποιεί ακριβώς αυτό τον αριθμό ζυγισμάτων, όταν $n = 4$.

Απάντηση: Υπάρχουν $2n+1$ πιθανές τελικές απαντήσεις (φύλλα) στο δένδρο αποφάσεων, για το παραπάνω πρόβλημα

k,	$1B$,	$1E$,	$2B$,	$2E$,	$\ldots$,	nB,	nE
καλά όλα	το 1 είναι βαρύ	το 1 είναι ελαφρύ	το 2 είναι βαρύ	το 2 είναι ελαφρύ		το n είναι βαρύ	το n είναι ελαφρύ

Το δένδρο αποφάσεων εδώ είναι ένα 3-δένδρο, αφού κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν τρία πιθανά αποτελέσματα:

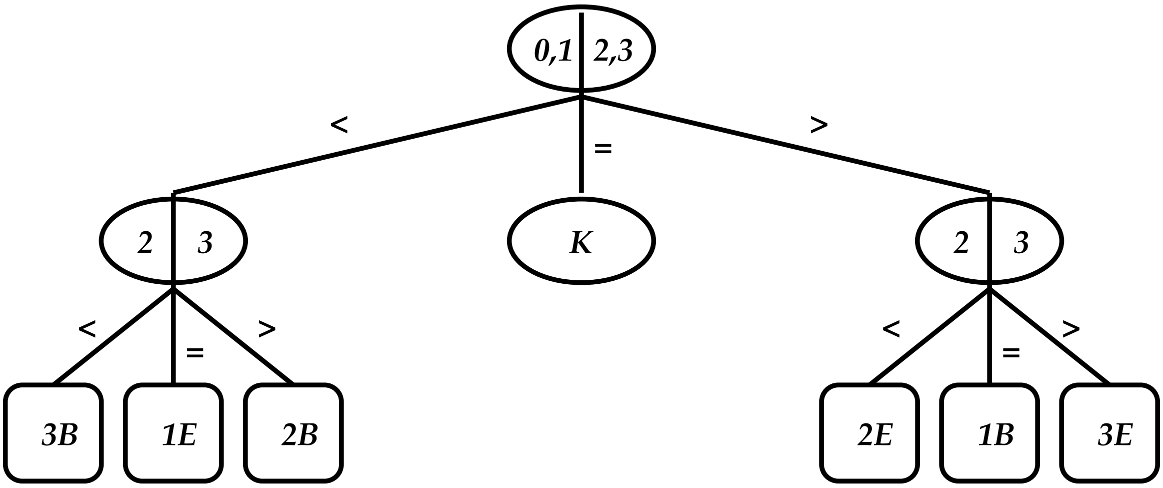
$<$: το αριστερό είναι ελαφρύτερο,

$=$: τα δύο μέρη έχουν το ίδιο βάρος,

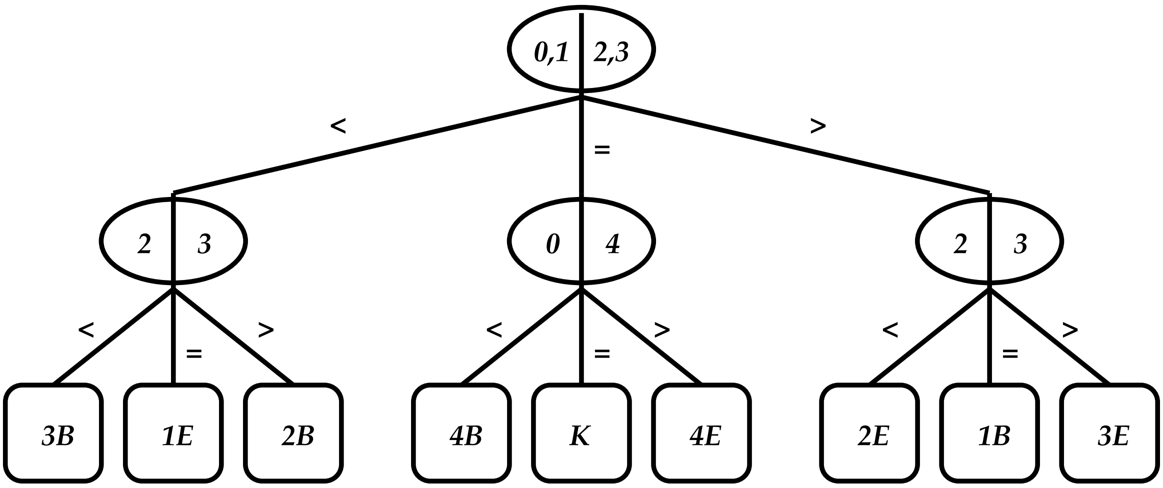
$>$: το αριστερό είναι βαρύτερο.

Άρα το ύψος του δένδρου είναι τουλάχιστον $\log_3(2n+1)+1$, οπότε το πλήθος των εσωτερικών κόμβων του δένδρου (δηλαδή των κόμβων που αντιστοιχούν σε ζυγίσματα) από τη ρίζα μέχρι κάποιο (τουλάχιστον ένα) φύλλο (δηλαδή σε μία τουλάχιστον περίπτωση) είναι τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$.

Για $n = 3$, έχουμε $\log_3(2 \cdot 3 + 1) = log_3 7 \approx 1.771$, οπότε τα ζυγίσματα θα είναι τουλάχιστον 2, μια δε λύση με ακριβώς δύο ζυγίσματα φαίνεται στο παρακάτω 3-δένδρο αποφάσεων:



Για $n = 4$, έχουμε $\log_3(2 \cdot 4 + 1) = log_3 9 = 2$, οπότε τα ζυγίσματα θα είναι τουλάχιστον 2, μια δε λύση με ακριβώς δύο ζυγίσματα φαίνεται στο παρακάτω 3-δένδρο αποφάσεων:



Εφαρμογή 3: Να διαταχθούν, με τη χρήση ενός δένδρου αποφάσεων, τρεις διαφορετικοί ανα δύο αριθμοί, εκφράζοντας τη λογική του αλγόριθμου bubblesort.

Απάντηση: Υπενθυμίζουμε ότι στη μέθοδο bubblesort συγκρίνουμε (και διατάσουμε) τους αριθμούς ανά δύο από πάνω (ή από αριστερά) προς τα κάτω (ή προς τα δεξιά), έτσι ώστε ο μεγαλύτερος αριθμός καταλήγει τελευταίος.

Μετά, στην υπολίστα που παίρνουμε αγνοώντας τον τελευταίο αριθμό, ξανακάνουμε το ίδιο, κ.ο.κ.

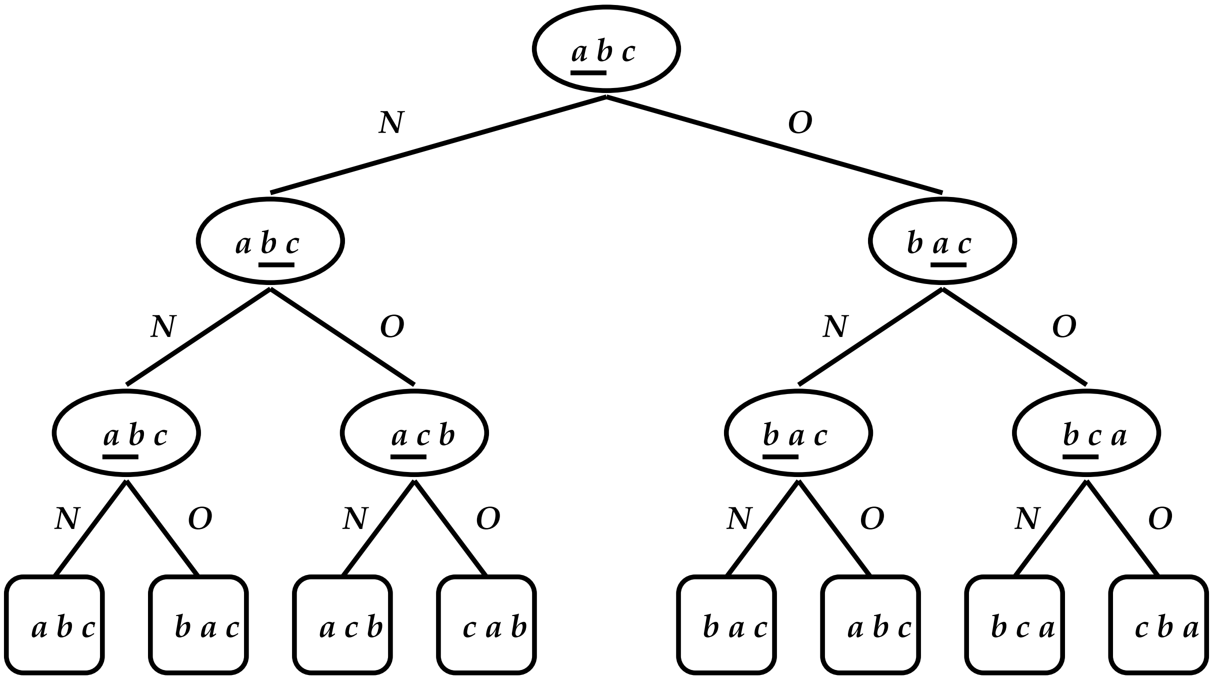
Στους τρεις αριθμούς λοιπόν, συγκρίνουμε 1ο με 2ο και αφού τους τοποθετήσουμε στην κατάλληλη σειρά (πρώτα τον μικρό, μετά τον μεγάλο), συγκρίνουμε 2ο με 3ο (της λίστας που μόλις διαμορφώσαμε). Βάζουμε τον μικρότερο από αυτούς δεύτερο και τον μεγαλύτερο τρίτο (δηλαδή τελευταίο). Έτσι, μένει να συγκρίνουμε (στην καινούργια λίστα που μόλις διαμορφώσαμε) 1ο με 2ο (αφού ο μεγαλύτερος από τους τρεις έχει ήδη τοποθετηθεί τελευταίος).

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{1ο βήμα} & & \text{2ο βήμα} & & \text{3ο βήμα} & \\ \mathbf{8}\,| & & \mathbf{6} & & \mathbf{6}\,| & & \mathbf{4} \\ \mathbf{6}\,| & \Rightarrow & \mathbf{8}\,| & & \mathbf{4}\,| & \Rightarrow & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & & \mathbf{4}\,| & \Rightarrow & \mathbf{8} & & \mathbf{8} \end{array}$$

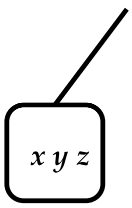
1ο βήμα: διατάσουμε 1ο, 2ο.
2ο βήμα: διατάσουμε 2ο, 3ο της λίστας που διαμορφώσαμε (ο μεγαλύτερος από τους τρεις είναι ο 8).
3ο βήμα: διατάσουμε 1ο, 2ο της λίστας που μόλις διαμορφώσαμε.

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να σχηματίσουμε το δένδρο αποφάσεων που εκφράζει τις παραπάνω σκέψεις. (Σε κάθε κορυφή, η ερώτηση η οποία τίθεται είναι κατά πόσον από τους δύο υπογραμμισμένους αριθμούς, οι οποίοι είναι αυτοί που συγκρίνουμε κάθε φορά, ο πρώτος είναι μικρότερος από το δεύτερο):

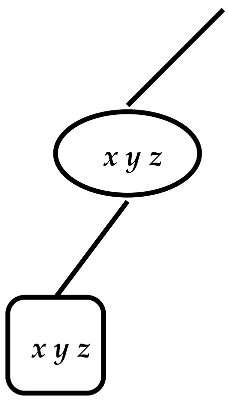


Παρατηρούμε ότι παίρνουμε 8 απαντήσεις, ενώ γνωρίζουμε ότι οι μεταθέσεις τριών αριθμών είναι $3! = 6$. Πράγματι, οι abc, bac εμφανίζονται από δύο φορές.

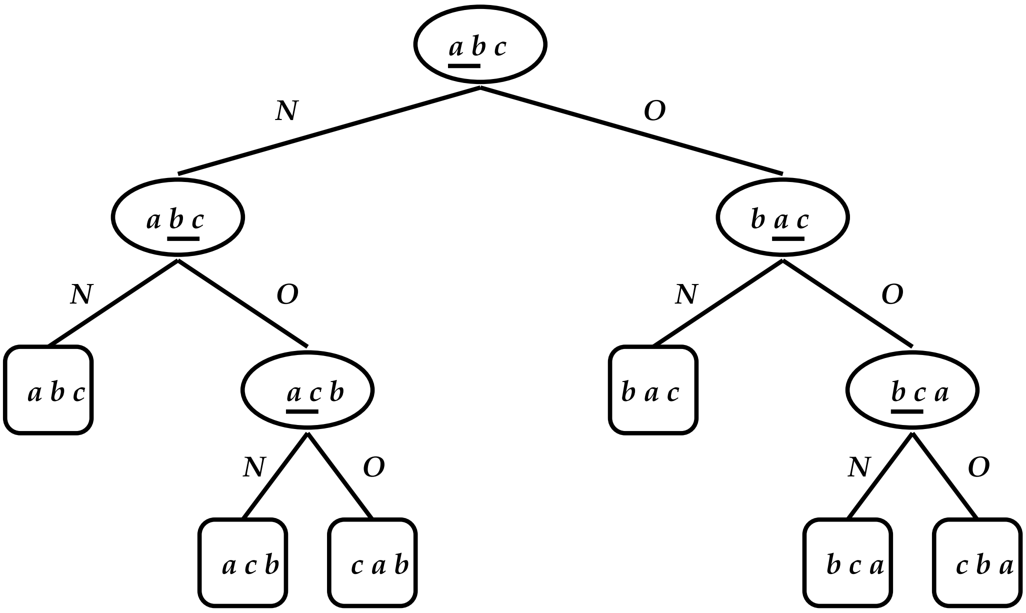
Μπορούμε λοιπόν να ‘‘κλαδέψουμε’’ το δένδρο αποφάσεων, ώστε να δώσει ακριβώς μια φορά κάθε σωστή απάντηση (να έχει δηλαδή 6 φύλλα), αν παρατηρήσουμε τα εξής: Το δεύτερο και το έκτο από τα οκτώ αποτελέσματα είναι αδύνατο να προκύψουν στις θέσεις αυτές: Το δεύτερο (bac, δηλαδή $b < a < c$) είναι κατάληξη της αρχικής περίπτωσης $a < b$ (αδύνατο) και το έκτο (abc, δηλαδή $a < b < c$) είναι κατάληξη της αρχικής περίπτωσης $b < a$ (επίσης αδύνατο). Γράφοντας δε στο δένδρο



αντί για

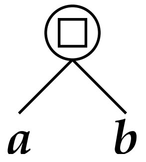


σε κάθε περίπτωση που ένας γονιός έχει μοναδικό παιδί-φύλλο, τον εαυτό του, παίρνουμε τελικά το ζητούμενο δένδρο αποφάσεων:

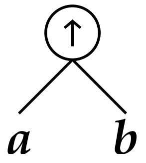


8. ΔΕΝΔΡΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Μια αλγεβρική παράσταση, στην οποία εμφανίζονται οι (δυαδικές) πράξεις $+$, $-$, $*$ (ή $\cdot$), $\div$ (ή $:$, ή $/$) καθώς και δυνάμεις, μπορεί να παρασταθεί σαν ένα δυαδικό δένδρο με ρίζα, αν γράψουμε



αντί για $a\Box b$ (όπου $\Box$ είναι οποιαδήποτε από τις τέσσερις πράξεις) και



αντί για a^b.

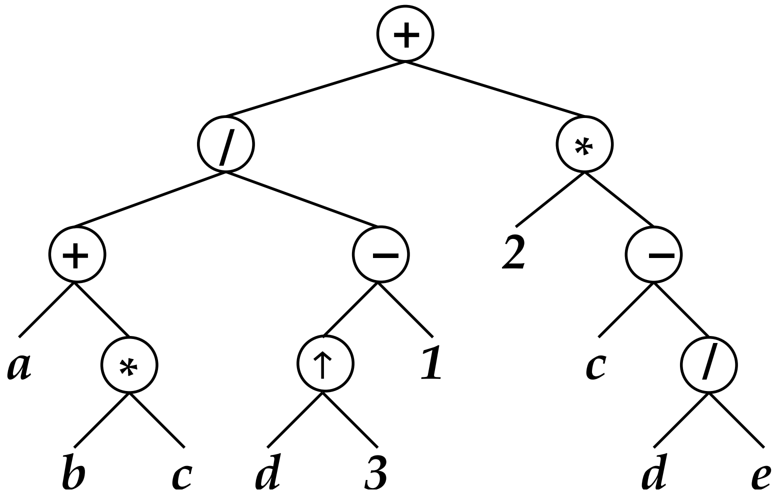
Γράφοντας τα σύμβολα με τη σειρά που εμφανίζονται στη διάσχιση του δένδρου σε προδιάταξη, σχηματίζουμε τη λεγόμενη **πολωνική** (ή **προθεματική**) **γραφή** της παράστασης.

Παραδείγματα:

1. Στην αλγεβρική παράσταση

$$\frac{a+bc}{d^3-1}+2(c-\frac{d}{e})$$

αντιστοιχεί το δυαδικό δένδρο



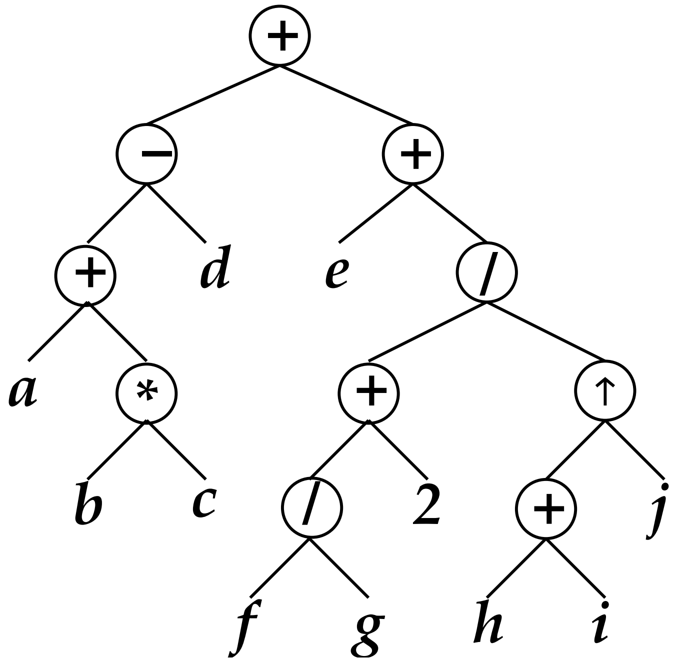
Άρα η πολωνική γραφή δίνει:

$$+/+a*bc-\uparrow d3\ \ 1*2-c/de.$$

2. Στην αλγεβρική παράσταση

$$((a + bc) - d) + \left(e + \frac{\frac{f}{g} + 2}{(h + i)^j}\right)$$

αντιστοιχεί το δυαδικό δένδρο



Άρα η πολωνική γραφή δίνει:

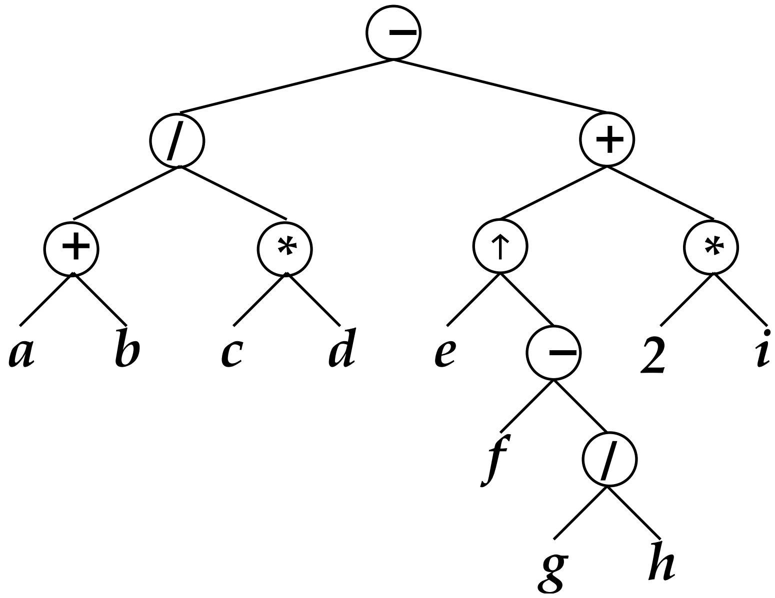
$$+ - +a * bcd + e/ + /fg2 \uparrow +hij.$$

Παρατήρηση: Προφανώς η αντιστοιχία ανάμεσα στους αλγεβρικούς τύπους και την πολωνική γραφή τους είναι αμφιμονοσήμαντη.

Παράδειγμα: Στην πολωνική γραφή

$$-/+ab*cd+\uparrow e-f/gh*2i,$$

αντιστοιχεί το δυαδικό δένδρο

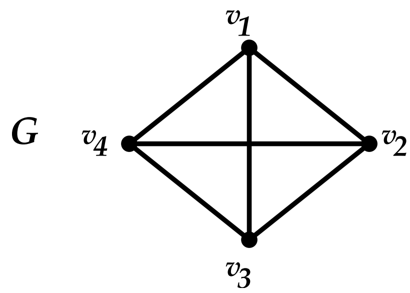


και κατ΄ επέκταση η αλγεβρική παράσταση

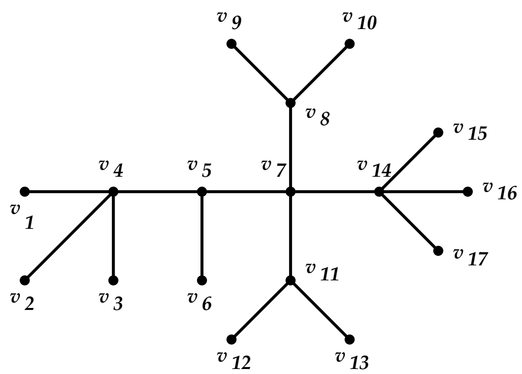
$$\frac{a+b}{cd}-(e^{f-\frac{g}{h}}+2i).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Σχηματίστε το γενεαλογικό δένδρο των απογόνων ενός προπάπου ή μιας προγιαγιάς σας. (Αν δεν γνωρίζετε όλα τα στοιχεία, συμπληρώστε το δένδρο με φανταστικά ονόματα).
2) Σχηματίστε το γενεαλογικό δένδρο των προγόνων σας, μέχρι του προπαπούδες - προγιαγιάδες. (Αν δεν γνωρίζετε όλα τα στοιχεία, συμπληρώστε το δένδρο με φανταστικά ονόματα).
3) Να βρεθούν όλα τα δένδρα ζεύξης του παρακάτω γραφήματος με κορυφές με επιγραφή:



4) Να δοθεί ένας κάκτος με 18 σημεία.
5) Να βρεθεί το κέντρο και το κεντροειδές του παρακάτω δένδρου:



6) Να λυθεί το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων με τη χρήση δένδρου αποφάσεων, στην περίπτωση που εκτός του κανονικού νομίσματος 0, δίδονται 5 άλλα νομίσματα.
7) Να παρασταθούν με ένα δυαδικό δένδρο οι παραστάσεις
   α) $(a-(b-\frac{c}{d}))\cdot(e+f\cdot g)-h$.
   β) $(a-\frac{b}{c})\cdot d+(\frac{e-f}{g}-\frac{hi}{j})$.
   Ακολούθως, να δοθεί η πολωνική τους γραφή.
8) Να βρεθεί η αλγεβρική παράσταση, της οποίας η πολωνική γραφή δίνει:
$$+\div+a*b\,c-\uparrow d\,3\,1*2-c\div d\,w.$$

9) i) Να γενικευθεί η έννοια της πολωνικής γραφής, για μαθηματικές παραστάσεις οι οποίες εκτός από τις πράξεις περιέχουν και πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

ii) Να γραφεί σε πολωνική γραφή η παράσταση:

$$\frac{2x + ln(x^2+1)}{\sqrt{y^4+5}}.$$

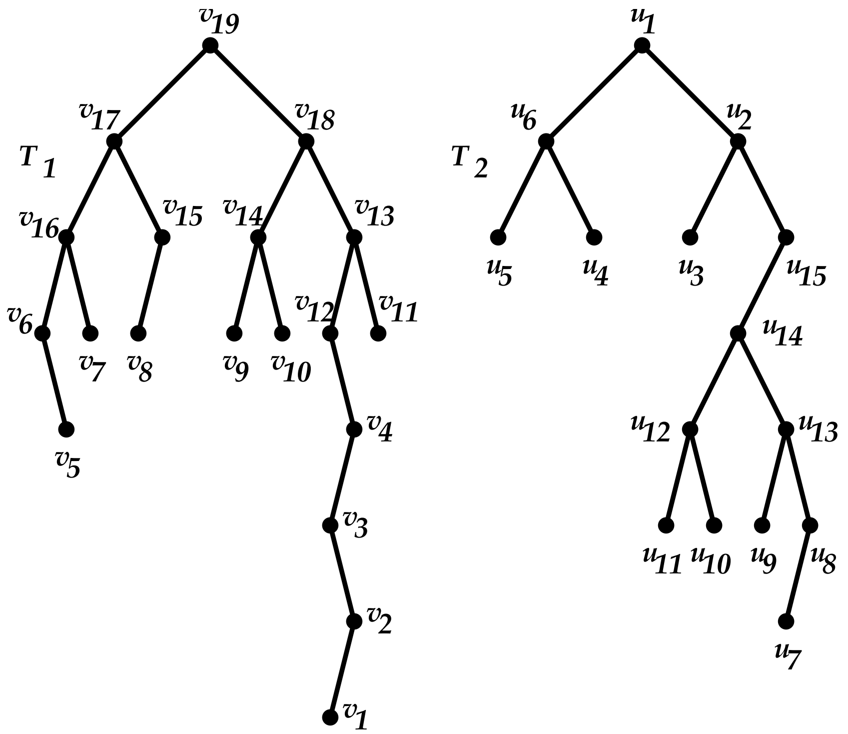
10) i) Να γενικευθεί η έννοια της πολωνικής γραφής, για μαθηματικές παραστάσεις οι οποίες περιέχουν πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

ii) Να γραφεί σε πολωνική γραφή η παράσταση:

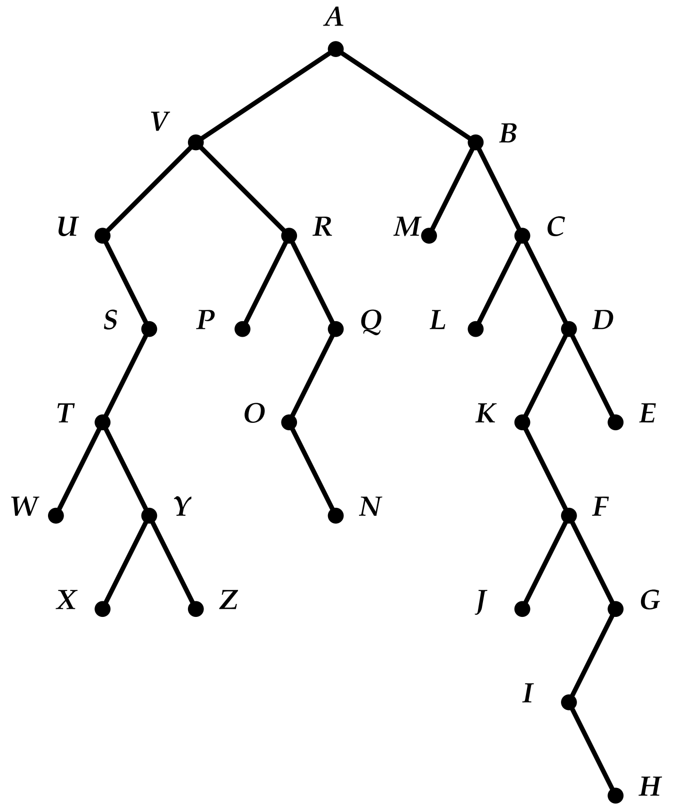
$$\frac{f(x^2+1, y, z-2) - ln(x^2+y^2)}{[g(x,y)]^2 + |x+y|}$$

όπου $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

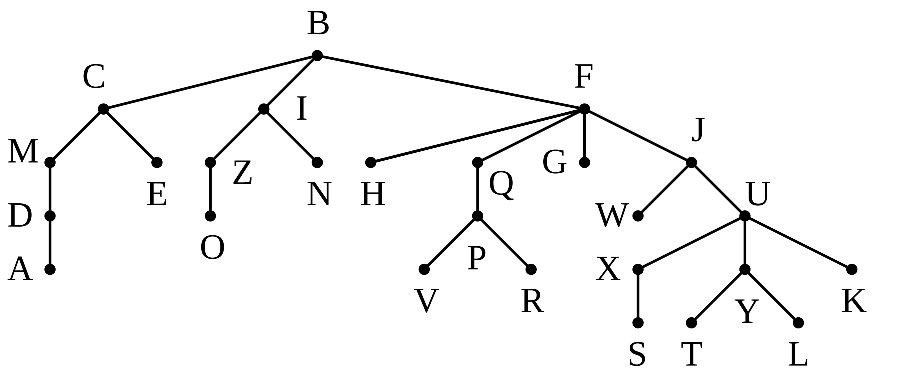
11) Να γίνει επίσκεψη σε προδιάταξη, μεταδιάταξη, ενδοδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων στα παρακάτω δυαδικά δένδρα (με ρίζες v_{19}, u_1 αντίστοιχα):



12) Να γίνει επίσκεψη σε προδιάταξη, ενδοδιάταξη, μεταδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων στο παρακάτω δυαδικό δένδρο (με ρίζα A):



13) Να γίνει επίσκεψη σε προδιάταξη, ενδοδιάταξη, μεταδιάταξη και διάταξη κατά σειρά επιπέδων στο παρακάτω διατεταγμένο δένδρο (με ρίζα B):



Κεφάλαιο 3

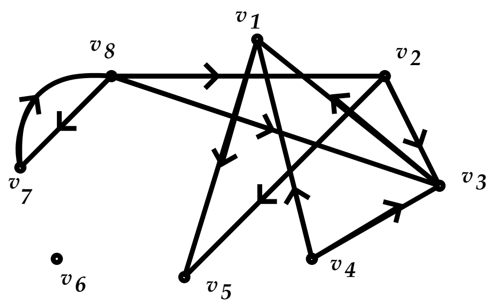
ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΤΟΞΩΝ

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Κάθε δυάδα $G = (V(G), U(G))$, ή (V, U), ή (V, U), όπου V είναι ένα μη κενό σύνολο και U είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη $(v, u) \in V^2$ ονομάζεται **γράφημα τόξων**, ή **προσανατολισμένο γράφημα**, ή **γράφημα με κατεύθυνση**, ή **διγράφημα**.

Τα στοιχεία του V καλούνται **κορυφές**, ή **σημεία**, ή **κόμβοι** όπως και στα γραφήματα δεσμών, ενώ τα στοιχεία του U καλούνται **τόξα** και συμβολίζονται γραφικά με τόξα.

Παράδειγμα: Η δυάδα $G = (V(G), U(G))$ όπου $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ και $U(G) = \{(v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_1), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_7, v_8), (v_8, v_2), (v_8, v_3), (v_8, v_7)\}$ είναι ένα γράφημα τόξων. Η γραφική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:



Το τόξο (v, v), $v \in V$ ονομάζεται **βρόχος**.

Οι ορισμοί είναι αντίστοιχοι με αυτούς που δώσαμε στα γραφήματα δεσμών με τις εξής επισημάνσεις:

Τώρα ορίζεται **βαθμός εξόδου** $d_+(v)$ ενός κόμβου v (πόσοι δεσμοί ''φεύγουν'' από τον κόμβο) και **βαθμός εισόδου** $d_-(v)$ (πόσοι δεσμοί ''φθάνουν'').

Έτσι,

$$d_+(v) = |\{u \in V(G) : (v, u) \in U(G)\}|,$$

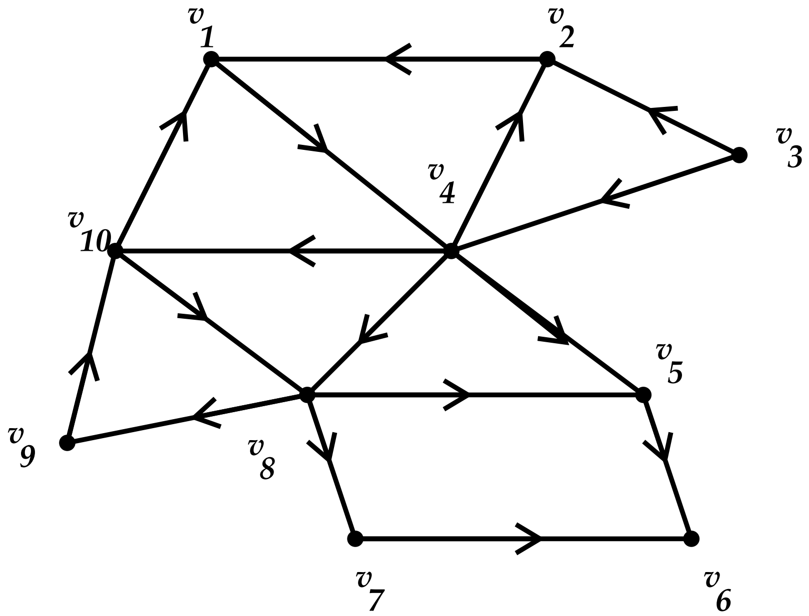
ενώ

$$d_-(v) = |\{u \in V(G) : (u, v) \in U(G)\}|$$

Προφανώς τώρα ο **βαθμός** $d(v)$ ενός κόμβου v ορίζεται από την σχέση

$$d(v) = d_+(v) + d_-(v).$$

Παράδειγμα: Στο επόμενο γράφημα



είναι $d_+(v_8) = 3$, $d_-(v_8) = 2$, $d(v_8) = 5$, $d_-(v_2) = 2$, $d_-(v_3) = 0$, κ.λπ.

Η διαδρομή σε ένα γράφημα τόξων πρέπει εν γένει να ''ακολουθεί'' τη διεύθυνση κάθε τόξου.

Υπάρχουν διάφορα είδη συνεκτικότητας στα γραφήματα τόξων:

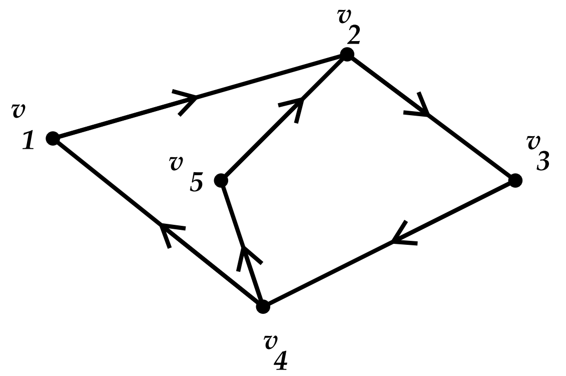
Ένα γράφημα τόξων λέγεται **ισχυρά συνεκτικό** αν για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει μονοπάτι και από τον πρώτο προς τον δεύτερο, και από τον δεύτερο προς τον πρώτο.

Ένα γράφημα τόξων λέγεται **μονομερώς συνεκτικό** αν δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, αλλά για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει μονοπάτι είτε από τον πρώτο προς τον δεύτερο, είτε από τον δεύτερο προς τον πρώτο.

Ένα γράφημα τόξων λέγεται **ασθενώς συνεκτικό** αν δεν είναι ισχυρά ή μονομερώς συνεκτικό, αλλά για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει **ημιδιαδρομή** μεταξύ τους (δηλαδή τώρα επιτρέπεται και διάτρεξη τόξων αντίθετα με τον προσανατολισμό τους, αν χρειαστεί).

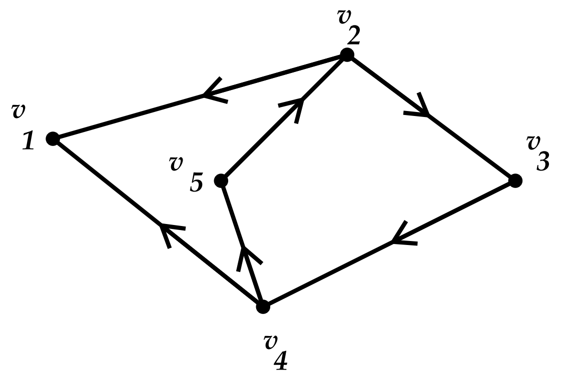
Παραδείγματα:

G1



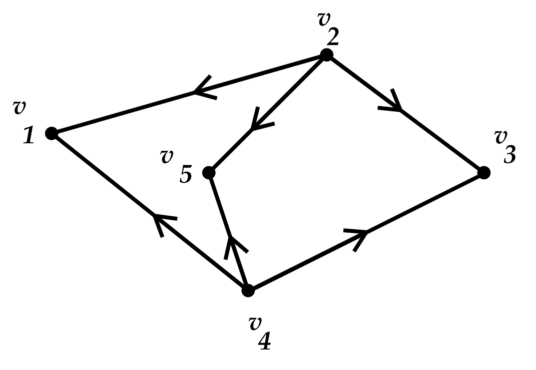
Το γράφημα G_1 είναι ισχυρά συνεκτικό.

G2



Το γράφημα G_2 είναι μονομερώς συνεκτικό (αφού για παράδειγμα, δεν υπάρχει $v_1 - v_3$ μονοπάτι, ενώ υπάρχει μονοπάτι $v_3 - v_1$).

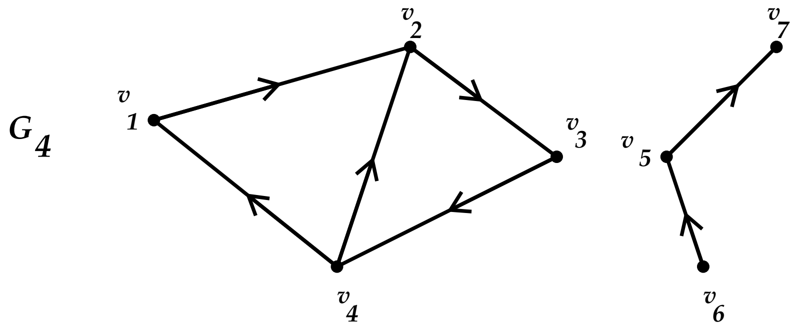
G3



Το γράφημα G_3 είναι ασθενώς συνεκτικό (αφού για παράδειγμα δεν υπάρχει ούτε $v_2 - v_4$, ούτε $v_4 - v_2$ μονοπάτι, ενώ υπάρχει η ημιδιαδρομή (v_2, v_3, v_4)).

Ένα γράφημα τόξων ονομάζεται **μη συνεκτικό** αν δεν είναι ούτε ασθενώς, ούτε μονομερώς, ούτε ισχυρά συνεκτικό.

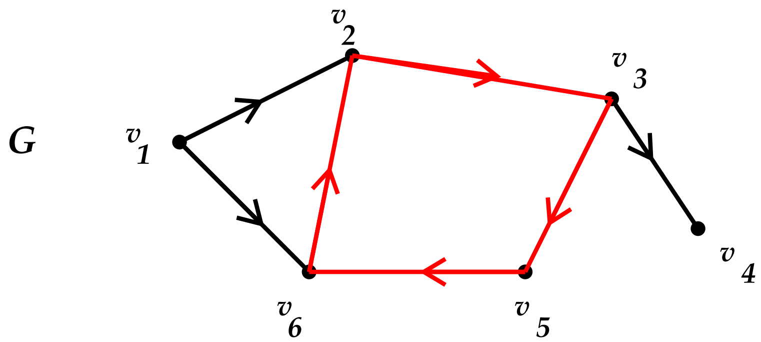
Παράδειγμα:



Το γράφημα G_4 είναι μη συνεκτικό.

Συνήθως η κλειστή διαδρομή που σχηματίζεται από τόξα λέγεται **κύκλωμα**.

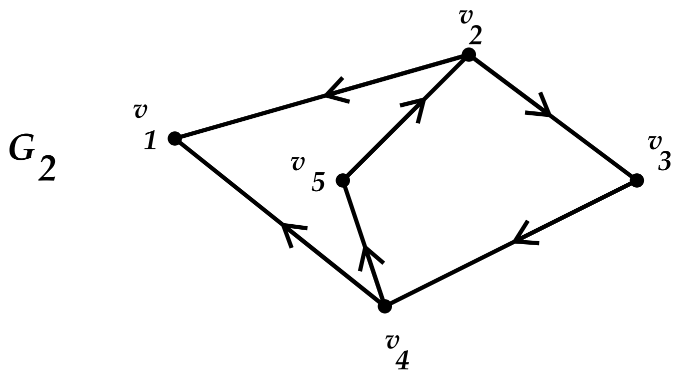
Παράδειγμα:



Στο γράφημα G η διαδρομή $(v_2, v_3, v_5, v_6, v_2)$ είναι κύκλωμα, ενώ η ημιδιαδρομή (v_1, v_2, v_6, v_1) δεν είναι.

Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα ενός γραφήματος τόξων G ονομάζεται οποιοδήποτε μεγιστικό ισχυρά συνεκτικό υπογράφημα του G.

Για παράδειγμα, το γράφημα G_2

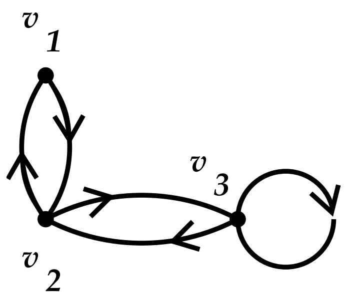


(το οποίο όπως είδαμε δεν είναι ισχυρά συνεκτικό) περιέχει μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα: το κύκλωμα $(v_2, v_3, v_4, v_5, v_2)$.

Στα γραφήματα τόξων ορίζουμε και τα παρακάτω είδη γραφημάτων:
Συμμετρικό ονομάζεται ένα γράφημα τόξων $G = (V, U)$ για το οποίο ισχύει

$$(u, v) \in U \Leftrightarrow (v, u) \in U.$$

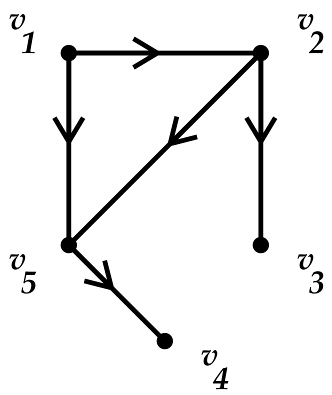
Παράδειγμα:



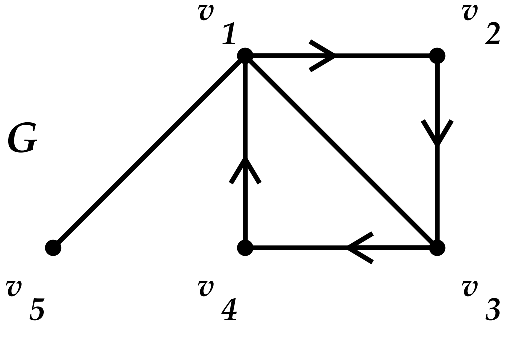
Αντισυμμετρικό ονομάζεται ένα γράφημα τόξων $G = (V, U)$ για το οποίο ισχύει

$$(u, v) \in U \Leftrightarrow (v, u) \notin U$$

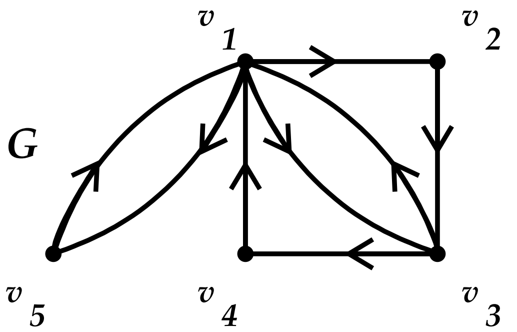
Παράδειγμα:



Παρατήρηση: Μερικές φορές εμφανίζονται γραφήματα που περιέχουν συγχρόνως και δεσμούς και τόξα.
Παράδειγμα:



Τα γραφήματα αυτά, τα θεωρούμε ουσιαστικά ως γραφήματα τόξων, αντικαθιστώντας κάθε δέσμο $\{v, u\}$ με δύο τόξα (v, u) και (u, v). Έτσι, το προηγούμενο παράδειγμα γράφεται:



Φυσικά, με την ίδια λογική μπορούμε γενικά οποιοδήποτε γράφημα δεσμών να το θεωρήσουμε αντίστοιχα ως γράφημα τόξων, το οποίο θα είναι προφανώς συμμετρικό. Το μειονέκτημα μιας τέτοιας προσέγγισης είναι ότι η αντίστοιχη θεωρία και οι εφαρμογές γίνονται γενικά πολύ πιο πολύπλοκες.

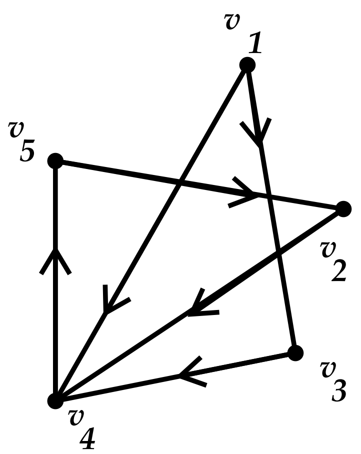
2. ΜΗΤΡΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

Έστω $G = (V, U)$ ένα γράφημα τόξων. Ορίζουμε την $|V| \times |V|$ μήτρα M_G ή M του G ως εξής:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (v_i, v_j) \in U \\ 0, & \text{αν } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Η μήτρα αυτή ονομάζεται **μήτρα (γειτονικότητας) του γραφήματος τόξων**.

Παράδειγμα: Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Προταση 19. *Ο αριθμός των v_i-v_j διαδρομών μήκους ν σε ένα γράφημα τόξων G, ισούται με το στοιχείο μ_{ij} της μήτρας $M^\nu = [\mu_{ij}]$.*

Απόδειξη: Για $\nu = 1$ προφανώς ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $\nu = k$ (και έστω ότι $M = [m_{ij}]$ και $M^k = [p_{ij}]$).

Για $\nu = k + 1$ θα είναι $M^{k+1} = M^k M = [q_{ij}]$, όπου

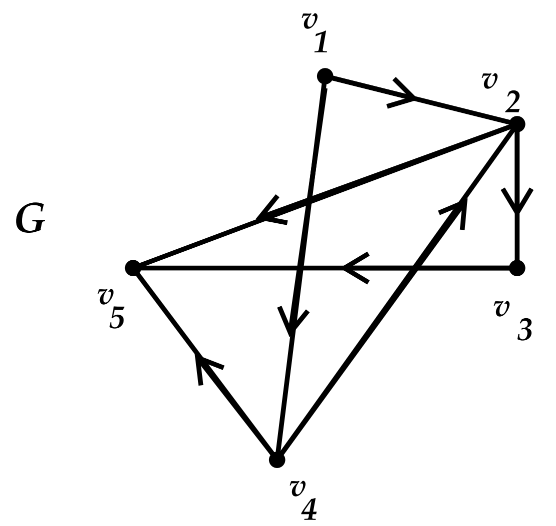
$$q_{ij} = \sum_{r=1}^{n} p_{ir} m_{rj} \tag{1}$$

(όπου $n = |V|$).

Από την υπόθεση της επαγωγής, p_{ir} είναι ο αριθμός των διαδρομών μήκους k από τον v_i στον v_r. Επίσης, m_{rj} είναι ο αριθμός των τόξων (δηλαδή των διαδρομών μήκους 1) από τον v_r στον v_j. Τότε το $p_{ir} m_{rj}$ είναι ο αριθμός των διαδρομών μήκους $k + 1$ από τον v_i στον v_j, με προτελευταίο κόμβο τον v_r.

Άρα το $\sum_{r=1}^{n} p_{ir}m_{rj}$ (δηλαδή, λόγω της (1), το q_{ij}) θα είναι ο αριθμός όλων των διαδρομών μήκους $k+1$ από τον v_i στον v_j με προτελευταίο κόμβο έναν από τους $v_1, v_2, \ldots, v_n$, δηλαδή θα είναι πράγματι ο αριθμός όλων των διαδρομών μήκους $k+1$ από τον v_i στον v_j. $\square$

Παράδειγμα: Για το γράφημα



έχουμε

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^5 = O_5.$$

Στην M^3 έχουμε $q_{15} = 2$, άρα υπάρχουν δύο διαδρομές μήκους 3 από το v_1 ως το v_5. (Πράγματι, είναι οι (v_1, v_2, v_3, v_5), (v_1, v_4, v_2, v_5)), ενώ $q_{14} = 0$, άρα δεν υπάρχει διαδρομή μήκους 3 από το v_1 στο v_4. Στην M^4 έχουμε $q_{15} = 1$, άρα υπάρχει μια διαδρομή μήκους 4 από το v_1 ως το v_5: $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5)$.

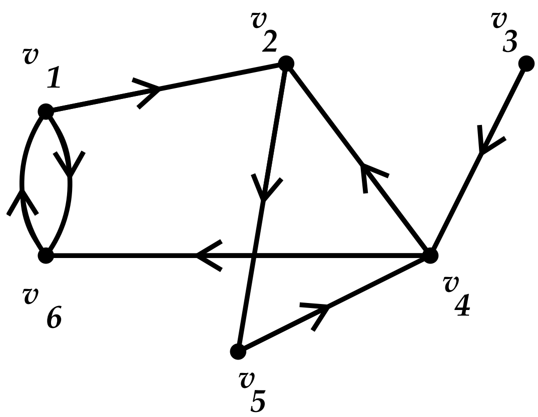
3. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

Έστω $G = (V, U)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Gamma : V \to \mathcal{P}(V) \text{ με } \Gamma(v) = \{u \in V : (v, u) \in U\}.$$

Παρατήρηση: Το ζεύγος (V, Γ) ορίζει το γράφημα G ισοδύναμα με το (V, U) και γι' αυτό μπορούμε να αναφερόμαστε και στο γράφημα (V, Γ) αντί (V, U). Η Γ ονομάζεται **απεικόνιση του γραφήματος τόξων**.

Παράδειγμα: Για το γράφημα



έχουμε $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_6\}$, $\Gamma(v_2) = \{v_5\}$, $\Gamma(v_3) = \{v_4\}$ κ.λπ.

Αντίστοιχα με τα γραφήματα δεσμών, αν $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, τότε

$$\Gamma(A) = \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_2) \cup \cdots \cup \Gamma(v_k)$$

και (αναδρομικά), για $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma^n(v) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(v)).$$

Παραδείγματα: Για το τελευταίο γράφημα έχουμε:
$\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(v_1)) = \Gamma(\{v_2, v_6\}) = \{v_1, v_5\}$ και
$\Gamma^3(v_1) = \Gamma(\Gamma^2(v_1)) = \Gamma(\{v_1, v_5\}) = \{v_2, v_4, v_6\}$.

Ανάλογα ορίζουμε

$$\Gamma^{-1} : V \to \mathcal{P}(V) \text{ με } \Gamma^{-1}(v) = \{u \in V : (u, v) \in U\},$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \Gamma^{-1}(v_1) \cup \Gamma^{-1}(v_2) \cup \cdots \cup \Gamma^{-1}(v_k), \text{ όπου } A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

και (αναδρομικά) για $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma^{-n}(v) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-n+1}(v)).$$

Παράδειγμα: Για το τελευταίο γράφημα έχουμε:
$\Gamma^{-1}(v_1) = \{v_6\}$, $\Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1, v_4\}$, $\Gamma^{-1}(v_3) = \emptyset$ κ.λπ. και
$\Gamma^{-2}(v_6) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(v_6)) = \{v_3, v_5, v_6\}$.

Τέλος ορίζουμε τη **μεταβατική πρόσβαση** $\widehat{\Gamma}$ ενός κόμβου $v \in V$ ως εξής:

$$\widehat{\Gamma}(v) = \{v\} \cup \Gamma(v) \cup \Gamma^2(v) \cup \cdots$$

Παράδειγμα: Για το τελευταίο γράφημα έχουμε:
$\widehat{\Gamma}(v_4) = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$,
$\widehat{\Gamma}(v_3) = V$, κ.λπ.

Ισχύουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πρόταση 20. *Το υποσύνολο των κόμβων ενός γραφήματος τόξων στους οποίους καταλήγουν οι διαδρομές που αρχίζουν από τον κόμβο v και έχουν μήκος k, ισούται με $\Gamma^k(v)$.*

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

Πρόταση 21. *Το υποσύνολο των κόμβων ενός γραφήματος τόξων από τους οποίους αρχίζουν οι διαδρομές μήκους k που καταλήγουν στον κόμβο v, ισούται με $\Gamma^{-k}(v)$.*

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

Πρόταση 22. *Το υποσύνολο των κόμβων ενός γραφήματος τόξων στους οποίους καταλήγουν οι διαδρομές που αρχίζουν από τον κόμβο v ισούται με $\widehat{\Gamma}(v)$.*

Η απόδειξη είναι προφανής.

Πρόταση 23. *Αν $\widehat{\Gamma}(v) = V$, για κάθε $v \in V$, τότε από κάθε κόμβο αρχίζουν διαδρομές που καταλήγουν σε κάθε άλλο κόμβο του γραφήματος.*

Η απόδειξη είναι προφανής.

4. ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ - ΣΤΑΘΜΕΣ

Αν έχουμε μια δραστηριότητα που αποτελείται από διάφορες τεχνολογικές διαδικασίες, οι οποίες υπόκεινται σε κάποιες σχέσεις προτεραιότητας, μπορούμε να σχηματίσουμε το σχετικό γράφημα τόξων και να κατατάξουμε τις κορυφές σε στάθμες (που καθορίζουν τη ''σειρά'' με την οποία πραγματοποιούνται οι διαδικασίες) χρησιμοποιώντας την παρακάτω μέθοδο (Μέθοδος Demoucron). (Η μέθοδος εφαρμόζεται με την προϋπόθεση ότι το αντίστοιχο γράφημα δεν έχει κυκλώματα):

Σχηματίζουμε ένα πίνακα (με p γραμμές) ως εξής:

Στις πρώτες p στήλες $v_1, v_2, \ldots, v_p$ τοποθετούμε 0 και 1, όπως ακριβώς στη μήτρα γειτονικότητας του γραφήματος, (συνήθως παραλείπουμε τα 0).

Τις επόμενες στήλες $S_0, S_1, \ldots$, τις συμπληρώνουμε διαδοχικά, χρησιμοποιώντας την εξής αναδρομική διαδικασία:

Στη στήλη S_0 γράφουμε στις αντίστοιχες γραμμές το άθροισμα των 1 κάθε γραμμής (δηλαδή, τους βαθμούς εξόδου των κόμβων $v_1, v_2, \ldots, v_p$). Γράφουμε κάτω από τον πίνακα τους κόμβους με βαθμό εξόδου 0. Οι κόμβοι αυτοί θα τοποθετηθούν στην τελευταία στάθμη. (Δεν θα ασχοληθούμε άλλο με τις γραμμές που αντιστοιχούν στους κόμβους αυτούς. Γράφουμε $\times$ σε κάθε στήλη, δεξιά από κάθε 0).

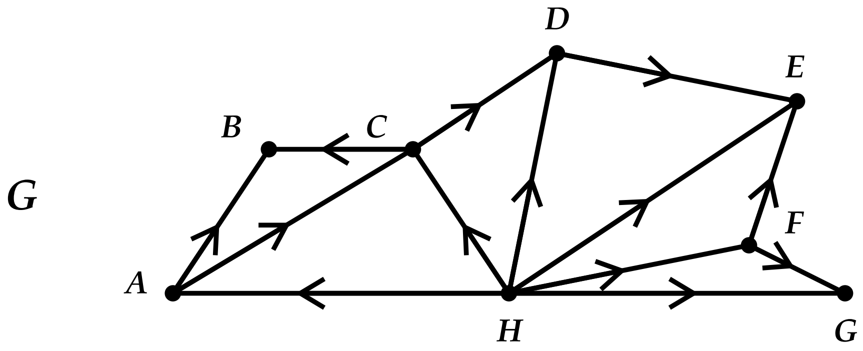
Έστω τώρα, ότι έχουμε συμπληρώσει μέχρι και τη στήλη S_n, $(n \geq 0)$ και έχουμε γράψει κάτω από τον πίνακα και τους κόμβους $v_i, \ldots, v_j$ που αντιστοιχούν στα 0 της στήλης S_n, (οι οποίοι θα είναι οι κόμβοι στην n-στή πριν από το τέλος στάθμη).

Στη στήλη S_{n+1} γράφουμε τα στοιχεία της στήλης S_n, καθένα μειωμένο κατά τόσες μονάδες, όσα είναι τα 1 που περιέχονται στις στήλες $v_i, \ldots, v_j$ της αντίστοιχης γραμμής. Οι κόμβοι που αντιστοιχούν στα 0 της στήλης αυτής, είναι τα στοιχεία της $(n+1)$-στής πριν από το τέλος στάθμης.

Η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν σχηματισθεί μια στήλη S_l που αποτελείται μόνο από 0 και $\times$.

Παράδειγμα: Έστω A, B, C, D, E, F, G, H οι τεχνολογικές διαδικασίες, που υπόκεινται σε μια σχέση ''τεχνολογικής προτεραιότητας'' ως εξής: $A > B$, $A > C$, $C > B$, $C > D$, $D > E$, $F > E$, $F > G$, $H > A$, $H > C$, $H > D$, $H > E$, $H > F$, $H > G$, (γράφουμε $x > y$, όταν η δραστηριότητα x προηγείται της y).

Σχηματίζουμε το αντίστοιχο γράφημα τόξων G:

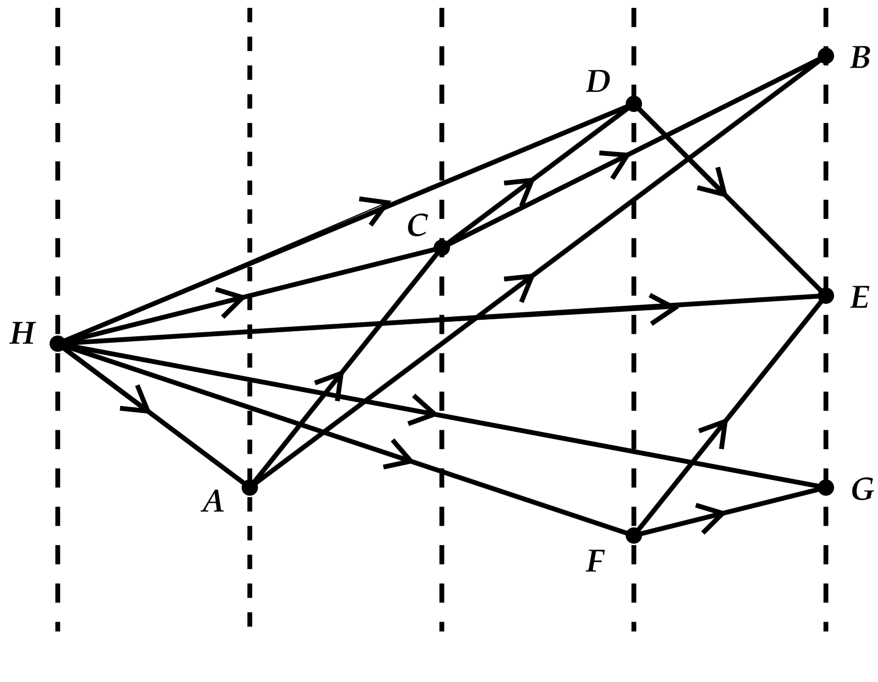


Η παραπάνω διαδικασία δίνει:

	A	B	C	D	E	F	G	H	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
A		1	1						2	1	1	0	$\times$
B									0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
C		1		1					2	1	0	$\times$	$\times$
D					1				1	0	$\times$	$\times$	$\times$
E									0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
F					1		1		2	0	$\times$	$\times$	$\times$
G									0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
H	1		1	1	1	1	1		6	4	2	1	0

Τα B, E, G βρίσκονται στην τελευταία στάθμη.
Τα D, F βρίσκονται στην προτελευταία στάθμη.
Το C βρίσκεται στην τρίτη από το τέλος στάθμη.
Το A βρίσκεται στην τετάρτη από το τέλος στάθμη.
Το H βρίσκεται στην πρώτη στάθμη,

οπότε



5. ΔΕΝΔΡΟΕΙΔΗ

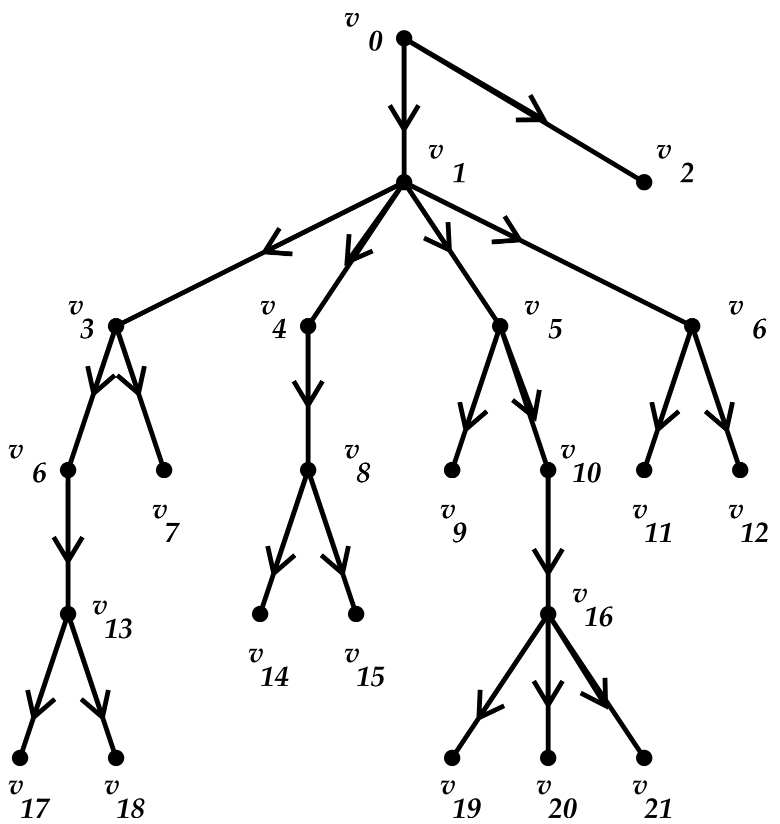
Κάθε γράφημα $G = (V, \Gamma)$ χωρίς κυκλώματα, για το οποίο υπάρχει $v_0 \in V$, με

$$\Gamma^{-1}(v_0) = \emptyset,$$

$$|\Gamma^{-1}(v_i)| = 1, \text{ για κάθε } v_i \neq v_0$$

ονομάζεται **δενδροειδές** (ή **προσανατολισμένο δένδρο**) **με ρίζα** v_0.

Παράδειγμα:



6. ΠΥΡΗΝΑΣ - ΒΑΣΕΙΣ

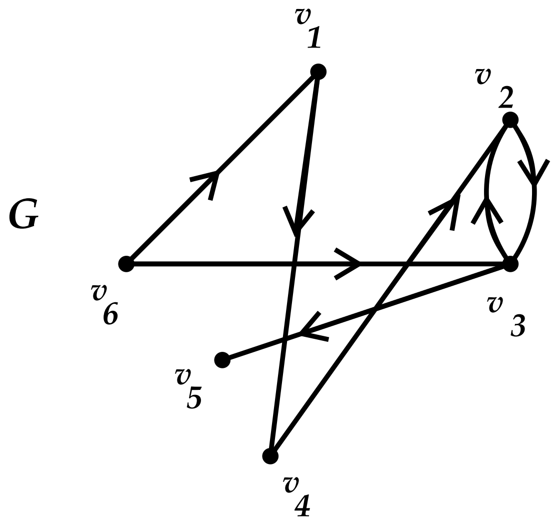
Έστω $G = (V, \Gamma)$ ένα γράφημα τόξων. Το $S \subseteq V$ λέγεται **ευσταθές** σύνολο, όταν δύο οποιοιδήποτε κόμβοι του δεν συνδέονται με τόξο, δηλαδή όταν

$$v \in S \Rightarrow \Gamma(v) \cap S = \emptyset.$$

Το $A \subseteq V$ λέγεται **απορροφητικό** σύνολο, όταν κάθε κόμβος που δεν ανήκει στο A συνδέεται με τόξο, με ένα τουλάχιστον κόμβο προς το A, δηλαδή όταν

$$v \notin A \Rightarrow \Gamma(v) \cap A \neq \emptyset.$$

Παράδειγμα: Για το γράφημα G



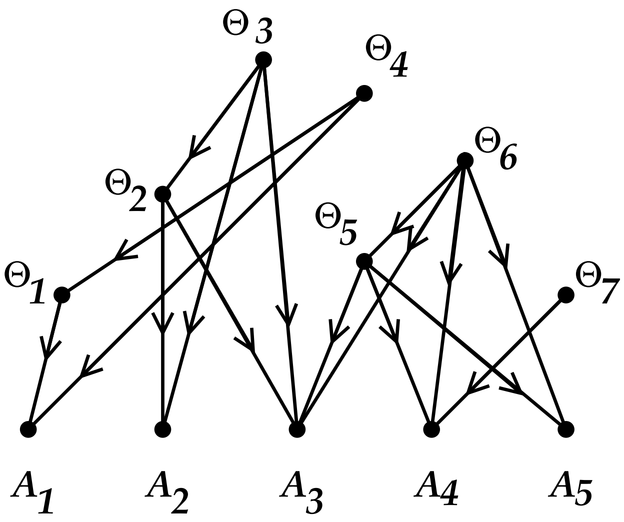
το σύνολο $\{v_4, v_5, v_6\}$ είναι ευσταθές σύνολο, το σύνολο $\{v_3, v_4, v_5\}$ είναι απορροφητικό σύνολο, ενώ το σύνολο $\{v_1, v_2, v_5\}$ είναι συγχρόνως ευσταθές και απορροφητικό.

Το $N \subseteq V$ λέγεται **πυρήνας** όταν είναι συγχρόνως και ευσταθές και απορροφητικό.

Παραδείγματα:

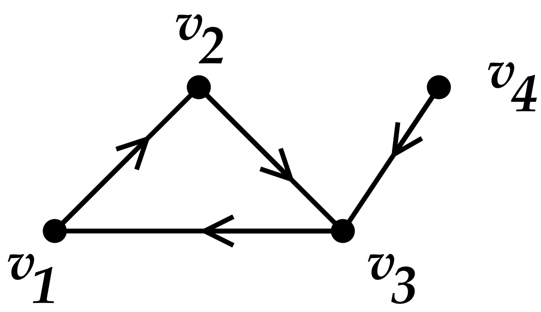
1. Το σύνολο $\{v_1, v_2, v_5\}$ του προηγούμενου γραφήματος G είναι ένας πυρήνας του.
2. Έστω V το σύνολο των προτάσεων μιας θεωρίας η οποία αποτελείται από αξιώματα και θεωρήματα, με U το σύνολο των τόξων που ορίζονται ως εξής:

   $(\alpha, \beta) \in U$ ανν το β χρησιμοποιείται για την απόδειξη του α (άμεσα ή έμμεσα). Τότε το σύνολο N όλων των αξιωμάτων είναι ένας πύρηνας του γραφήματος.

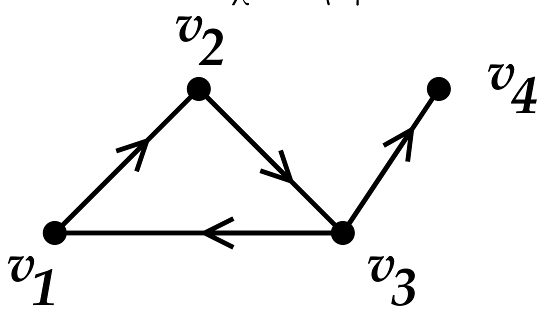


Ένα γράφημα τόξων μπορεί να μην έχει πυρήνα.

Παραδείγματα:



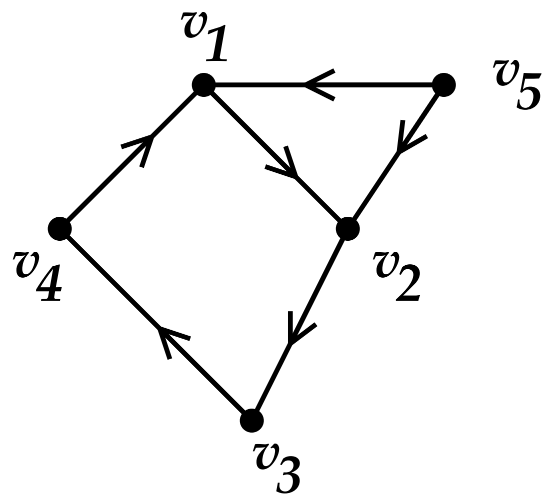
Δεν έχει πυρήνα.



Το σύνολο $\{v_2, v_4\}$ είναι ένας πυρήνας.

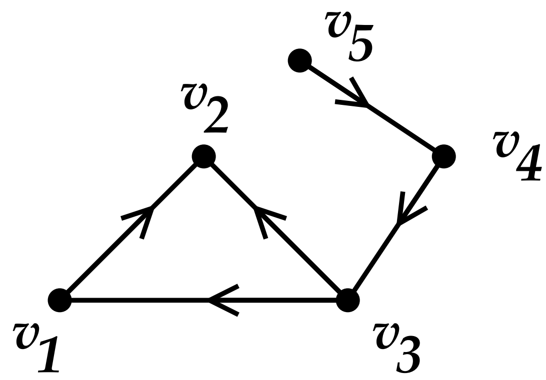
Προταση 24. *Ένα γράφημα τόξων που δεν έχει κυκλώματα περιττού μήκους έχει τουλάχιστον ένα πυρήνα.*

Παράδειγμα:



Τα σύνολα $\{v_1, v_3\}$ και $\{v_2, v_4\}$ είναι δύο πυρήνες του γραφήματος.

Προταση 25. *Ένα γράφημα τόξων χωρίς κυκλώματα έχει ένα μόνο πυρήνα.*



Το σύνολο $\{v_2, v_4\}$ είναι ο μοναδικός πυρήνας του γραφήματος.

Βάση του $G = (V, \Gamma)$ ονομάζεται κάθε $B \subset V$ για το οποίο:

i) Δεν υπάρχει δρόμος που να συνδέει δύο οποιουσδήποτε κόμβους του.

ii) Κάθε κόμβος $x \notin B$ είναι η αρχή δρόμου με πέρας κόμβο του B.

(Αν $|B| = 1$, τότε το B ονομάζεται **ρίζα** του G).

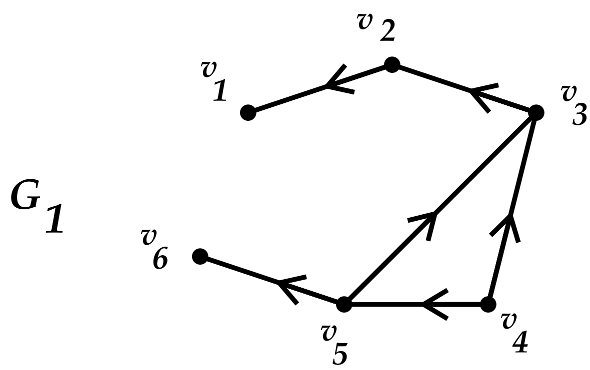
Αντιβάση ονομάζεται κάθε $T \subset V$ για το οποίο:

i) Δεν υπάρχει δρόμος που να συνδέει δύο οποιουσδήποτε κόμβους του.

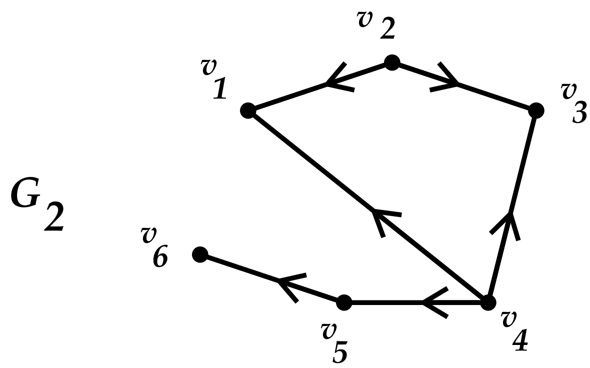
ii) Κάθε κόμβος $x \notin T$ είναι πέρας δρόμου με αρχή κόμβο του T.

(Αν $|T| = 1$, τότε το T ονομάζεται **αντιρίζα** του G).

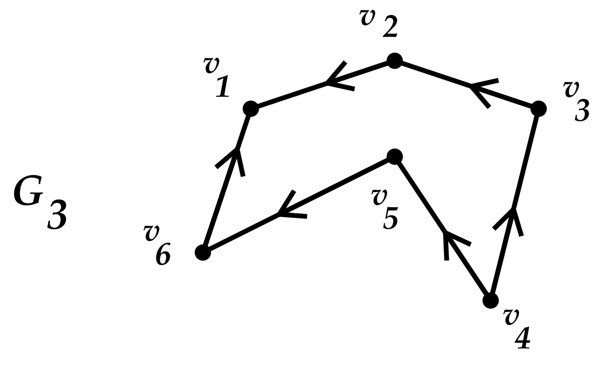
Παράδειγματα: Μια βάση του γραφήματος G_1



είναι η $B = \{v_1, v_6\}$. Το γράφημα G_1 δεν έχει ρίζα.
Μια αντιβάση του γραφήματος G_2



είναι η $T = \{v_2, v_4\}$. Το γράφημα G_2 δεν έχει αντιρίζα.
Στο γράφημα G_3 το v_1 είναι ρίζα ενώ το v_4 είναι αντιρίζα.



(Στα δίκτυα επικοινωνιών οι αντιβάσεις είναι οι πηγές πληροφοριών, ενώ οι βάσεις είναι οι τελικοί αποδέκτες).

7. ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ

Υποθέτουμε ότι για τις εργασίες ενός έργου ισχύει ο παρακάτω πίνακας, όπου το i (αντίστοιχα το j) συμβολίζει την έναρξη (αντίστοιχα τη λήξη) μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας σε ένα έργο, ενώ ο χρόνος t_{ij} είναι ο αναμενόμενος χρόνος για την πραγματοποίηση της δραστηριότητας (i, j) του έργου.

Δραστηριότητες		Χρόνος
i	j	t_{ij}
1	2	5
1	3	6
1	4	6
2	3	3
2	5	4
2	6	3
3	4	5
3	6	6
3	8	4
3	9	7
4	7	7
5	9	2
5	11	4
6	7	4
6	9	5
7	8	7
7	11	2
8	9	3
8	10	2
9	10	3
10	12	8
11	12	9

Θεωρούμε ότι η έναρξη της δραστηριότητας (j, k) λαμβάνει χώρα μόνο όταν έχουν πραγματοποιηθεί όλες οι δραστηριότητες (i, j), (για $j \neq 1$).

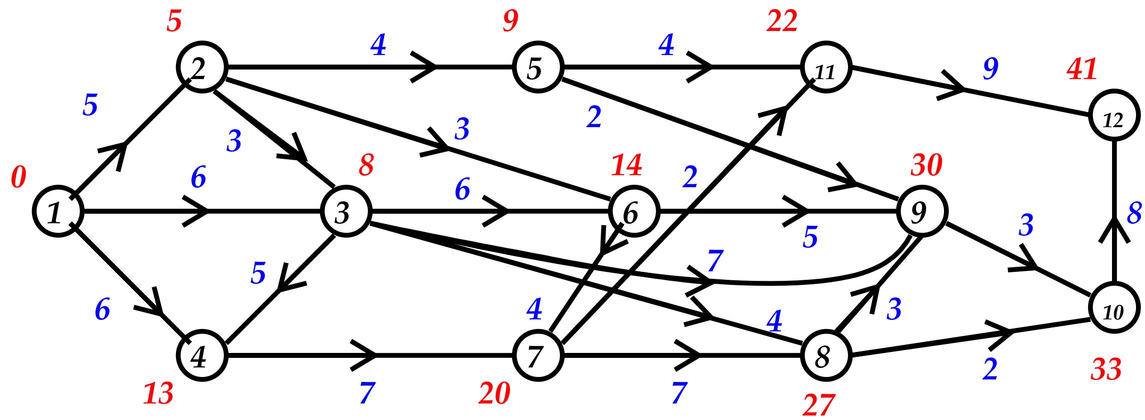
Από τα παραπάνω προκύπτει ένα γράφημα τόξων με κόμβους τις ενάρξεις και τις λήξεις των δραστηριοτήτων, τόξα τις αντίστοιχες δραστηριότητες και αριθμούς στα τόξα οι οποίοι δίνουν τους αναμενόμενους χρόνους για κάθε τέτοια δραστηριότητα. Ο κόμβος 1 δίνει την έναρξη και ο κόμβος 12 τη λήξη του έργου.

Το γράφημα δεν πρέπει να περιέχει κυκλώματα.

Ζητάμε τον **ενωρίτερο χρόνο** κατά τον οποίο μπορεί να ολοκληρωθεί το έργο. Αρκεί λοιπόν να βρούμε διαδοχικά τον ενωρίτερο χρόνο ολοκλήρωσης για να φτάσουμε σε κάθε κόμβο, υποθέτοντας ότι ο ενωρίτερος χρόνος για το 1 (έναρξη) είναι 0.

Ο ζητούμενος ενωρίτερος χρόνος ολοκλήρωσης του έργου, είναι λοιπόν προφανώς ο ενωρίτερος χρόνος για τον κόμβο 12 (λήξη του έργου).

Οι διαδοχικοί χρόνοι είναι σημειωμένοι δίπλα στην κάθε κορυφή του γραφήματος.



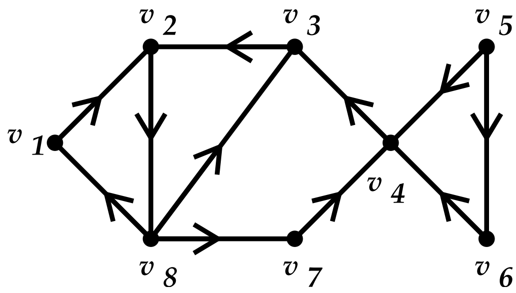
Βλέπουμε λοιπόν ότι ο ενωρίτερος χρόνος για την ολοκλήρωση του έργου με τα δεδομένα του προηγούμενου πίνακα είναι 41.

Ο δρόμος (1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 12) που αντιστοιχεί στον ανωτέρω χρόνο ονομάζεται **κρίσιμος δρόμος** του έργου και οι αντίστοιχες δραστηριότητες **κρίσιμες δραστηριότητες**.

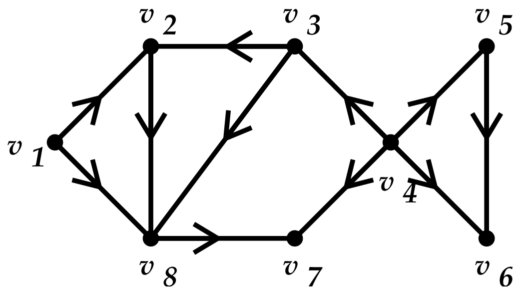
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να εξετασθούν ως προς τη συνεκτικότητα τα παρακάτω γραφήματα τόξων:

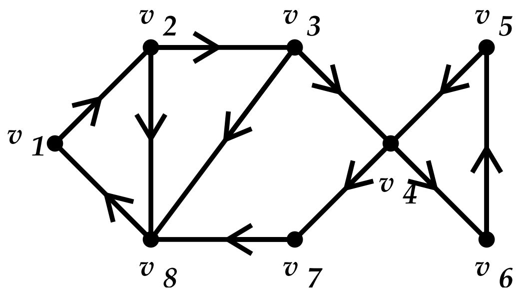
G_1



G_2



G_3

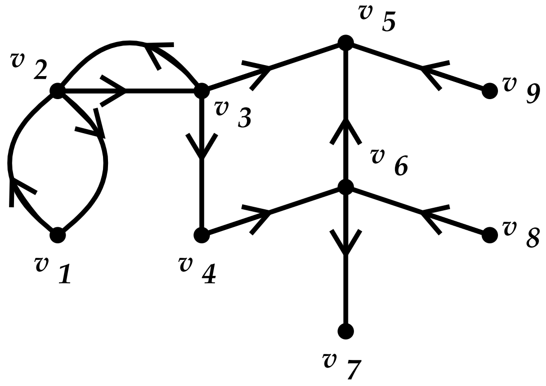


2) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|U|$, για ένα απλό γράφημα τόξων $G = (V, U)$ με $|V| = n$.

3) Να σχεδιαστεί ένα ισχυρά συνεκτικό, ένα ασθενώς συνεκτικό και ένα μονομερώς συνεκτικό γράφημα τόξων με 7 τουλάχιστον κόμβους.

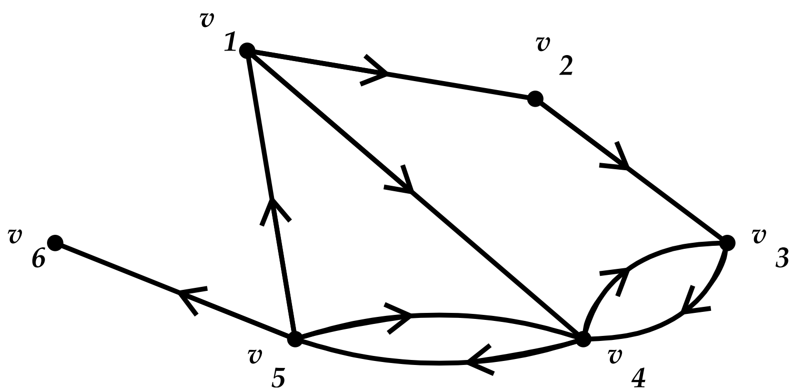
4) Να παρασταθούν
i) γραφικά, ii) με μήτρα, iii) μέσω απεικόνισης,
το γράφημα τόξων (V, U) με
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ και
$U = \{(v_1, v_1), (v_1, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_1), (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_5)$
και το γράφημα δεσμών (V, E) με
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ και
$E = \{\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_6\}, \{v_1, v_5\}\}.$

5) Δίδεται το γράφημα τόξων



Να βρεθούν τα: $\Gamma^2(v_2)$, $\Gamma^{-2}(v_5)$ καθώς και τα $\widehat{\Gamma}(v_3)$, $\widehat{\Gamma}(v_5)$.

6) Δίνεται το γράφημα τόξων

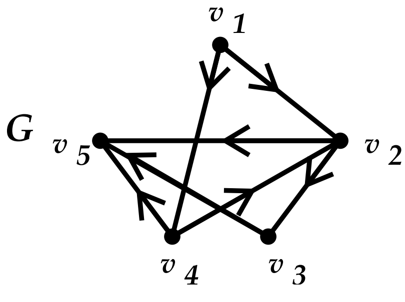


Να βρεθεί η απεικόνιση $\Gamma : V \to \mathcal{P}(V)$ και η μήτρα του γραφήματος. Να δοθούν δύο δρόμοι μήκους 4, και ένα κύκλωμα.

7) Να σχεδιασθεί το γράφημα τόξων το οποίο έχει μήτρα γειτονικότητας

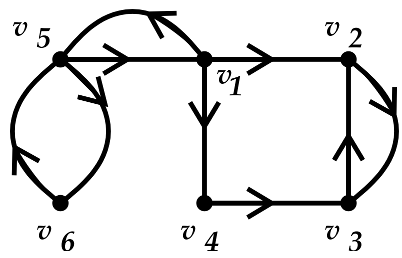
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8) Δίδεται το γράφημα τόξων



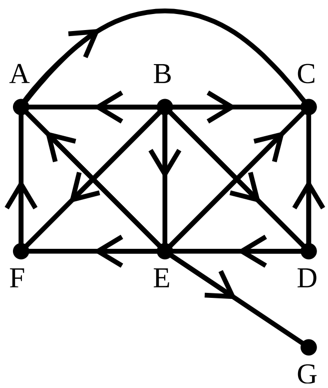
Να βρεθεί η μήτρα γειτονικότητας M, η M^3 και ακολούθως να βρεθούν όλες οι διαδρομές μήκους 3 στο G.

9) Δίδεται το γράφημα τόξων



Να βρεθεί πόσες διαδρομές μήκους 3 υπάρχουν από τον v_1 στον v_2, και πόσες διαδρομές μήκους 4 υπάρχουν από τον v_1 στον v_1, από τον v_1 στον v_2, από τον v_1 στον v_3, και από τον v_1 στον v_6. Να επαληθευτούν τα αποτελέσματα βρίσκοντας τις διαδρομές αυτές.

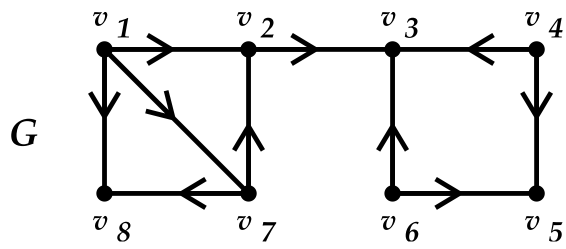
10) Να τοποθετηθούν σε στάθμες, σύμφωνα με τη μέθοδο Demoucron, οι κόμβοι του γραφήματος τόξων



Η απάντηση να δοθεί και γραφικά.

11) Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Demoucron για να τοποθετηθούν σε στάθμες οι κόμβοι A, B, C, D, E, F, G οι οποίες παριστάνουν τις τεχνολογικές διαδικασίες μιας παραγωγής, οι οποίες υπόκεινται σε σχέση τεχνολογικής προτεραιότητας ως εξής: $A > C$, $A > E$, $B > A$, $B > E$, $B > F$, $C > E$, $C > G$, $E > D$, $F > C$, $F > D$, $F > G$.

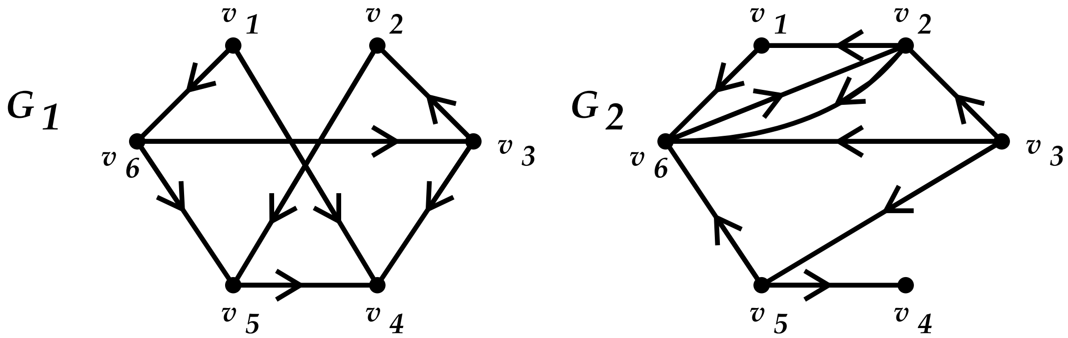
12) Δίδεται το γράφημα τόξων



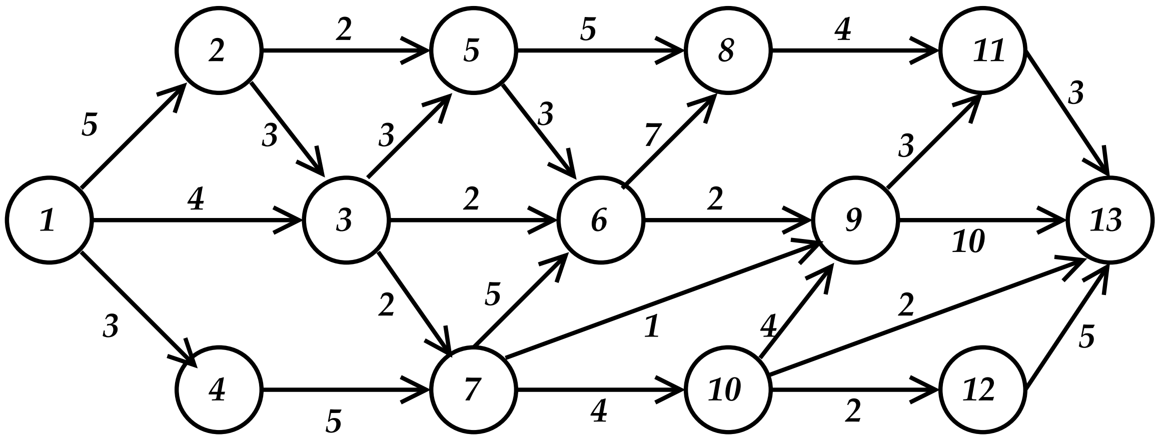
i) Να βρεθεί ένα ευσταθές και ένα απορροφητικό σύνολό του.

ii) Να βρεθεί (αν υπάρχει) ένας πυρήνας του.

13) Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο πυρήνας σε καθένα από τα γραφήματα G_1 και G_2.



14) Να βρεθεί ο ενωρίτερος χρόνος ολοκλήρωσης και ο κρίσιμος δρόμος του έργου που αρχίζει από τον κόμβο 1 και τελειώνει στον κόμβο 13, αν το έργο αυτό περιγράφεται από το παρακάτω γράφημα τόξων.



(Ο χρόνος για κάθε δραστηριότητα (i, j) σημειώνεται πάνω στο αντίστοιχο τόξο. Θεωρούμε ότι, για κάθε $j \neq 1$, η έναρξη της δραστηριότητας (j, k) λαμβάνει χώρα μόνο όταν έχουν πραγματοποιηθεί όλες οι δραστηριότητες (i, j)).