ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΜΣ "ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ -
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ"

Σημειώσεις του μαθήματος

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κ. Μανές - Ι. Τασούλας

Σημειώσεις διαλέξεων 7–8

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2023

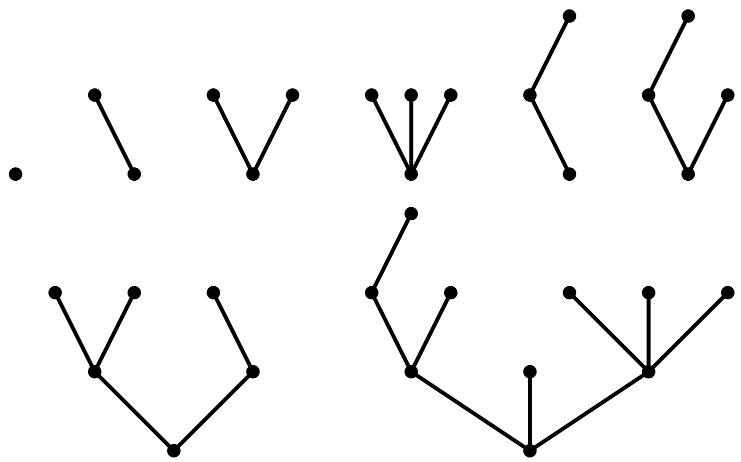
Οι παρούσες σημειώσεις βασίζονται σε προηγούμενες σημειώσεις του μαθήματος που έχουν συγγράψει ο Καθηγητής κ. Αριστείδης Σαπουνάκης και ο Καθηγητής κ. Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ: ΔΕΝΔΡΑ - ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΕΝΔΡΑ - ΔΥΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ

18. ΔΕΝΔΡΑ

Ένα συνεκτικό άκυκλο γράφημα δεσμών λέγεται **δένδρο** (tree), ή **ελεύθερο δένδρο**).

Παραδείγματα :



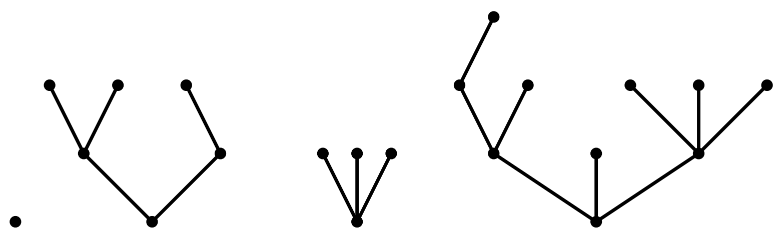
Οι κόμβοι ενός δένδρου με βαθμό 1 λέγονται **φύλλα** (leaves) του δένδρου. Κάθε μη τετριμμένο δένδρο έχει δύο τουλάχιστον φύλλα.

Δάση

Ένα άκυκλο γράφημα δεσμών λέγεται **δάσος** (forest).

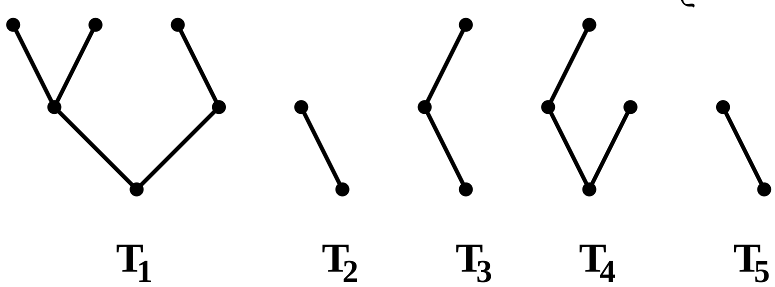
Κάθε δάσος είναι η ένωση δένδρων.

Παραδείγματα :



T_1 T_2 T_3 T_4

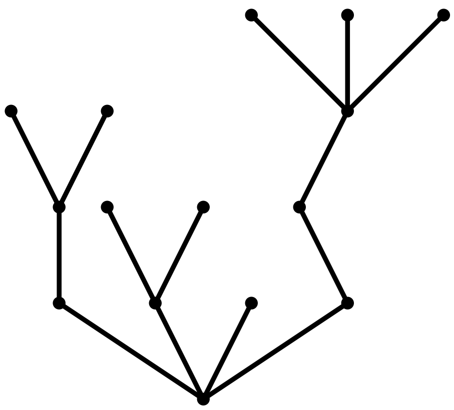
Το δάσος αυτό αποτελείται από την ένωση των δένδρων T_1, T_2, T_3, T_4.



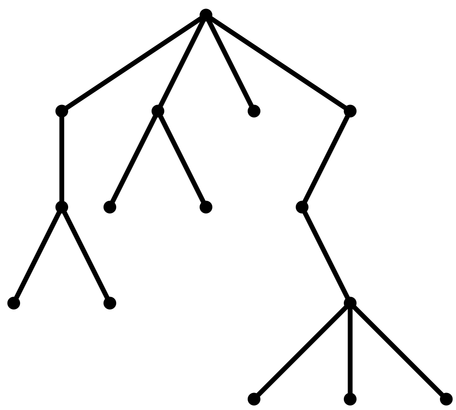
T_1 T_2 T_3 T_4 T_5

Το δάσος αυτό αποτελείται από την ένωση των δένδρων T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.

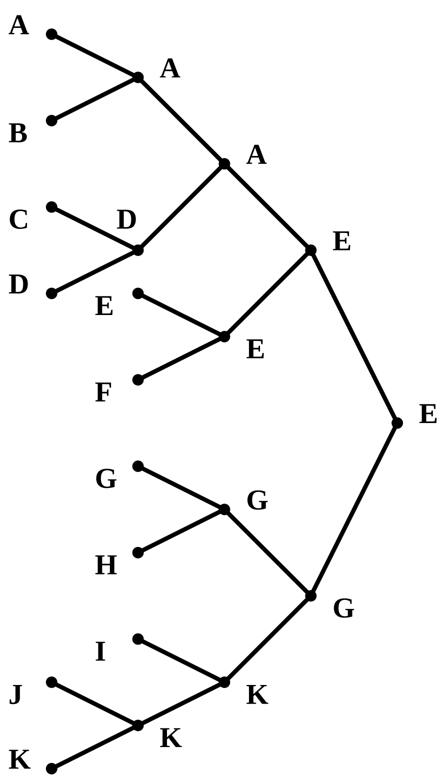
ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΕΝΔΡΩΝ



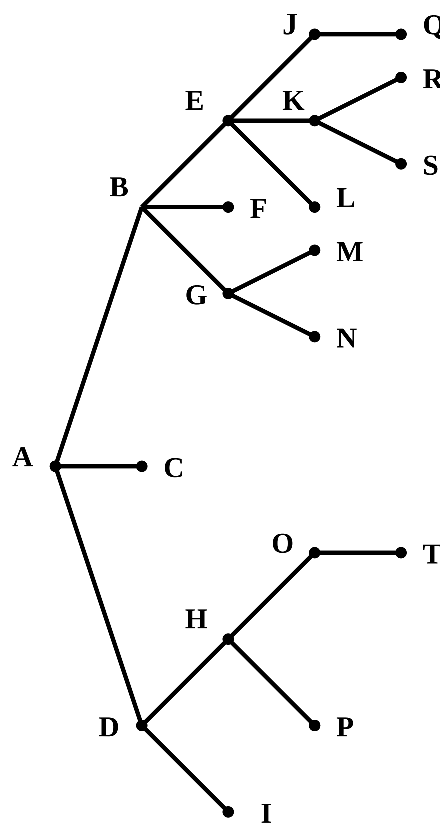
“Φυσικός” τρόπος



Στην πληροφορική



Τουρνουά



Γενεαλογικά δένδρα

ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ ΔΕΝΔΡΩΝ

Πρόταση 48. *Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) Το γράφημα G είναι δένδρο.

(ii) Κάθε δύο κόμβοι του G ενώνονται με ένα μοναδικό μονοπάτι.

(iii) Το G είναι συνεκτικό και $|V| = |E| + 1$.

(iv) Το G είναι άκυκλο και $|V| = |E| + 1$.

(v) Το G είναι άκυκλο και αν ενώσουμε δύο οποιουσδήποτε μη γειτονικούς κόμβους του δημιουργούμε γράφημα με ακριβώς ένα κύκλο.

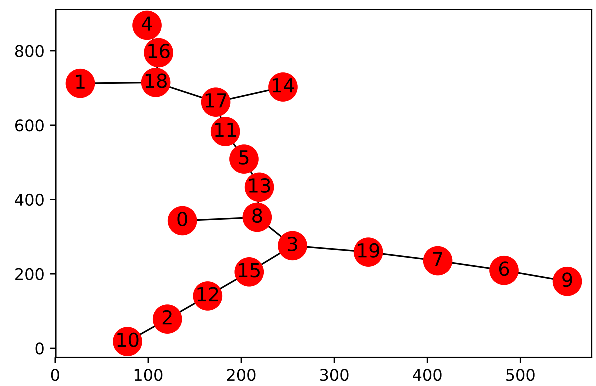
(vi) Το G είναι συνεκτικό και αν διαγράψουμε οποιονδήποτε δεσμό του δημιουργούμε μη συνεκτικό γράφημα.

Παρατήρηση: Σε κάθε δένδρο $T = (V, E)$ ισχύει ότι ο αριθμός $|V|$ των κορυφών του είναι ένα παραπάνω από τον αριθμό $|E|$ των δεσμών του. Δηλαδή, όλα τα δένδρα με $|V|$ κορυφές έχουν ακριβώς $|V| - 1$ δεσμούς.

Μάλιστα, λόγω της ιδιότητας (vi), τα δένδρα περιέχουν τον ελάχιστο αριθμό από δεσμούς που απαιτούνται για να είναι ένα γράφημα συνεκτικό. Με άλλα λόγια, ένα γράφημα με n κορυφές και λιγότερους από $n - 1$ δεσμούς είναι σίγουρα μη συνεκτικό.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την βιβλιοθήκη networkx για να κατασκευάσουμε ένα τυχαίο δένδρο με n κορυφές.

```python
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

n = 20
T = nx.random_tree(n)
pos = nx.layout.kamada_kawai_layout(T)
nx.draw_networkx(T,pos)

plt.show()
```



Λόγω της ιδιότητας (i) τα περισσότερα αλγοριθμικά προβλήματα απλοποιούνται όταν τα γραφήματα που εξετάζουμε είναι δένδρα ή δάση.

Πρόταση 49.

(i) Κάθε δάσος είναι διμερές γράφημα.

(ii) Κάθε δάσος έχει χρωματικό αριθμό 2.

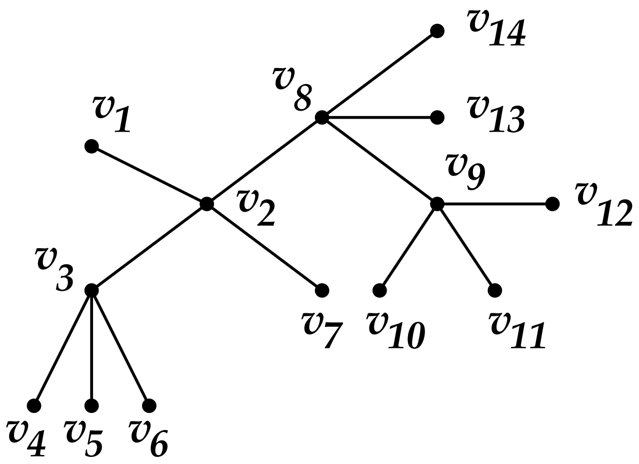
(iii) Κάθε δάσος είναι επίπεδο γράφημα.

(iv) Τα μπλοκ ενός δάσους είναι οι δεσμοί του.

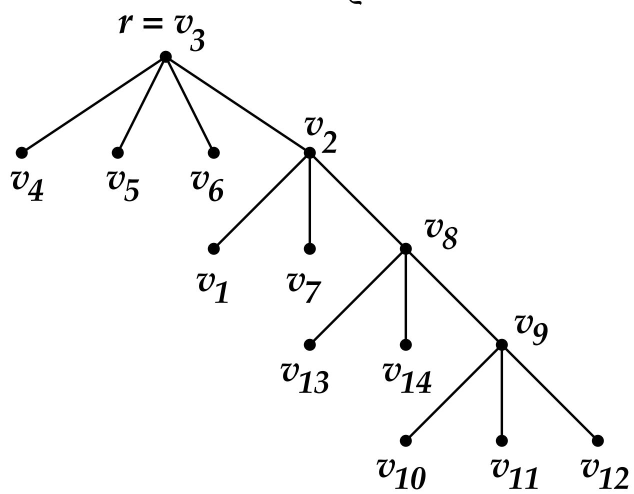
Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο T αντί του G για τα γραφήματα που είναι δένδρα.

19. ΔΕΝΔΡΑ ΜΕ ΡΙΖΑ

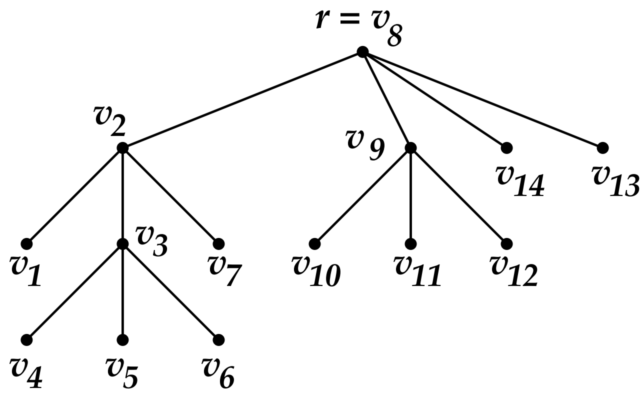
Δένδρο με ρίζα (rooted tree) είναι ένα δένδρο με έναν ειδικά επιλεγμένο κόμβο (τη **ρίζα** (root) του δένδρου).



Το δένδρο T



Το δένδρο T με ρίζα $r = v_3$

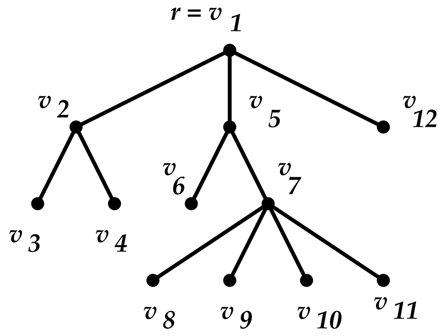


Το δένδρο T με ρίζα $r = v_8$

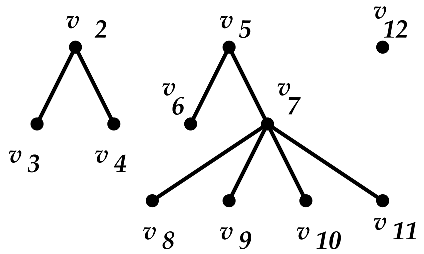
Παρατήρηση: Για να είναι δύο δένδρα με ρίζα ισόμορφα, πρέπει προφανώς να ισχύει ο ορισμός του ισομορφισμού των δένδρων, με την επιπλέον απαίτηση ότι η ρίζα του πρώτου δένδρου να απεικονίζεται στη ρίζα του δεύτερου.

Έστω r η ρίζα του δένδρου T. Τα δένδρα του δάσους $T - r$ λέγονται **υποδένδρα της ρίζας** r (subtrees). Τα δένδρα του δάσους $T - r$ θεωρούνται επίσης δένδρα με ρίζα : Ρίζα καθενός είναι το άλλο άκρο του δεσμού που περιέχει την ρίζα r του T. Η έννοια των υποδένδρων ενός οποιουδήποτε κόμβου (που δεν είναι φύλλο) ορίζεται ανάλογα.

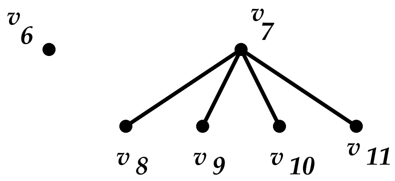
Παραδείγματα :



Υποδένδρα της ρίζας v_1 είναι τα



Υποδένδρα του κόμβου v_5 είναι τα



Ορίζουμε το **επίπεδο** (level) $l(v)$ ενός κόμβου v του T ως εξής: $l(r) = 0$ και αν στο (μοναδικό) $r - v$ μονοπάτι $(r, \ldots, u, v)$ έχουμε $l(u) = i$, τότε $l(v) = i + 1$. (Στην περίπτωση αυτή το u λέγεται **γονέας** (parent) του v και το v λέγεται **παιδί** (child) του u. Παιδιά του ίδιου γονέα λέγονται **αδέλφια** (siblings). Με άλλα λόγια το επίπεδο ενός κόμβου είναι η απόσταση του από την ρίζα του δένδρου.

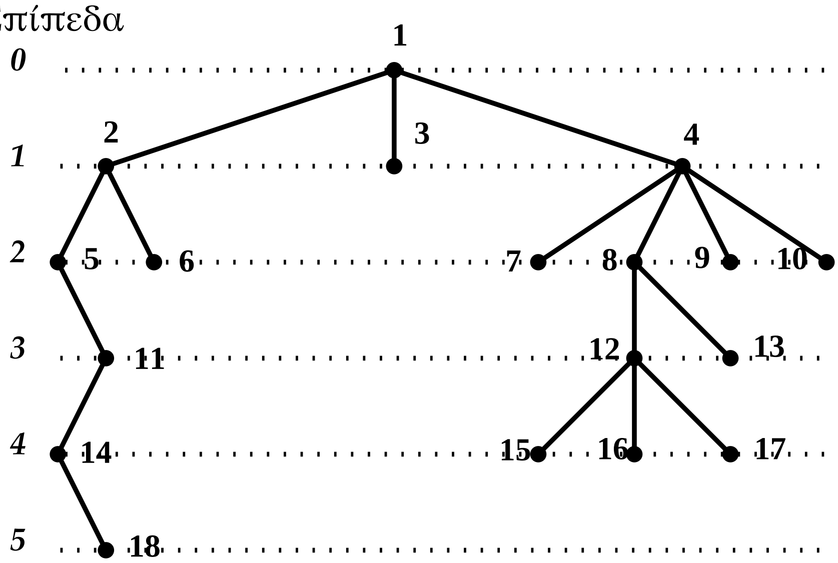
Το πλήθος των παιδιών ενός κόμβου σε ένα δένδρο με ρίζα ονομάζεται **βαθμός** του κόμβου, (οπότε, προφανώς, ο βαθμός κάθε κόμβου, εκτός από τη ρίζα, είναι κατά ένα μικρότερος από το βαθμό του κόμβου, όπως αυτός ορίσθηκε νωρίτερα για ένα τυχαίο γράφημα).

Αν υπάρχει στο T διαδρομή από ένα κόμβο v_1 σε ένα κόμβο v_k, η οποία χρησιμοποιεί κόμβους με επίπεδα που συνεχώς αυξάνουν τότε λέμε ότι το v_1 είναι **πρόγονος** (ancestor) του v_k και το v_k είναι **απόγονος** (descentant) του v_1.

Ένας κόμβος χωρίς παιδιά (δηλαδή βαθμού 0) λέγεται **φύλλο** (leaf) (ή **τερματικός κόμβος** (terminal node)). Αλλιώς λέγεται **ενδιάμεσος** κόμβος (internal node).

Ύψος (height) (ή **βάθος** (depth)) $h(T)$ ενός δένδρου T λέγεται το μεγαλύτερο από τα επίπεδα των κόμβων του.

Παράδειγμα: Επίπεδα

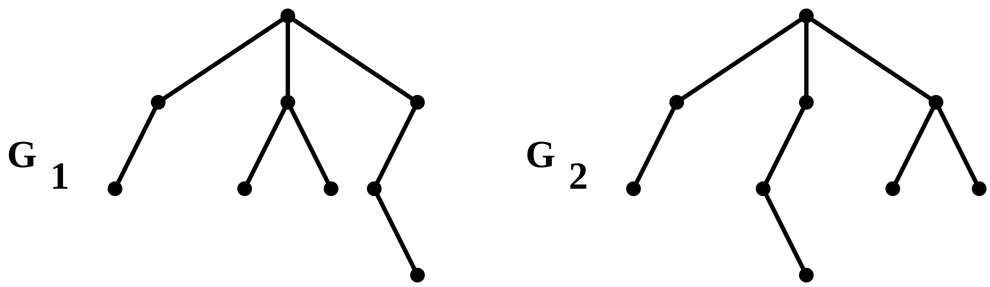


1 : ρίζα	2 : γονέας των 5, 6
5, 6 : παιδιά του 2	4 : γονέας του 7
7, 8, 9, 10 : παιδιά του 4	15, 16, 17 : αδέλφια
2 : πρόγονος των 5,6, 11,14,18	15 : απόγονος των 1, 4, 8, 12
3, 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 17, 18 : φύλλα	Βαθμός του 12 = 3
11 : ενδιάμεσος κόμβος	$h(T) = 5$.

19.1. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΔΕΝΔΡΑ.

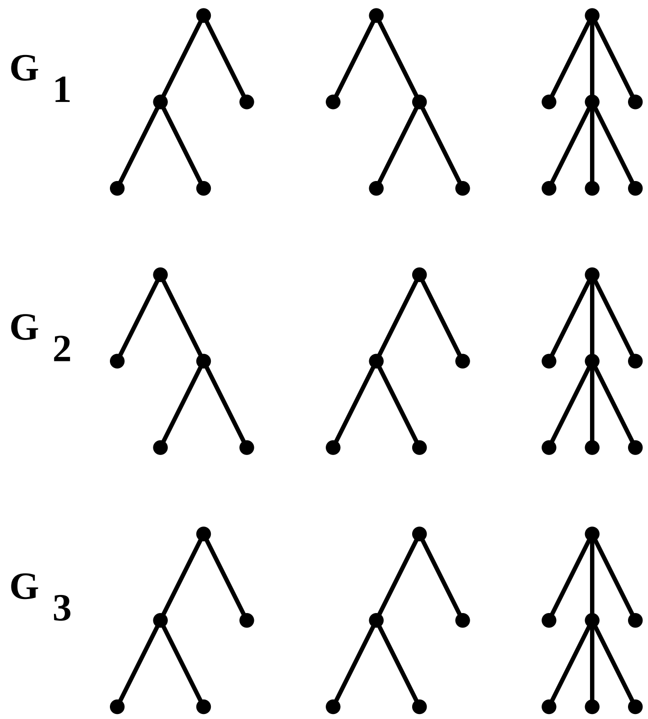
Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **διατεταγμένο** (ordered tree) αν η αλλαγή της σχετικής θέσης των υποδένδρων της ρίζας του θεωρείται ότι δημιουργεί μη ισόμορφο δένδρο.

Παράδειγμα:



Αν τα G_1, G_2 δεν θεωρηθούν διατεταγμένα τότε $G_1 \simeq G_2$, αλλά τα διατεταγμένα δένδρα G_1, G_2 δεν είναι ισόμορφα. (Σ′ ένα διατεταγμένο δένδρο, τα υποδένδρα της ρίζας χαρακτηρίζονται σαν πρώτο, δεύτερο κ.λπ. από αριστερά πρός τα δεξιά).

Διατεταγμένο δάσος διατεταγμένων δένδρων είναι ένα διατεταγμένο σύνολο από ξένα, διατεταγμένα δέντρα.



Τα τρία δάση G_1, G_2, G_3 είναι ισόμορφα. Δεν είναι όμως ισόμορφα, αν θεωρηθούν ως διατεταγμένα δάση.

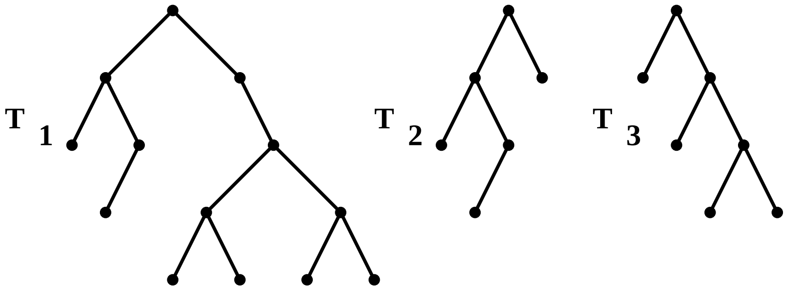
Ένα διατεταγμένο δένδρο, στο οποίο κάθε κόμβος επιτρέπεται να έχει το πολύ k παιδιά, λέγεται k-**δένδρο**.

Παράδειγμα:

Το πρώτο και το δεύτερο διατεταγμένο δένδρο του διατεταγμένου δάσους G_1 του τελευταίου παραδείγματος, είναι 2-δένδρα, ενώ το τρίτο είναι 3-δένδρο.

19.2. ΔΥΑΔΙΚΑ ΔΕΝΔΡΑ.

Ένα δένδρο με ρίζα λέγεται **δυαδικό δένδρο** (binary tree) αν κάθε κόμβος του που δεν είναι φύλλο έχει είτε ένα αριστερό, είτε ένα δεξιό παιδί, είτε δύο παιδιά (ένα αριστερό και ένα δεξιό).

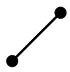


Τρία δυαδικά δένδρα T_1, T_2 και T_3.

Παρατήρηση:

(1) Σε αντίθεση με τον γενικό ορισμό των γραφημάτων, στα δυαδικά δένδρα συμπεριλαμβάνεται και το κενό δυαδικό δένδρο, δηλαδή το δένδρο T με $X(T) = \emptyset$.

(2) Τα δυαδικά δένδρα είναι διαφορετικά από τα διατεταγμένα 2-δένδρα. Για παράδειγμα, υπάρχει μόνο ένα διατεταγμένο 2-δένδρο με 2 κόμβους:

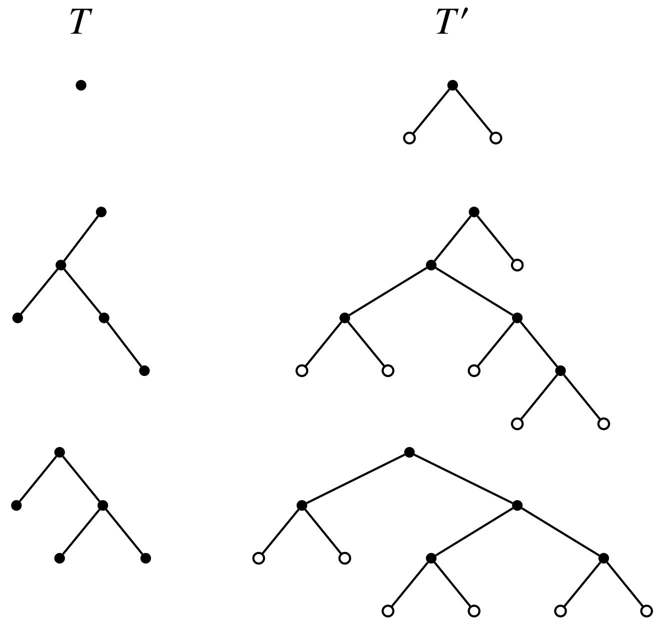


ενώ υπάρχουν δύο δυαδικά δένδρα με δύο κόμβους:

(3) Ισοδύναμος ορισμός του δυαδικού δένδρου μπορεί να δοθεί αναδρομικά:
- Το κενό δένδρο είναι δυαδικό.
- Κάθε μη κενό δυαδικό δένδρο T αποτελείται από ένα κόμβο r που έχει ως παιδιά δύο δυαδικά δένδρα T_1 (το αριστερό), T_2 (το δεξιό) τα οποία μπορεί να είναι κενά.

Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Η ισοδυναμία είναι η εξής: Κάθε δυαδικό δένδρο T (πρώτος ορισμός) μπορεί να επεκταθεί κατά μοναδικό τρόπο σε ένα δυαδικό δένδρο T' (δεύτερος ορισμός), όπου κάθε κόμβος του έχει 0 ή 2 παιδιά, προσθέτοντας ένα αριστερό (αντ. δεξιό) (**κενό**) παιδί σε κάθε κόμβο με δεξιό (αντ. αριστερό) παιδί, και δύο (**κενά**) παιδιά σε κάθε φύλλο του T. Τα φύλλα του T' είναι όλα κενά δυαδικά δένδρα. Προφανώς, το δυαδικό δένδρο T μπορεί να προκύψει ξανά από το T' σβήνοντας όλα τα φύλλα του T'.

Παραδείγματα:



(4) Προφανώς, αντίστοιχα με το διατεταγμένο δάσος διατεταγμένων δένδρων ορίζεται και το **διατεταγμένο δάσος δυαδικών δένδρων**.

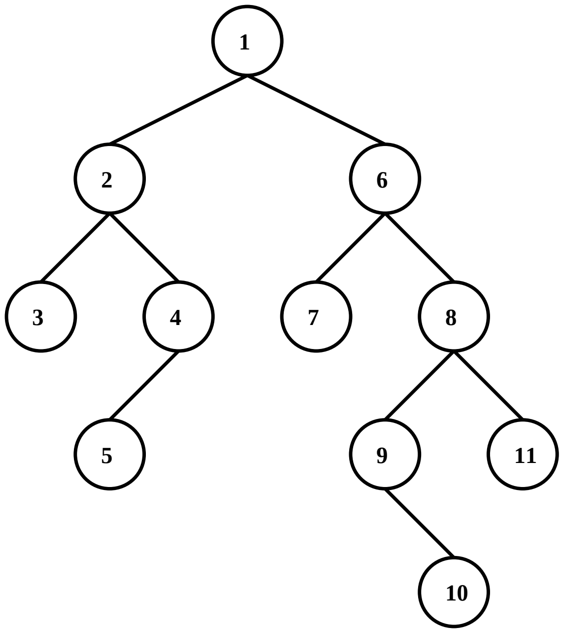
20. ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΔΕΝΔΡΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

20.1. ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΔΥΑΔΙΚΩΝ ΔΕΝΔΡΩΝ.

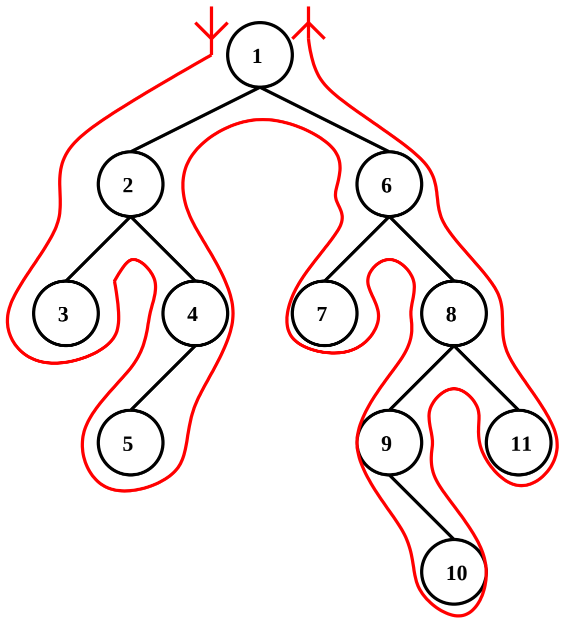
Υπάρχουν 4 βασικοί τρόποι να διασχίσουμε (αριθμήσουμε) τους κόμβους ενός δυαδικού δένδρου. Καθένας απο τους τρόπους αυτούς καθορίζει μια ολική διάταξη των κόμβων του δένδρου.

1) **Προδιάταξη** : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πρίν διασχίσουμε σε προδιάταξη το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο του. Δηλαδή, επισκεπτόμαστε πρώτα τον γονέα και μετά τα δένδρα – παιδιά του (πρώτα το αριστερό και μετά το δεξιό).

Παράδειγμα:

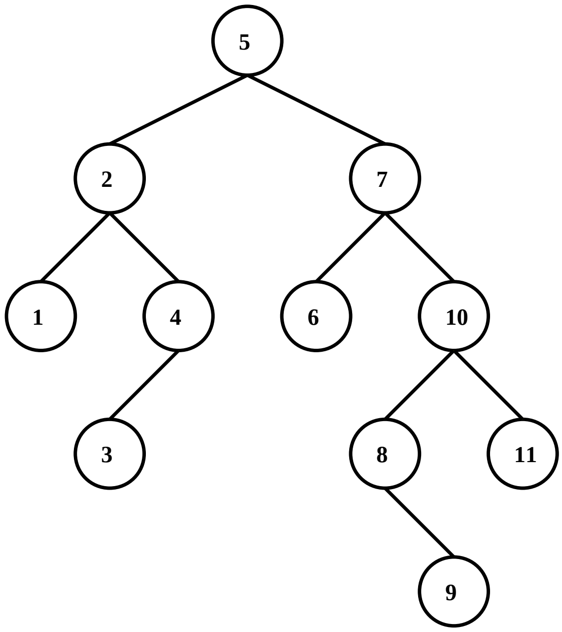


Πρακτικός τρόπος : Αριθμούμε κάθε κορυφή μόλις την πρωτοσυναντήσουμε καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :

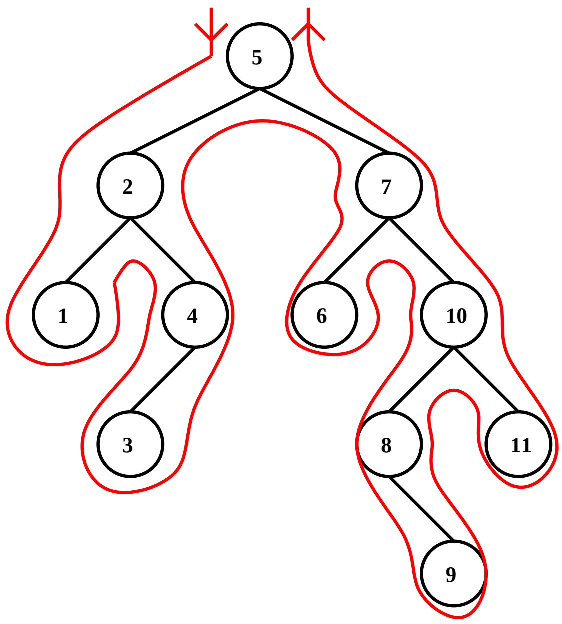


2) Ενδοδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε σε ενδοδιάταξη το αριστερό υπόδενδρο του και πρίν την διασχίσουμε σε ενδοδιάταξη το δεξιό υποδένδρο του. Δηλαδή, επισκεπτόμαστε πρώτα το αριστερό δένδρο – παιδί, μετά τον γονέα και μετά το δεξιό δένδρο – παιδί.

Παράδειγμα:

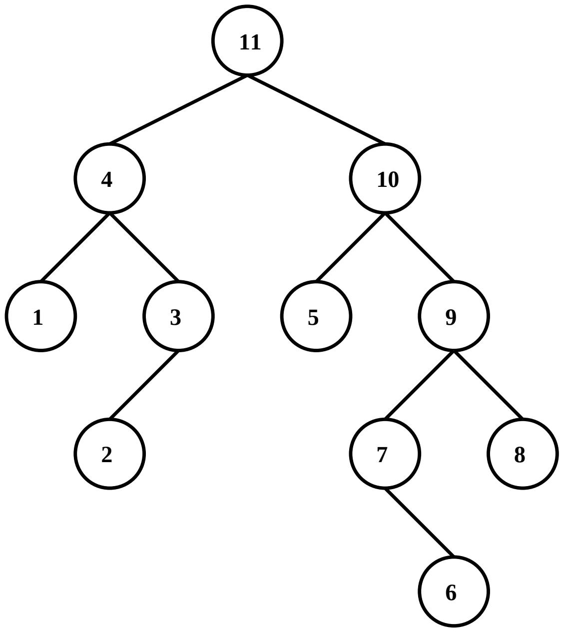


Πρακτικός τρόπος : Αριθμούμε κάθε κορυφή τη πρώτη φορά που τη συναντάμε αν δεν έχει αριστερό παιδί, ενώ την αριθμούμε τη δεύτερη φορά αν έχει αριστερό παιδί, καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :

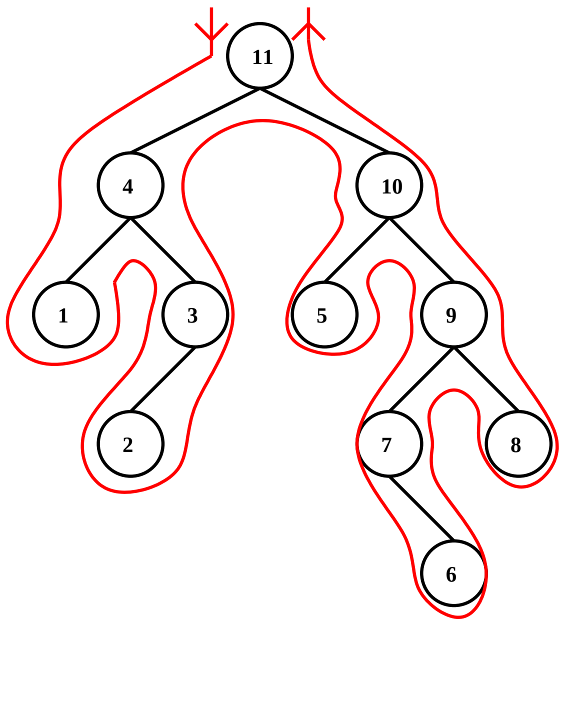


3) Μεταδιάταξη : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού έχουμε διασχίσει σε μεταδιάταξη και το αριστερό και το δεξιό υποδένδρο του. Δηλαδή, επισκεπτόμαστε πρώτα τα δένδρα – παιδιά (πρώτα το αριστερό και μετά το δεξιό) και μετά τον γονέα.

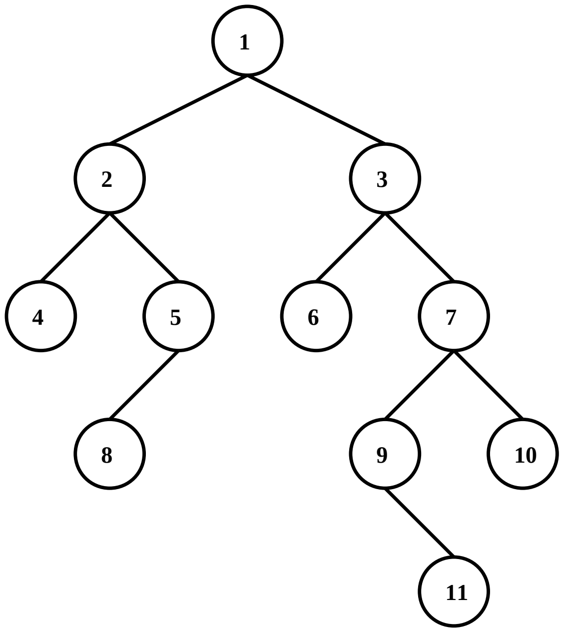
Παράδειγμα:



Πρακτικός τρόπος : Αριθμούμε κάθε κόμβο την τελευταία φορά που τον συναντάμε (δηλαδή καθως τον εγκαταλείπουμε για να πάμε προς τον γονέα του) καθώς κινούμαστε όπως δείχνει το σχήμα :

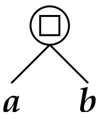


4) Διάσχιση κατά σειρά επιπέδων : Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τους κόμβους κατά επίπεδο (από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τους κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά.
Παράδειγμα:

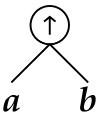


20.2. ΔΕΝΔΡΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

Μια αλγεβρική παράσταση, στην οποία εμφανίζονται οι (δυαδικές) πράξεις $+$, $-$, $*$ (ή $\cdot$), $\div$ (ή $:$, ή $/$) καθώς και δυνάμεις, μπορεί να παρασταθεί σαν ένα δυαδικό δένδρο με ρίζα, αν γράψουμε



αντί για $a \square b$ (όπου $\square$ είναι οποιαδήποτε από τις τέσσερις πράξεις) και



αντί για a^b.

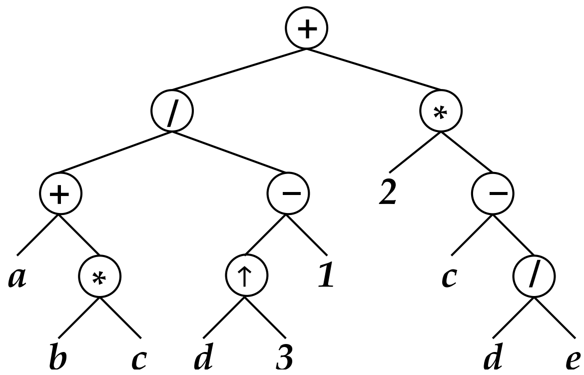
Γράφοντας τα σύμβολα με τη σειρά που εμφανίζονται στη διάσχιση του δένδρου σε προδιάταξη, σχηματίζουμε τη λεγόμενη **πολωνική** (ή **προθεματική**) **γραφή** της παράστασης.

Παραδείγματα:

1. Στην αλγεβρική παράσταση

$$\frac{a+bc}{d^3-1} + 2(c - \frac{d}{e})$$

αντιστοιχεί το δυαδικό δένδρο



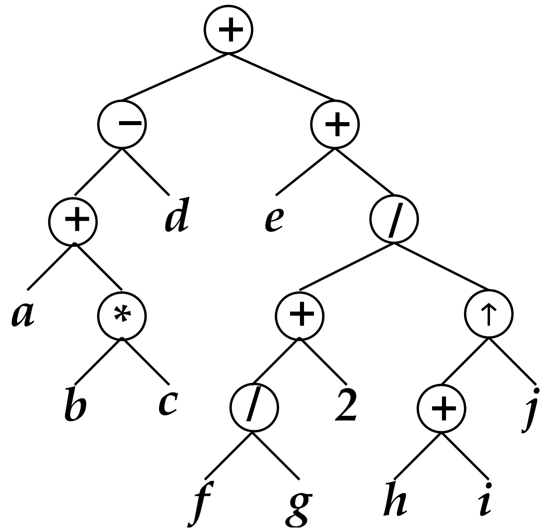
Άρα η πολωνική γραφή δίνει:

$$+/+a*bc-\uparrow d3\ 1*2-c/de.$$

2. Στην αλγεβρική παράσταση

$$((a + bc) - d) + \left(e + \frac{\frac{f}{g} + 2}{(h+i)^j}\right)$$

αντιστοιχεί το δυαδικό δένδρο



Άρα η πολωνική γραφή δίνει:

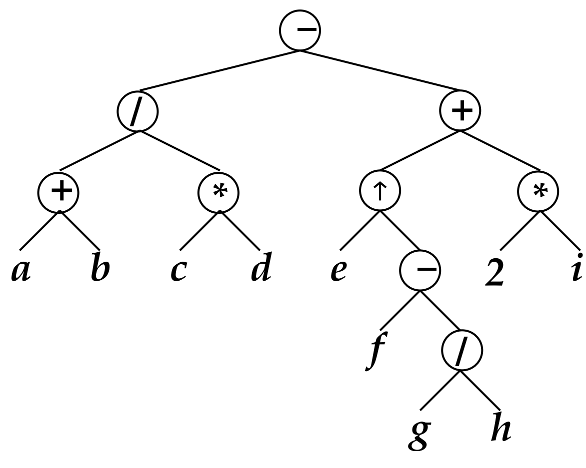
$$+ - +a * bcd + e/ + /fg2 \uparrow +hij.$$

Παρατήρηση: Προφανώς η αντιστοιχία ανάμεσα στους αλγεβρικούς τύπους και την πολωνική γραφή τους είναι αμφιμονοσήμαντη.

Παράδειγμα: Στην πολωνική γραφή

$$-/ + ab * cd + \uparrow e - f/gh * 2i,$$

αντιστοιχεί το δυαδικό δένδρο



και κατ΄ επέκταση η αλγεβρική παράσταση

$$\frac{a+b}{cd} - (e^{f - \frac{g}{h}} + 2i).$$

20.3. ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ.

Ένα μέτρο της πολυπλοκότητας (υπολογισμού) μιας αλγεβρικής παράστασης είναι ο λεγόμενος **αριθμός Strahler** ή register number που ορίζεται στο δυαδικό (ή k-αδικό) δένδρο που αναπαριστά την αλγεβρική παράσταση.

Συγκεκριμένα, σε κάθε κορυφή v ενός δυαδικού (ή k-αδικού) δένδρου T αντιστοιχεί ένας μοναδικός φυσικός αριθμός $s(v)$ που ονομάζεται αριθμός Strahler της κορυφής και ορίζεται ως εξής:

- Αν η κορυφή v είναι φύλλο τότε $s(v) = 1$.
- Αν η κορυφή v έχει ακριβώς ένα παιδί με αριθμό Strahler j και όλα τα άλλα παιδιά της έχουν μικρότερο αριθμό Strahler τότε $s(v) = j$.
- Αν η κορυφή v έχει δύο ή περισσότερα παιδιά με αριθμό Strahler j και όλα τα άλλα παιδιά της έχουν μικρότερο αριθμό Strahler τότε $s(v) = j + 1$.

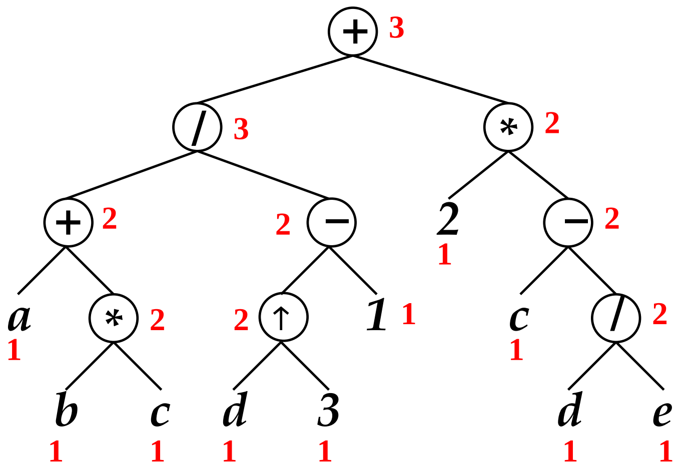
Ο αριθμός Strahler $s(T)$ του δένδρου T ορίζεται ως αριθμός Strahler της ρίζας του δένδρου. Αλγοριθμικά οι αριθμοί Strahler υπολογίζονται διασχίζοντας το δένδρο σε μεταδιάταξη.

Παραδείγματα:

Στο δυαδικό δένδρο που αντιστοιχεί στην αλγεβρική παράσταση

$$\frac{a + bc}{d^3 - 1} + 2(c - \frac{d}{e})$$

οι αριθμοί Strahler (σημειώνονται με κόκκινο) των κορυφών του είναι:

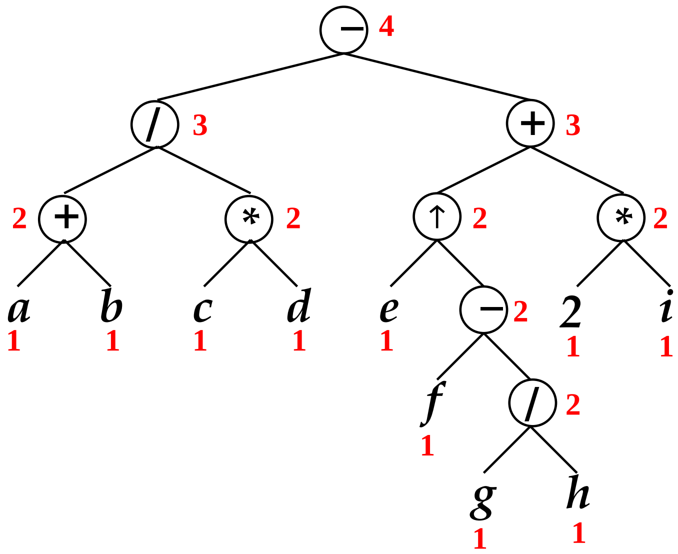


οπότε ο αριθμός Strahler της αλγεβρικής παράστασης είναι 3.

Στο δυαδικό δένδρο που αντιστοιχει στην αλγεβρική παράσταση

$$\frac{a + b}{cd} - (e^{f - \frac{g}{h}} + 2i).$$

οι αριθμοί Strahler (σημειώνονται με κόκκινο) των κορυφών του είναι:



οπότε ο αριθμός Strahler της αλγεβρικής παράστασης είναι 4.

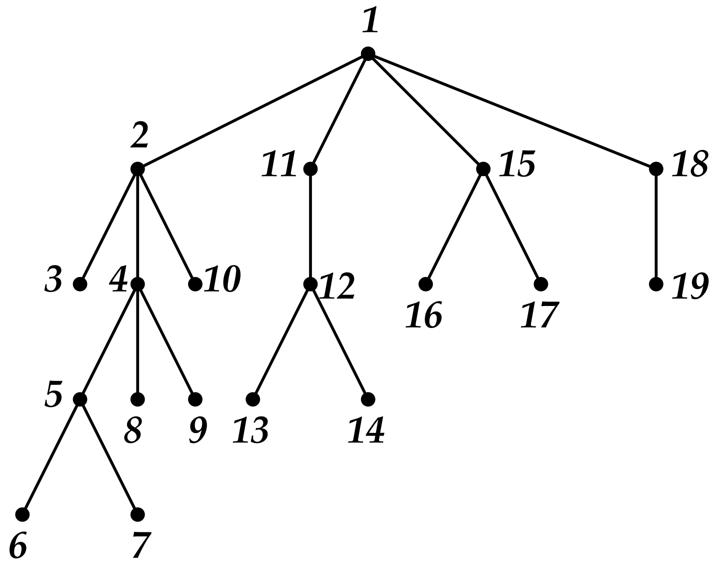
Ο αριθμός Strahler μιας αλγεβρικής παράστασης ισούται με τον ελάχιστο αριθμό καταχωρητών που απαιτούνται για τον υπολογισμό της αλγεβρικής παράστασης σε μια γλώσσα μηχανής. Η ιδέα είναι ότι σε κάθε κορυφή υπολογίζουμε πρώτα την (υπο) παράσταση του δένδρου-παιδιού της που έχει τον μεγαλύτερο αριθμό Strahler, μετά τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά της σε σειρά φθίνουσα σειρά ως προς τον αριθμο Strahler τους και έπειτα την πράξη που αντιστοιχεί στην κορυφή. (Βλέπε και τον αλγόριθμο των Sethi και Ullman).

20.4. ΔΙΑΣΧΙΣΗ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΔΕΝΔΡΩΝ.

1) Προδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξή τους) τα δένδρα-παιδιά του σε προδιάταξη. Δηλαδή πρώτα τον γονέα και έπειτα τα δένδρα παιδιά του (από το πρώτο προς το τελευταίο).

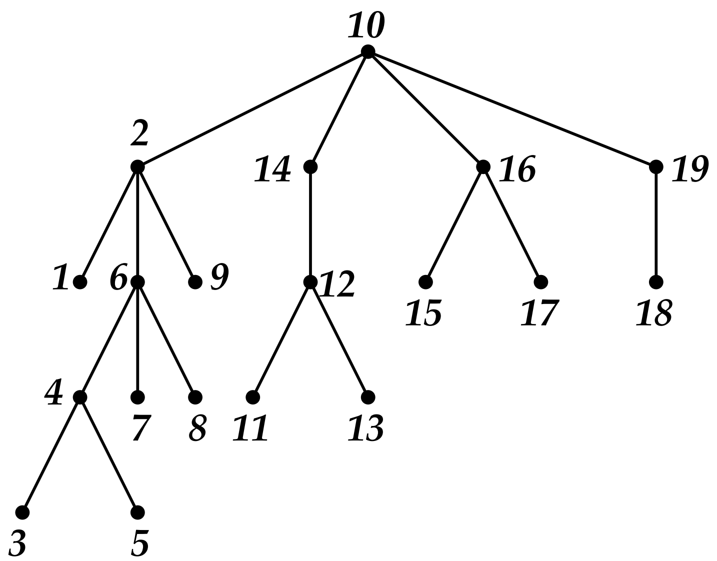
Παράδειγμα:



2) Ενδοδιάταξη

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε σε ενδοδιάταξη το πρώτο δένδρο-παιδί και πριν διασχίσουμε (σύμφωνα με την διάταξή τους) τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του σε ενδοδιάταξη. Δηλαδή πρώτα το πρώτο δένδρο-παιδί, μετά τον γονέα κι έπειτα τα υπόλοιπα δένδρα-παιδιά του (από το δεύτερο προς το τελευταίο).

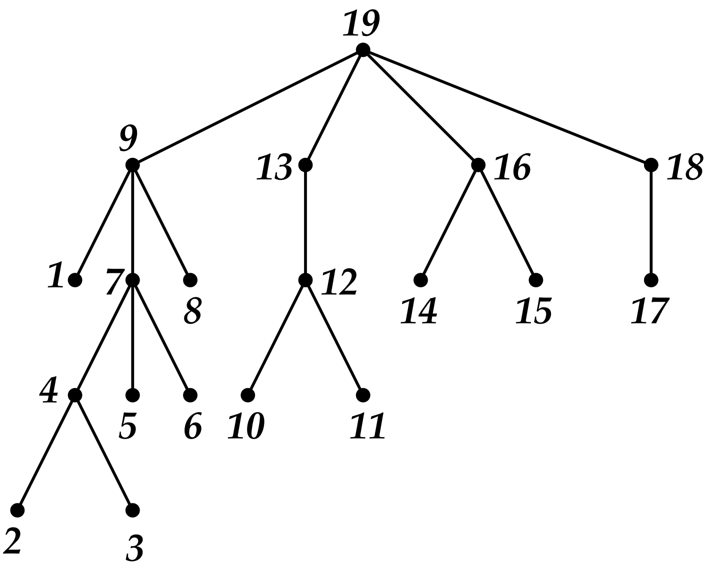
Παράδειγμα:



3) Μεταδιάταξη

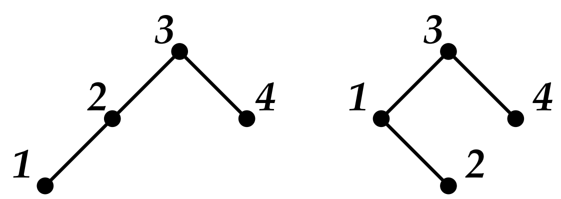
Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) κάθε κόμβο αφού διασχίσουμε (σύμφωνα με τη διάταξή τους) τα δένδρα-παιδιά του σε μεταδιάταξη. Δηλαδή πρώτα τα δένδρα-παιδιά (από το πρώτο προς το τελευταίο) και έπειτα τον γονέα.

Παράδειγμα:

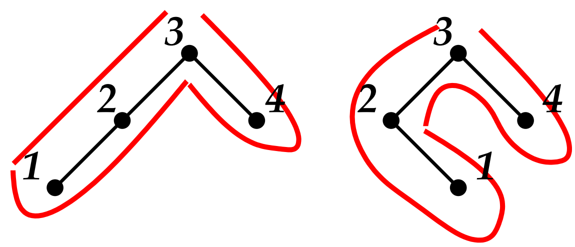


Παρατήρηση: Μπορούμε να αριθμήσουμε τα διατεταγμένα δένδρα σε προδιάταξη και μεταδιάταξη με πρακτικό τρόπο, αντίστοιχα με τα δυαδικά δένδρα. Ο πρακτικός τρόπος για την ενδοδιάταξη των διατεταγμένων δένδρων όμως είναι διαφορετικός: Αριθμούμε τον κάθε κόμβο τη δεύτερη φορά που τον συναντάμε, εκτός αν είναι φύλλο, οπότε τον αριθμούμε την πρώτη φορά. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο ότι στα δυαδικά δένδρα, στην περίπτωση γονέα με μοναδικό παιδί η σειρά αρίθμησης τους δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη. Αν το παιδί είναι αριστερό παιδί τότε προηγείται του γονέα ενώ αν είναι δεξιό τότε έπεται του γονέα.

Έτσι για παράδειγμα, ενώ η ενδοδιάταξη στα δύο παρακάτω δυαδικά δένδρα δίνει



ο παραπάνω πρακτικός τρόπος θα έδινε αντίστοιχα

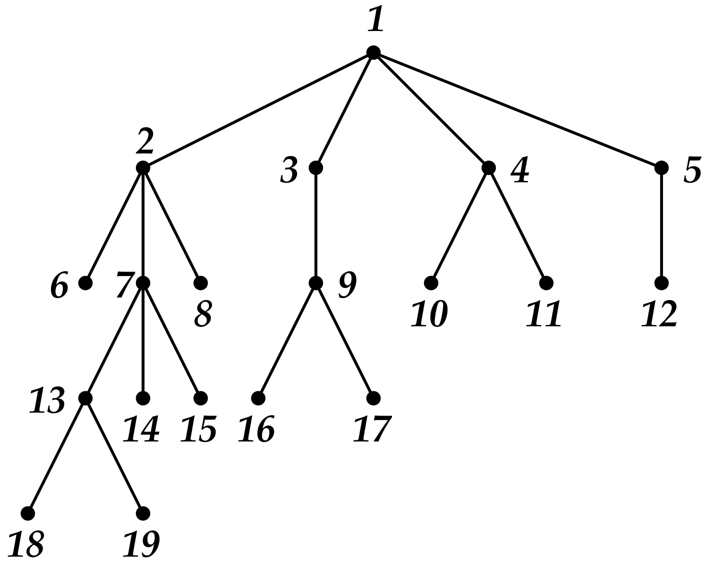


με το δεύτερο δένδρο να δίνει διαφορετική ενδοδιάταξη από ό,τι ο ορισμός.

4. Διάταξη κατά επίπεδα

Επισκεπτόμαστε (αριθμούμε) τους κόμβους κατά επίπεδο (από το μικρότερο επίπεδο στο μεγαλύτερο), όπου σε κάθε επίπεδο επισκεπτόμαστε τους κόμβους από τα αριστερά προς τα δεξιά.

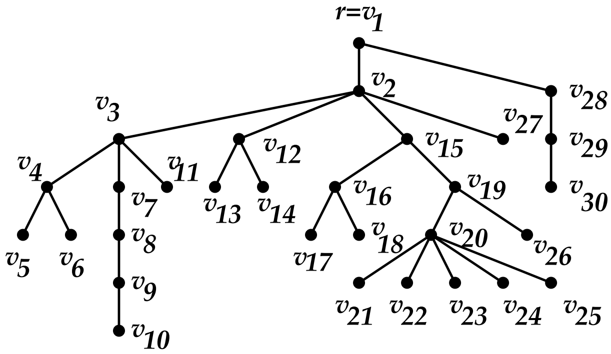
Παράδειγμα:



Παρατήρηση: Οι διασχίσεις των δένδρων (δυαδικών, ή διατεταγμένων) σύμφωνα με οποιαδήποτε από τις παραπάνω διατάξεις γενικεύονται προφανώς στα διατεταγμένα δάση, διασχίζοντας σύμφωνα με τη συγκριμένη κάθε φορά διάταξη το πρώτο δένδρο του διατεταγμένου δάσους, ακολούθως το δεύτερο δένδρο, κ.ο.κ.

Ασκήσεις προς επίλυση

(1) Δίδεται το δένδρο με ρίζα:

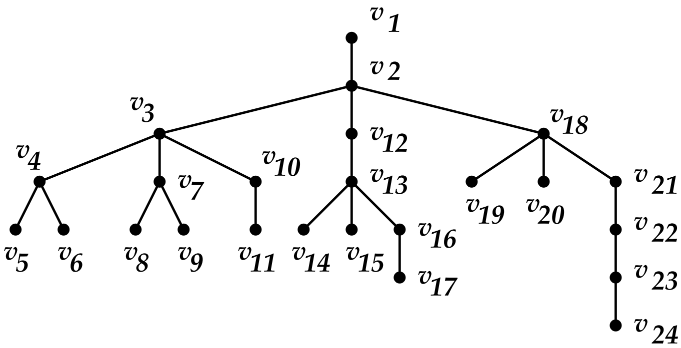


Να βρεθούν:

i) Τα υποδένδρα της ρίζας του.
ii) Τα υποδένδρα των κόμβων v_2 και v_3.
iii) Τα επίπεδα των κόμβων v_2, v_{14}, v_{21} και v_{30}.
iv) Οι γονείς, τα παιδιά και τα αδέλφια των v_3 και v_{16}.
v) Όλοι οι πρόγονοι και όλοι οι απόγονοι του v_{19}.
vi) Τα φύλλα του T.
vii) Το ύψος του T.

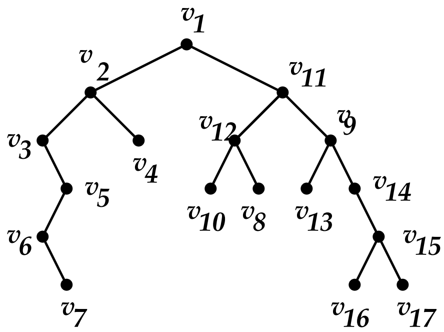
(2) Να γίνει διάσχιση του διατεταγμένου δένδρου T_2 και με τους 4 τρόπους.

T_2

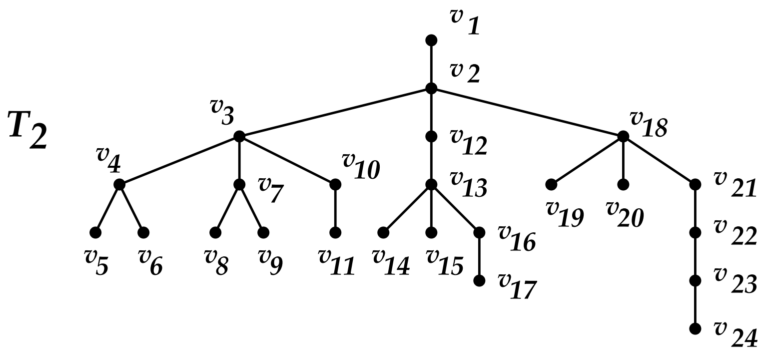


(3) Να γίνει διάσχιση του δυαδικού δένδρου T_1 και του διατεταγμένου δένδρου T_2 και με τους 4 τρόπους.

T_1



Προδιάταξη: $v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_4, v_{11}, v_{12}, v_{10}, v_8, v_9, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}$
Ενδοδιάταξη: $v_3, v_6, v_7, v_5, v_2, v_4, v_1, v_{10}, v_{12}, v_8, v_{11}, v_{13}, v_9, v_{14}, v_{16}, v_{15}, v_{17}$
Μεταδιάταξη: $v_7, v_6, v_5, v_3, v_4, v_2, v_{10}, v_8, v_{12}, v_{13}, v_{16}, v_{17}, v_{15}, v_{14}, v_9, v_{11}, v_1$
Διάταξη κατά επίπεδα: $v_1, v_2, v_{11}, v_3, v_4, v_{12}, v_9, v_5, v_{10}, v_8, v_{13}, v_{14}, v_6, v_{15}, v_7, v_{16}, v_{17}$



Προδιάταξη:

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}$

Ενδοδιάταξη:

$v_5, v_4, v_6, v_3, v_8, v_7, v_9, v_{11}, v_{10}, v_2, v_{14}, v_{13}, v_{15}, v_{17}, v_{16}, v_{12}, v_{19}, v_{18}, v_{20}, v_{24}, v_{23}, v_{22}, v_{21}, v_1$

Μεταδιάταξη:

$v_5, v_6, v_4, v_8, v_9, v_7, v_{11}, v_{10}, v_3, v_{14}, v_{15}, v_{17}, v_{16}, v_{13}, v_{12}, v_{19}, v_{20}, v_{24}, v_{23}, v_{22}, v_{21}, v_{18}, v_2, v_1$

Διάταξη κατά επίπεδα:

$v_1, v_2, v_3, v_{12}, v_{18}, v_4, v_7, v_{10}, v_{13}, v_{19}, v_{20}, v_{21}, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{22}, v_{17}, v_{23}, v_{24}$

(4) Να δοθούν σε πολωνική γραφή οι παραστάσεις:

$$A = \frac{(\alpha+\beta)^2 - \gamma\delta}{\epsilon + \zeta\eta} - 3\left(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma^3\right)$$

και

$$B = \frac{x - (y + \alpha\beta)}{(x+y)^2} - 2^x \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$$

(5) Να βρεθεί η αλγεβρική παράσταση που αντιστοιχεί στην πολωνική γραφή:

$$+/ - *\alpha\beta\gamma - \delta * \epsilon\zeta * \uparrow +\eta\theta + \mu k \uparrow -\lambda 2\nu$$

(6) Να υπολογισθεί ο αριθμός Strahler της αλγεβρικής παράστασης

$$((a + bc) - d) + \left(e + \frac{\frac{f}{g} + 2}{(h+i)^j}\right)$$

21. ΚΕΝΤΡΟ - ΚΕΝΤΡΟΕΙΔΕΣ ΔΕΝΔΡΟΥ

ΚΕΝΤΡΟ ΔΕΝΔΡΟΥ

Υπενθυμίζουμε ότι:

Η εκκεντρότητα ενός κόμβου v του συνεκτικού γραφήματος G ορίζεται από τη σχέση

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v).$$

Ένας κόμβος v ονομάζεται **κεντρικός** αν παρουσιάζει ελάχιστη εκκεντρότητα, δηλαδή αν

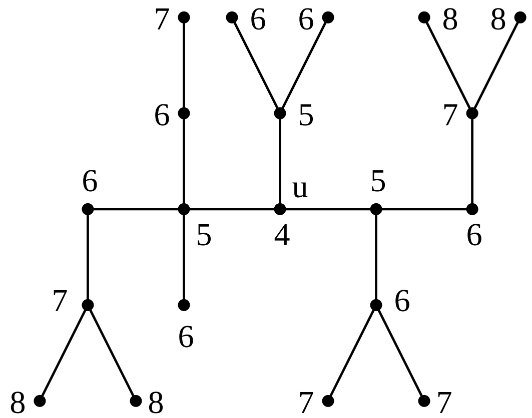
$$e(v) = \min_{u \in V(G)} e(u).$$

Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι του ενός κεντρικοί κόμβοι. Το σύνολο όλων των κεντρικών κόμβων ονομάζεται **κέντρο** του γραφήματος.

Ερώτηση Από πόσους κόμβους του δένδρου αποτελείται το κέντρο του;

Παραδείγματα

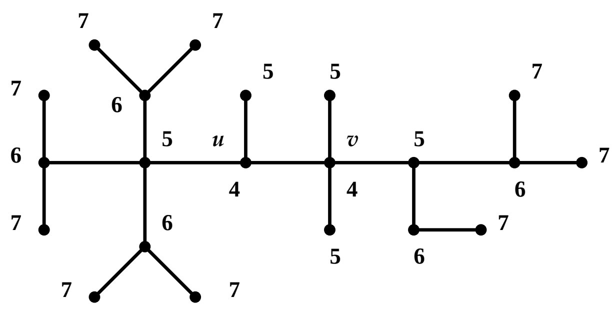
T_1:



Οι εκκεντρότητες των κορυφών του T_1

$\{u\}$: κέντρο (το κέντρο αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο).

T_2:



Οι εκκεντρότητες των κορυφών του T_2

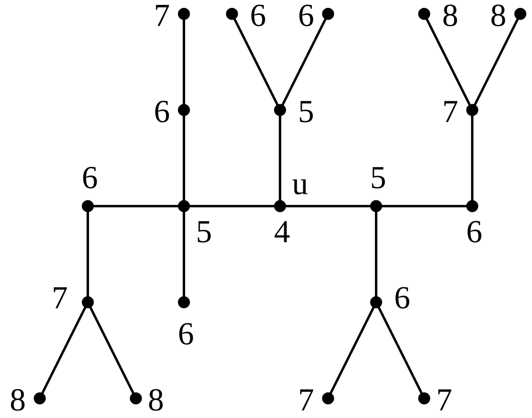
$\{u, v\}$: κέντρο (το κέντρο αποτελείται από δύο στοιχεία).

Πρόταση 50. *Το κέντρο ενός δένδρου T αποτελείται από έναν ή δύο (συνδεδεμένους μεταξύ τους) κόμβους.*

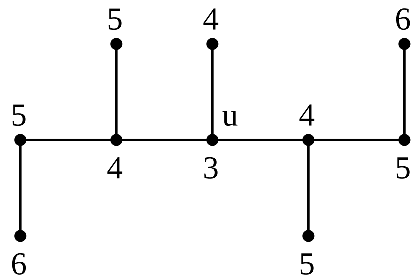
Η απόδειξη βασίζεται στην εξής παρατήρηση: Αν διαγράψουμε τα φύλλα ενός δένδρου T προκύπτει άλλο ένα δένδρο T' του οποίου οι κόμβοι έχουν εκκεντρότητα μειωμένη κατά 1 από αυτή που έχουν στο T και επομένως τα κέντρα των T, T' συμπίπτουν.

Παραδείγματα

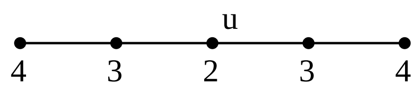
T_1:



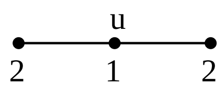
T_1':



T_1'':



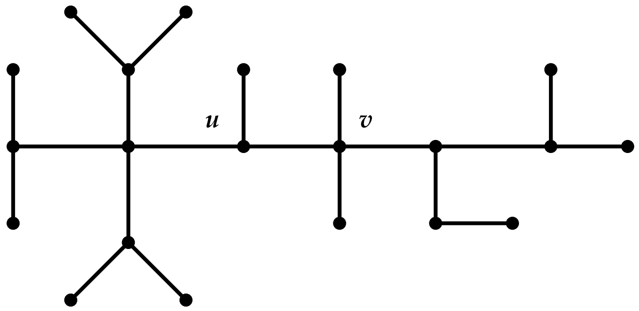
T_1''':



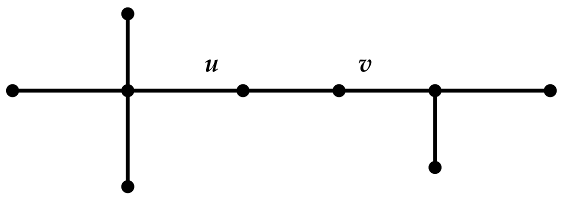
T_1'''':

$\{u\}$: Κέντρο

T_2



T_2'



T_2''

T_2'''

$\{u, v\}$: Κέντρο

Απόδειξη της Πρότασης 50:

(Προφανής αν το T είναι το K_1 ή το K_2). Το δένδρο T' που προκύπτει από τη διαγραφή όλων των φύλλων του T έχει το ίδιο κέντρο με το T. Πράγματι, η διαγραφή αυτή μειώνει την εκκεντρότητα όλων των κόμβων που απομένουν στο T' κατά 1, (διότι για κάθε κόμβο το μέγιστο μονοπάτι που ξεκινά από αυτόν καταλήγει σε φύλλο). Άρα, όποιοι κόμβοι έχουν ελάχιστη εκκεντρότητα στο T, θα έχουν και στο T'. Άρα το T' έχει το ίδιο κέντρο με το T. Όμοια τώρα, διαγράφοντας όλα τα φύλλα του T', δημιουργούμε ένα δένδρο T'' με το ίδιο κέντρο, κ.ο.κ. μέχρι να παραμείνει ή το K_1 ή το K_2, που αποτελείται μόνο από 1 ή 2 κεντρικούς κόμβους, οι οποίοι αποτελούν και το κέντρο του αρχικού δένδρου T.

Πόρισμα 51. *Το κέντρο ενός δένδρου αποτελείται από δύο (συνδεδεμένους μεταξύ τους) κόμβους αν και μόνο αν η διάμετρός του είναι περιττή.*

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος που περιγράφεται στην απόδειξη της Πρότασης 50 μπορεί να υλοποιηθεί με την βιβλιοθήκη `networkx`.

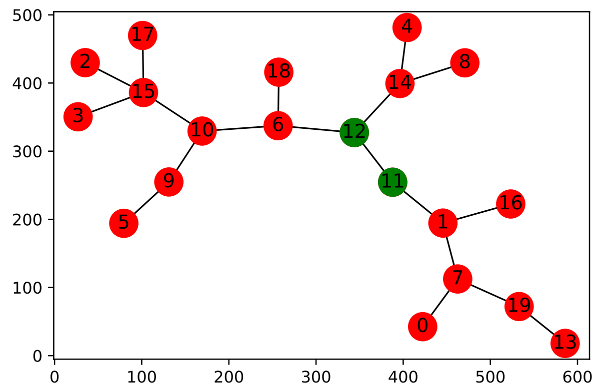
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

n = 20
T = nx.random_tree(n)
pos = nx.layout.kamada_kawai_layout(T)
nx.draw_networkx(T,pos)

Tcopy = nx.Graph(T) #copy tree T

```

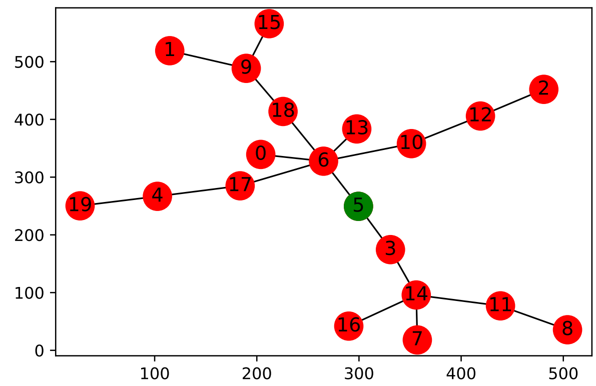
```
while(Tcopy.size() > 1): #until Tcopy has only one or zero edges
    #the set of remaining leaves in Tcopy
    leaves = []
    #for every vertex v in T
    for v in Tcopy:
        if(Tcopy.degree(v) == 1):    #v is a leaf
            leaves.append(v)
    Tcopy.remove_nodes_from(leaves)  #remove all leaves
#Now Tcopy consists of the center nodes
print("The center of T is:", Tcopy.nodes)
#Draw the center
nx.draw_networkx_nodes(Tcopy,pos,node_color='green',width=6.0)

plt.show()
```

Output:

```
The center of T is: [11, 12]
```

```
The center of T is: [5]
```





ΚΕΝΤΡΟΕΙΔΕΣ ΔΕΝΔΡΟΥ

Κλαδί ενός δένδρου T σε ένα κόμβο του v λέγεται κάθε μεγιστικό υποδένδρο του T που έχει το v για φύλλο. (Προφανώς ένα δένδρο έχει τόσα κλαδιά στο v όσος ο βαθμός του v).

Βάρος ενός κλαδιού ονομάζεται ο αριθμός των δεσμών του.

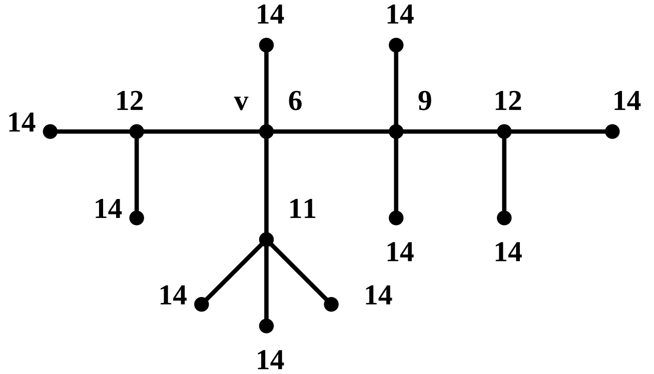
Βάρος $w(v)$ ενός κόμβου v ονομάζεται το μέγιστο βάρος των κλαδιών στον κόμβο v.

Κεντροειδής κόμβος ενός δένδρου λέγεται κάθε κόμβος με ελάχιστο βάρος.

Κεντροειδές ενός δένδρου λέγεται το σύνολο των κεντροειδών κόμβων του.

Παραδείγματα:

T_1

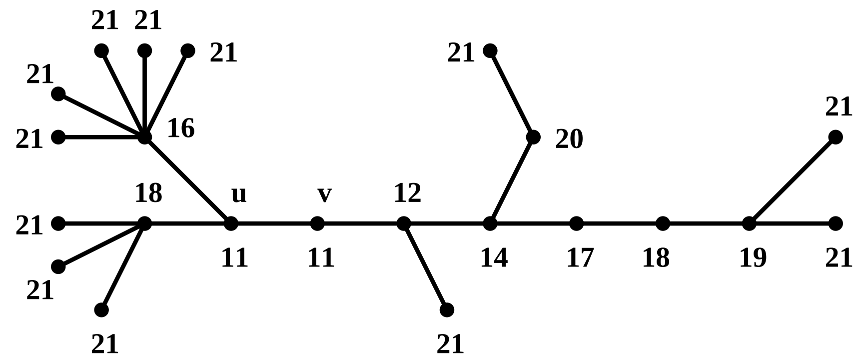


Τα βάρη των σημείων του T_1

v : κεντρειδές σημείο του T

$\{v\}$: κεντροειδές του T.

T_2



Τα βάρη των σημείων του T

u, v : κεντροειδή σημεία του T

$\{u, v\}$: κεντροειδές του T.

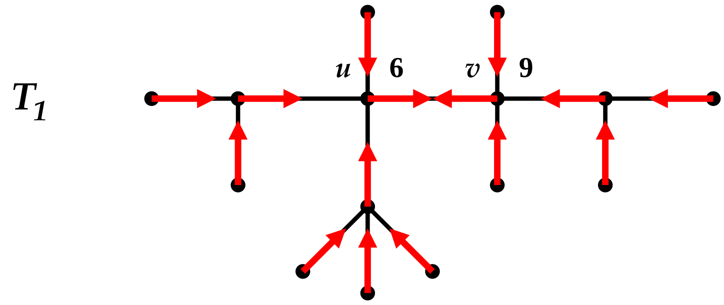
Πρόταση 52. *Το κεντροειδές κάθε δένδρου αποτελείται από ένα ή δύο (συνδεδεμένους) κόμβους.*

Η απόδειξη που θα δοθεί στηρίζεται στην παρακάτω διαδικασία:

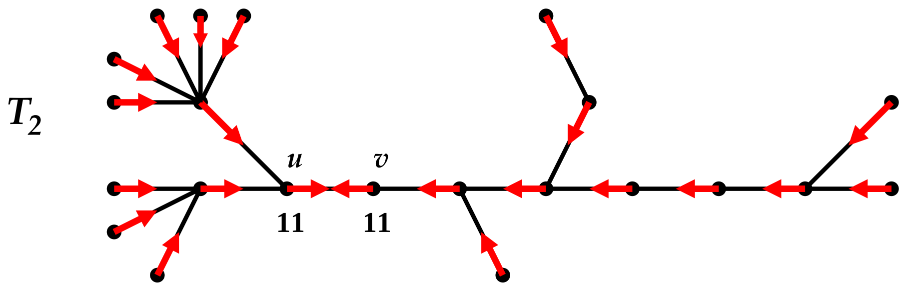
Για κάθε κόμβο u του δένδρου βρίσκουμε ένα κλαδί, του οποίου το βάρος ισούται με το βάρος του κόμβου. Στη συνέχεια βάζουμε ένα βελάκι πάνω στον πρώτο δεσμό του κλαδιού αυτού, με φορά προς το κλαδί. Τότε κάθε δεσμός θα έχει ένα ακριβώς βελάκι εκτός ενός δεσμού που θα έχει δύο βελάκια.

Αν τα άκρα του δεσμού που έχει δύο βελάκια έχουν το αυτό βάρος, το κεντροειδές του δένδρου θα αποτελείται από αυτά, διαφορετικά θα αποτελείται από το άκρο με το ελάχιστο βάρος.

Παραδείγματα

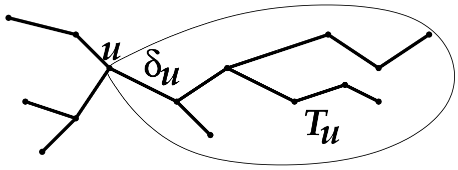


Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα ο δεσμός $\{u, v\}$ είναι ο μοναδικός δεσμός με δύο βελάκια. Επειδή $w(u) = 6 < 9 = w(v)$, το κεντροειδές του δένδρου θα είναι το $\{u\}$.



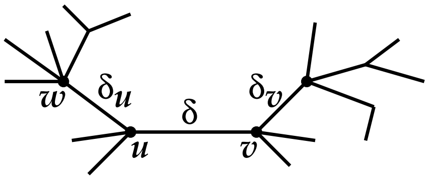
Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα ο δεσμός $\{u, v\}$ είναι ο μοναδικός δεσμός με δύο βελάκια. Επειδή $w(u) = 11 = w(v)$, το κεντροειδές του δένδρου είναι το $\{u, v\}$.

Απόδειξη της Πρότασης 52: Σε κάθε κόμβο του δένδρου αντιστοιχούμε ένα δεσμό δ_u ως εξής: Επιλέγουμε ένα κλαδί T_u του κόμβου u που το βάρος του δίνει το βάρος του κόμβου και ορίζουμε δ_u το δεσμό του κλαδιού αυτού που περιέχει το u.



$w(u)$ = αριθμός δεσμών $T_u = 9$.

Για κάθε δεσμό $\delta = \{u, v\}$ ισχύει $\delta = \delta_u$ ή $\delta = \delta_v$ διότι διαφορετικά το δ δε θα ανήκει στα κλαδιά T_u και T_v,



οπότε

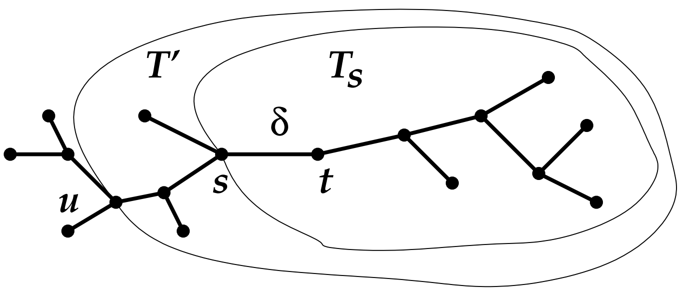
$$\begin{aligned} w(u) &= \text{βάρος } T_u \\ &\geq \text{βάρος του κλαδιού του } u \text{ με πρώτο δεσμό το } \delta \\ &> w(v) \end{aligned}$$

και ομοίως

$$\begin{aligned} w(v) &= \text{βάρος } T_v \\ &\geq \text{βάρος του κλαδιού του } v \text{ με πρώτο δεσμό το } \delta \\ &> w(u) \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, κάθε δεσμός δ αντιστοιχεί σε ένα ή δύο κόμβους u (άκρα του δ) με $\delta = \delta_u$. Επειδή ο αριθμός των κόμβων του δένδρου είναι μεγαλύτερος κατά ένα από τον αριθμό των δεσμών ($|X| = |E| + 1$) θα υπάρχει ακριβώς ένας δεσμός $\delta = \{s, t\}$ με $\delta = \delta_s = \delta_t$. Θα δειχθεί ότι για κάθε $u \in X$ με $u \neq s, t$ ισχύει: Αν u ανήκει στην ίδια συνιστώσα με το s (αντίστοιχα t) στο $T - \{s, t\}$ τότε $w(u) > w(s)$ (αντίστοιχα $w(u) > w(t)$). Πράγματι αν θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το u ανήκει στην ίδια συνιστώσα με το s στο $T - \{s, t\}$ τότε το T_s θα είναι υποδένδρο του T' (βλέπε επόμενο σχήμα).



Άρα

$$\begin{aligned} w(s) &= \text{αριθμός κόμβων του δένδρου } T_s \\ &< \text{αριθμός κόμβων του δένδρου } T' \\ &\leq w(u) \end{aligned}$$

Άρα $\min\{w(s), w(t)\} = \min_{u \in X} w(u)$ και επομένως το κεντροειδές K' είναι

$$K' = \begin{cases} \{s\}, & \text{αν } w(s) < w(t) \\ \{t\}, & \text{αν } w(t) < w(s) \\ \{s,t\}, & \text{αν } w(s) = w(t). \end{cases}$$

□

Χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη **networkx** μπορούμε να υλοποιήσουμε μια μέθοδο υπολογισμού του κεντροειδούς ενός δένδρου. Ο υπολογισμός του κεντροειδούς προκύπτει από τον υπολογισμό των βαρών κάθε κόμβου του δένδρου, βρίσκοντας το βάρος όλων των κλαδιών κάθε κόμβου.

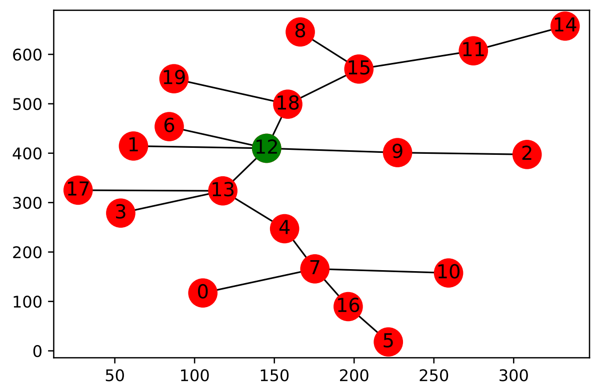
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

n = 20
T = nx.random_tree(n)
pos = nx.layout.kamada_kawai_layout(T)
nx.draw_networkx(T,pos)

#dictionary of weights
node_weights = {}
#minimum weight of nodes
min_node_weight = n-1

for v in T:
    Tcopy = nx.Graph(T) #copy tree T
    Tcopy.remove_node(v)
    #Tcopy consists of the branches of nodes v
    #(except the edge that connects it with v)
    #Each branch is a connected component of Tcopy
    Tcc = nx.connected_components(Tcopy)
    #compute the weight of v
    weight = 0
    for cc in Tcc:
        #len(cc) = the weight of branch cc
        if(len(cc) > weight):
            weight = len(cc)
    node_weights[v] = weight
    #compute the min weight of nodes
    if(min_node_weight > weight):
        min_node_weight = weight

centroid = []
for v in T:
    if node_weights[v] == min_node_weight:
        centroid.append(v)
```

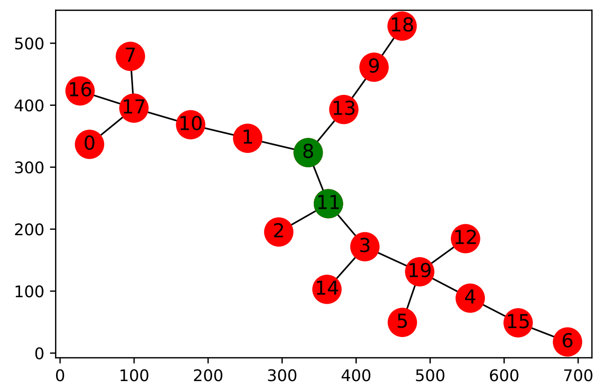
```
print("The centroid of T is:",centroid)
print("The centroid nodes have weights:",min_node_weight)

#Draw the center
Tcentroid = T.subgraph(centroid)
nx.draw_networkx_nodes(Tcentroid,pos,node_color='green',width=6.0)

plt.show()
print("The node weights are:", node_weights)
```

Output:

```
The centroid of T is: [12]
The centroid nodes have weights: 9
```

```
The centroid of T is: [8, 11]
The centroid nodes have weights: 10
```





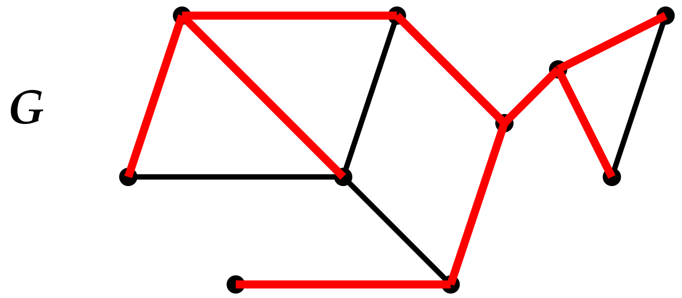
```
The node weights are: {0: 19, 1: 19, 2:
    19, 3: 19, 4: 14, 5: 19, 6: 19, 7: 15,
     8: 19, 9: 18, 10: 19, 11: 18, 12: 9,
    13: 11, 14: 19, 15: 16, 16: 18, 17:
    19, 18: 14, 19: 19}
```

```
The node weights are: {0: 19, 1: 14, 2:
    19, 3: 12, 4: 17, 5: 19, 6: 19, 7: 19,
     8: 10, 9: 18, 10: 15, 11: 10, 12: 19,
     13: 17, 14: 19, 15: 18, 16: 19, 17:
    16, 18: 19, 19: 14}
```

22. ΔΕΝΔΡΟ ΖΕΥΞΗΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ

Υπενθυμίζουμε ότι ένα γράφημα $G_1 = (X, E_1)$ λέγεται γενετικό υπογράφημα ενός γραφήματος $G = (X, E)$, αν $E_1 \subseteq E$. Αν το G_1 είναι δένδρο, τότε έχουμε ένα **δένδρο ζεύξης** (spanning tree), **ή γενετικό (ή γεννητικό) δένδρο**, του G.

Παράδειγμα : Οι έντονες γραμμές δίνουν στο παρακάτω γράφημα G ένα γενετικό δένδρο. (Φυσικά μπορούμε να βρούμε κι άλλα γενετικά δένδρα για το ίδιο G).

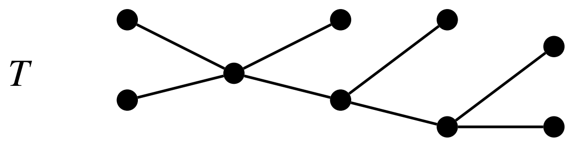


Ένα γενετικό δένδρο του G.

Πρόταση 53. *Ένα γράφημα έχει (τουλάχιστον ένα) δένδρο ζεύξης αν και μόνο αν είναι συνεκτικό.*

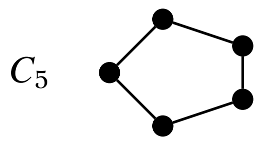
Παρατήρηση: Κάθε δένδρο ζεύξης ενός συνεκτικού γραφήματος με n κορυφές αποτελείται από $n-1$ δεσμούς του γραφήματος οι οποίοι δεν σχηματίζουν κύκλο.

Άσκηση 10. *Να βρεθεί το πλήθος των δένδρων ζεύξης των παρακάτω γραφημάτων:*



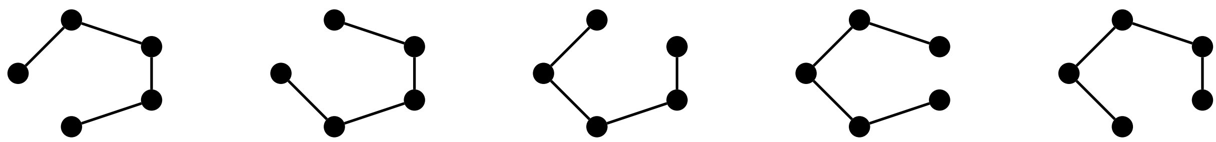
i)

Λύση. Το T έχει 1 δένδρο ζεύξης, τον εαυτό του. □



ii)

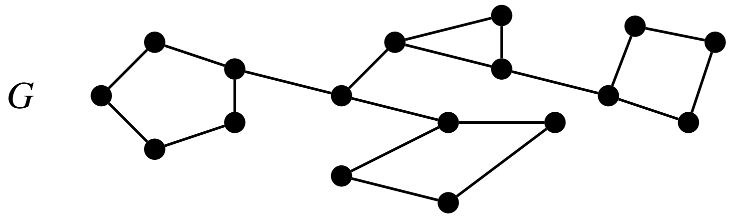
Λύση. Το C_5 έχει 5 δένδρα ζεύξης:



□

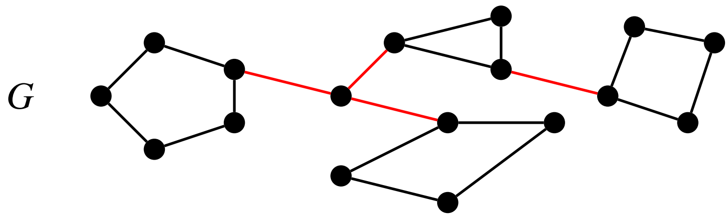
iii) C_n

Λύση. Το C_n έχει n δένδρα ζεύξης. Το καθένα προκύπτει σβήνοντας ακριβώς ένα δεσμό του C_n. □

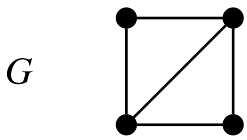


iv)

Λύση. Οι γέφυρες του γραφήματος (δεσμοί που είναι σημειωμένοι με κόκκινο) πρέπει να ανήκουν σε όλα τα δένδρα ζεύξης.

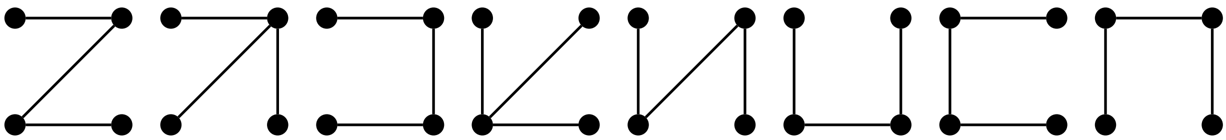


Σε κάθε ένα από τους 4 κύκλους που εμφανίζονται στο G μπορούμε να επιλέξουμε ανεξάρτητα ένα δένδρο ζεύξης τους, οι δεσμοί του οποίου περιέχονται στο δένδρο ζεύξης του G. Επομένως, το G έχει $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 240$ δένδρα ζεύξης. □



v)

Λύση. Το G έχει 4 κορυφές άρα κάθε δένδρο ζεύξης του πρέπει να περιέχει 3 δεσμούς. Υπάρχουν 5 δεσμοί στο G από τους οποίους πρέπει να επιλέξουμε 3. Άρα, ο αριθμός των δένδρων ζεύξης του G είναι το πολύ $\binom{5}{3} = 10$. Όμως, κάποιες τριάδες δεσμών του G δεν αντιστοιχούν σε δένδρο. Οπότε τελικά έχουμε τα παρακάτω 8 δένδρα ζεύξης του G.



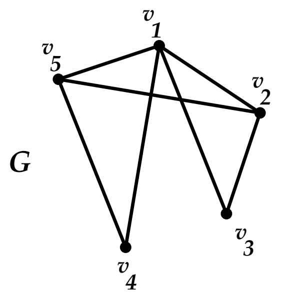
□

Παρατήρηση *Για το πλήθος των δένδρων ζεύξης ενός γραφήματος G υπάρχει τύπος που απαιτεί τον υπολογισμό μιας ορίζουσας (θεώρημα μήτρας - δένδρου). Η πολυπλοκότητα του τύπου είναι πολυωνυμική ως προς τον αριθμό των κορυφών του γραφήματος.*

Μήτρα Laplace. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα δεσμών με n κορυφές και μήτρα γειτνίασης $M(G)$ και έστω η διαγώνια μήτρα $\Delta(G) = \text{diag}(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$.
Η **Λαπλασιανή μήτρα**, ή **μήτρα Laplace** $L(G)$ του G ορίζεται ως η μήτρα

$$L(G) = \Delta(G) - M(G)$$

Παράδειγμα: Για το γράφημα G

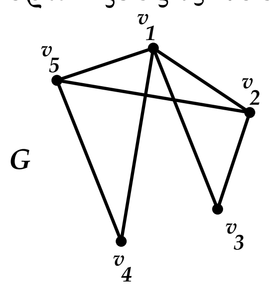


έχουμε

$$L(G) = \Delta(G) - M(G) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 54 (Θεώρημα μήτρας - δένδρου). *Το πλήθος των δένδρων ζεύξης του G ισούται με την τιμή της ορίζουσας της μήτρας που προκύπτει από την μήτρα Laplace $L(G)$ σβήνοντας την i γραμμή και την i στήλη για οποιοδήποτε $i \in [|V|]$.*

Παράδειγμα: Το πλήθος των δένδρων ζεύξης του γραφήματος G



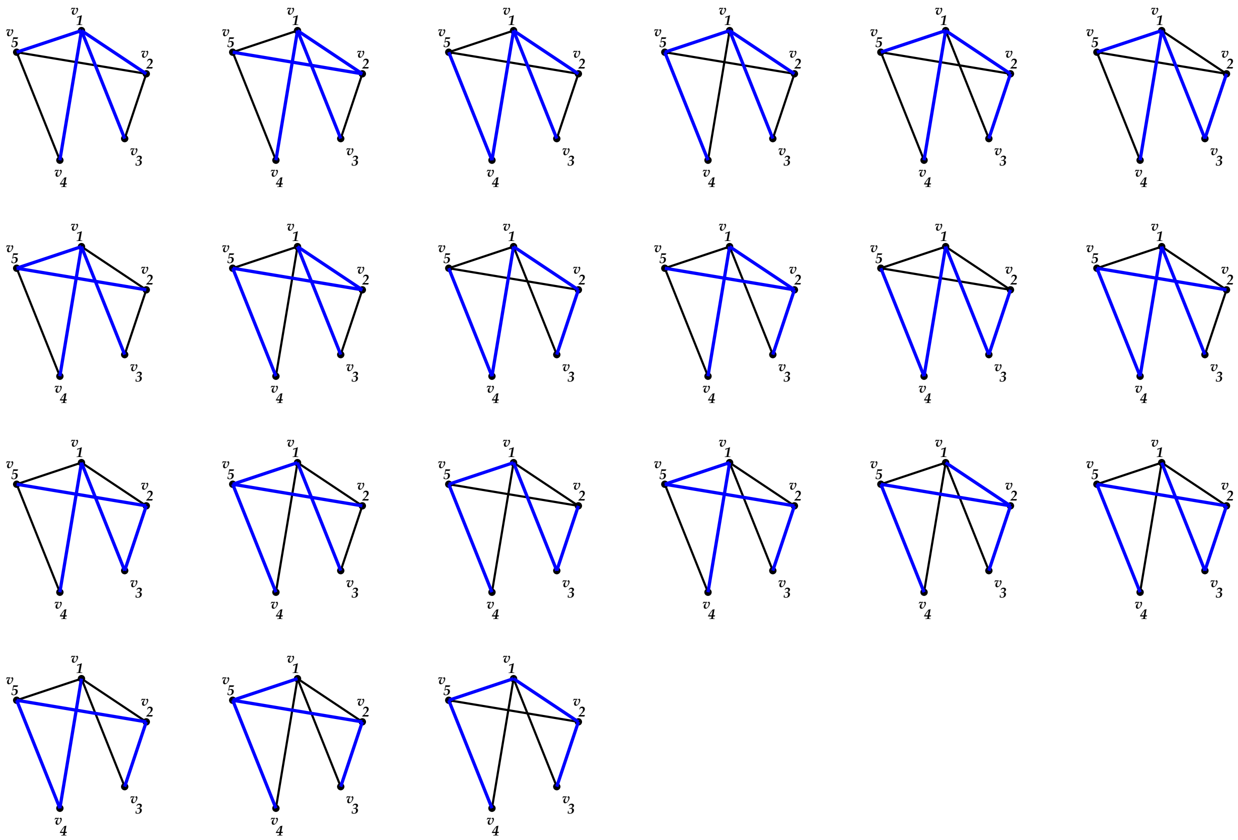
ισούται με την τιμή της ορίζουσας $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ που προκύπτει από την μήτρα Laplace[6] $L(G) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ σβήνοντας την 1η γραμμή και την 1η στήλη της. Συγκεκριμένα έχουμε:

[6]βλέπε σελίδα 154 για τον ορισμό της μήτρας Laplace.

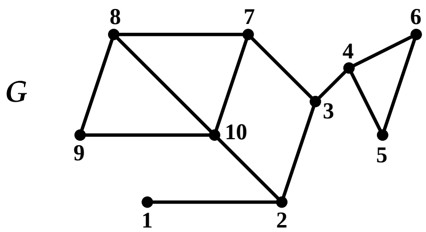
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{R_3 \to R_3 + 2R_4}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{R_3 \to R_3 + 5R_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 13 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 13 & -5 \end{vmatrix} = 21 \text{ δένδρα ζεύξης.}$$

Για επαλήθευση ακολουθούν τα δένδρα ζεύξης του G.



Παράδειγμα: Για γράφημα G



έχουμε

$$L(G) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Το πλήθος των γενετικών δένδρων του G ισούται με την τιμή της ορίζουσας της μήτρας που προκύπτει από την $L(G)$ σβήνοντας, για παράδειγμα, την 10η γραμμή και 10η στήλη. Οπότε

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = 87.$$

δηλαδή το γράφημα G έχει 87 δένδρα ζεύξης.

Πρόταση 55. *Ο αριθμός των δένδρων ζεύξης του K_n ισούται με n^{n-2}.*

Η μήτρα Laplace του K_n είναι η $n \times n$ μήτρα

$$L(G) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

Από το θεώρημα μήτρας-δένδρου έχουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός ισούται με την τιμή της ορίζουσας της $(n-1) \times (n-1)$ μήτρας που προκύπτει από την $L(G)$ σβήνοντας την n γραμμή και n στήλη της.

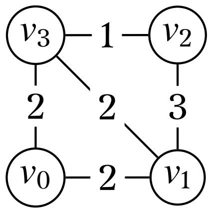
$$\begin{vmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \overset{R_1=R_1+\sum_{i=2}^{n-2} R_i}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_i=R_i+R_1, i\geq 2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$$

Παρατήρηση: Υπάρχει εναλλακτικός κομψός τρόπος υπολογισμού του πλήθους των δένδρων ζεύξης του K_n μέσω κωδίκων Prufer.

23. ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΔΕΝΔΡΑ ΖΕΥΞΗΣ

Πρόβλημα. Δίδεται ένα συνεκτικό γράφημα οι δεσμοί του οποίου έχουν βάρη.

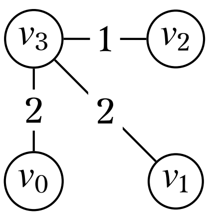


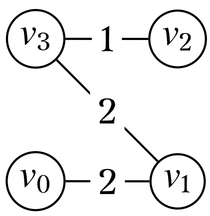
Να βρεθεί ένα υποσύνολο των δεσμών του με την ιδιότητα ότι υπάρχει μονοπάτι που συνδέει οποιεσδήποτε κορυφές του και το συνολικό άθροισμα των βαρών του είναι ελάχιστο.

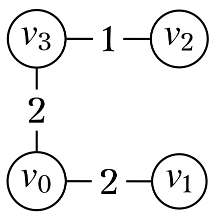
Προφανώς στο ζητούμενο γράφημα περιέχονται όλες οι κορυφές του αρχικού γραφήματος, το γράφημα που προκύπτει είναι συνεκτικό, αφού υπάρχει μονοπάτι που συνδέει όλες τις κορυφές του και επιπλέον δεν υπάρχουν κύκλοι, αφού αν διαγράψουμε ένα δεσμό ενός κύκλου διατηρείται η συνεκτικότητα του γραφήματος.

Επομένως το ζητούμενο είναι η εύρεση ενός δένδρου με το ελάχιστο συνολικό κόστος βαρών. Το δένδρο αυτό ονομάζεται ελάχιστο δένδρο ζεύξης, ή ελάχιστο γεννητικό δένδρο, ή ελάχιστο επικαλύπτον δένδρο, (ή minimum spanning tree (MST)).

Το ελάχιστο δένδρο ζεύξης δεν είναι απαραίτητα μοναδικό, για το προηγούμενο γράφημα υπάρχουν 3 ελάχιστα δένδρα ζεύξης με κόστος 5 το καθένα.







Σε κάθε δένδρο με $|V|$ κορυφές και $|E|$ δεσμούς ισχύει ότι

$$|V| = |E| + 1$$

Επομένως, αν το γράφημα έχει n κορυφές τότε το ελάχιστο δένδρο ζεύξης θα έχει $n-1$ δεσμούς. Απομένει να βρεθεί ποιοι δεσμοί πρέπει να επιλεγούν.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος που επιλύει αποτελεσματικά αυτό το πρόβλημα.

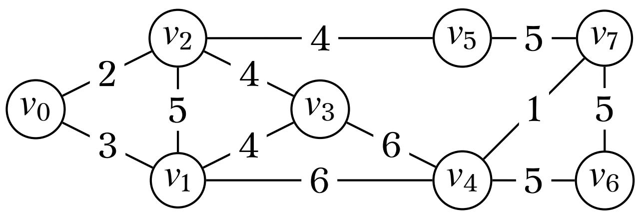
Αλγόριθμος του Kruskal

Είσοδος: Ένα γράφημα δεσμών με $|V|$ κορυφές και βάρη.
Έξοδος: Ένα ελάχιστο δένδρο ζεύξης (MST).

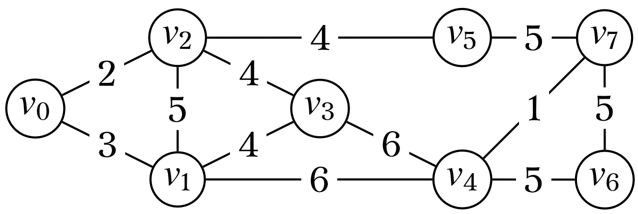
(1) Τοποθετούμε όλους τους δεσμούς σε μια ουρά προτεραιότητας Q, με κλειδί το βάρος κάθε δεσμού.
(2) Όσο δεν έχουν επιλεγεί $|V| - 1$ δεσμοί εκτέλεσε τα επόμενα βήματα:
- Αφαίρεσε από την Q τον δεσμό με το μικρότερο βάρος.
- Αν η επιλογή του δεν δημιουργεί κύκλο προσθεσέ τον στο ελάχιστο δένδρο ζεύξης.

Παράδειγμα

Να βρεθεί, με τον αλγόριθμο του Kruskal, ένα ελάχιστο δένδρο ζεύξης για το επόμενο γράφημα, το οποίο έχει 8 κορυφές και 12 δεσμούς.



(1) Αρχικά τοποθετούμε τους 12 δεσμούς στην ουρά προτεραιότητας Q, και το δένδρο MST είναι κενό.

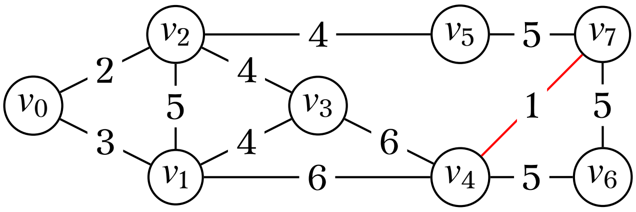


$$Q = [\{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{1,2\}[5], \{2,3\}[4], \{1,3\}[4], \{1,4\}[6], \{3,6\}[6],$$
$$\{2,5\}[4], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5], \{4,7\}[1], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = \varnothing$$

(2) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 0 δεσμούς < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, δηλαδή τον δεσμό $\{4,7\}$ με βάρος 1.

Η προσθήκη του δεσμού $\{4,7\}$ στο δένδρο MST δεν δημιουργεί κύκλο, άρα ανήκει στο MST.

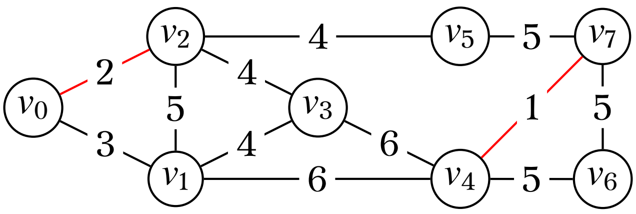


$$Q = [\{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{1,2\}[5], \{2,3\}[4], \{1,3\}[4], \{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \\ \{2,5\}[4], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5], \{4,6\}[5]$$

$$MST = [\{4,7\}[1]]$$

(3) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 1 δεσμό < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, δηλαδή τον δεσμό $\{0,2\}$ με βάρος 2.

Η προσθήκη του δεσμού $\{0,2\}$ στο δένδρο MST δεν δημιουργεί κύκλο, άρα ανήκει στο MST.

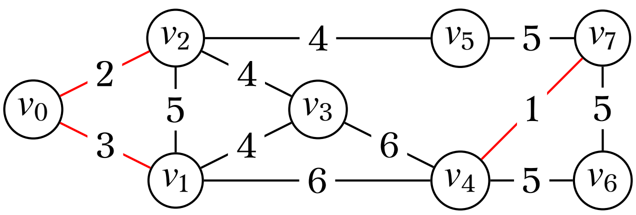


$$Q = [\{0,1\}[3], \{1,2\}[5], \{2,3\}[4], \{1,3\}[4], \{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{2,5\}[4], \\ \{5,7\}[5], \{6,7\}[5], \{4,6\}[5]$$

$$MST = [\{0,2\}[2], \{4,7\}[1]]$$

(4) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 2 δεσμούς < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, δηλαδή τον δεσμό $\{0,1\}$ με βάρος 3.

Η προσθήκη του δεσμού $\{0,1\}$ στο δένδρο MST δεν δημιουργεί κύκλο, άρα ανήκει στο MST.

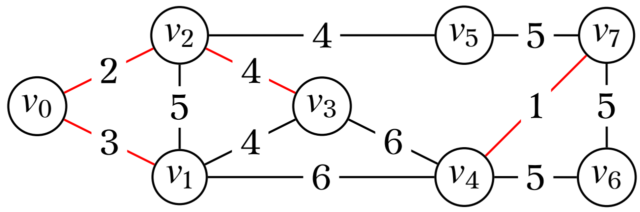


$$Q = [\{1,2\}[5], \{2,3\}[4], \{1,3\}[4], \{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{2,5\}[4], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = [\{0,1\}[3], \{0,2\}[2], \{4,7\}[1]]$$

(5) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 3 δεσμούς < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, υπάρχουν τρεις δεσμοί με ελάχιστο κλειδί ίσο με 4, οι δεσμοί $\{2,3\}$, $\{1,3\}$ και $\{2,5\}$. Διαλέγουμε στην τύχη τον δεσμό $\{2,3\}$.

Η προσθήκη του δεσμού $\{2,3\}$ στο δένδρο MST δεν δημιουργεί κύκλο, άρα ανήκει στο MST.

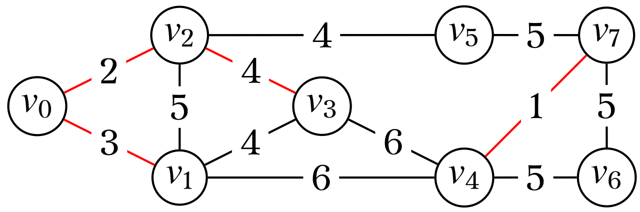


$$Q = [\{1,2\}[5], \{1,3\}[4], \{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{2,5\}[4], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = [\{4,7\}[1], \{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{2,3\}[4]]$$

(6) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 4 δεσμούς < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, υπάρχουν δύο δεσμοί με ελάχιστο κλειδί ίσο με 4, οι δεσμοί $\{1,3\}$ και $\{2,5\}$. Διαλέγουμε στην τύχη τον δεσμό $\{1,3\}$.

Η προσθήκη του δεσμού $\{1,3\}$ στο δένδρο MST **δημιουργεί κύκλο**, άρα δεν ανήκει στο MST.

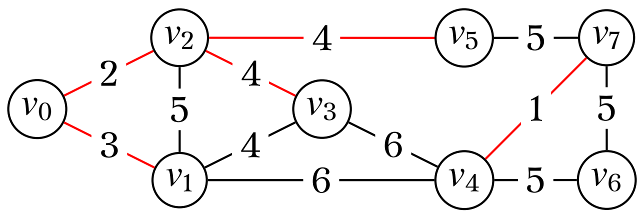


$$Q = [\{1,2\}[5], \{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{2,5\}[4], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = [\{4,7\}[1], \{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{2,3\}[4]]$$

(7) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 4 δεσμούς < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, δηλαδή τον δεσμό $\{2,5\}$ με βάρος 4.

Η προσθήκη του δεσμού $\{2,5\}$ στο δένδρο MST δεν δημιουργεί κύκλο, άρα ανήκει στο MST.

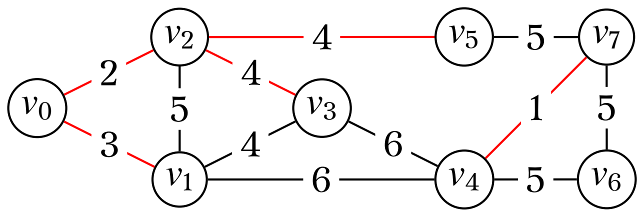


$$Q = [\{1,2\}[5], \{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = [\{4,7\}[1], \{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{2,3\}[4], \{2,5\}[4]]$$

(8) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 5 δεσμούς < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, υπάρχουν τέσσερεις δεσμοί με ελάχιστο κλειδί ίσο με 5, οι δεσμοί $\{1,2\}$, $\{5,7\}$, $\{6,7\}$ και $\{4,6\}$. Διαλέγουμε στην τύχη τον δεσμό $\{1,2\}$.

Η προσθήκη του δεσμού $\{1,2\}$ στο δένδρο MST **δημιουργεί κύκλο**, άρα δεν ανήκει στο MST.

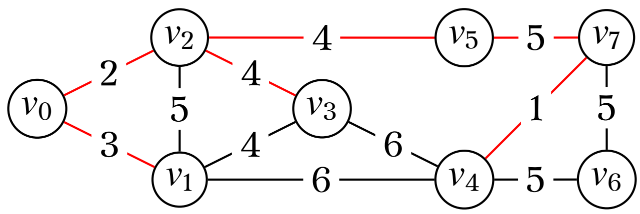


$$Q = [\{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = [\{4,7\}[1], \{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{2,3\}[4], \{2,5\}[4]]$$

(9) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 5 δεσμούς < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, υπάρχουν τρεις δεσμοί με ελάχιστο κλειδί ίσο με 5, οι δεσμοί $\{5,7\}$, $\{6,7\}$ και $\{4,6\}$. Διαλέγουμε στην τύχη τον δεσμό $\{5,7\}$.

Η προσθήκη του δεσμού $\{5,7\}$ στο δένδρο MST δεν δημιουργεί κύκλο, άρα ανήκει στο MST.

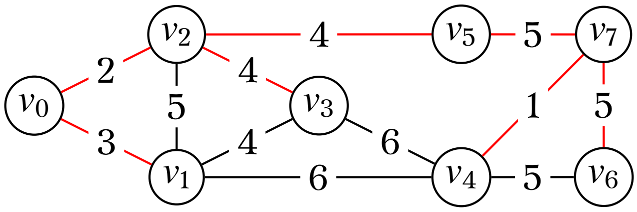


$$Q = [\{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{6,7\}[5], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = [\{4,7\}[1], \{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{2,3\}[4], \{2,5\}[4], \{5,7\}[5]]$$

(10) Επειδή έχουμε επιλέξει μόνο 6 δεσμούς < 7, αφαιρούμε από την ουρά προτεραιότητας τον δεσμό με το ελάχιστο κλειδί, υπάρχουν δύο δεσμοί με ελάχιστο κλειδί ίσο με 5, οι δεσμοί $\{6,7\}$ και $\{4,6\}$. Διαλέγουμε στην τύχη τον δεσμό $\{6,7\}$.

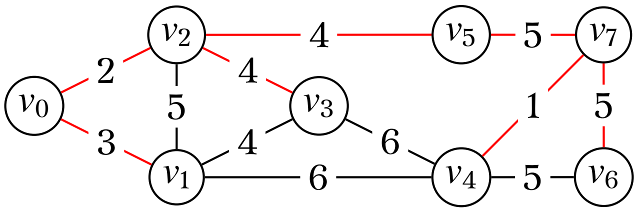
Η προσθήκη του δεσμού $\{6,7\}$ στο δένδρο MST δεν δημιουργεί κύκλο, άρα ανήκει στο MST.



$$Q = [\{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = [\{4,7\}[1], \{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{2,3\}[4], \{2,5\}[4], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5]]$$

(11) Επειδή έχουμε επιλέξει 7 δεσμούς, το δένδρο MST είναι το ελάχιστο δένδρο ζεύξης, με συνολικό κόστος $1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 24$.



$$Q = [\{1,4\}[6], \{3,6\}[6], \{4,6\}[5]]$$

$$MST = [\{4,7\}[1], \{0,2\}[2], \{0,1\}[3], \{2,3\}[4], \{2,5\}[4], \{5,7\}[5], \{6,7\}[5]]$$

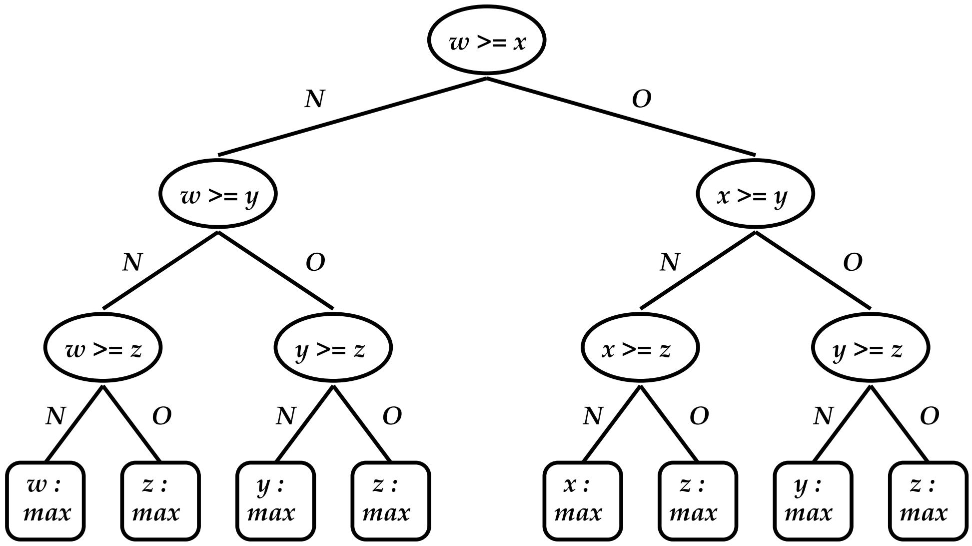
Παρατηρήσεις.

- Στον αλγόριθμο του Kruskal το ελάχιστο δένδρο ζεύξης δημιουργείται συνδέοντας μικρότερα ελάχιστα δένδρα ζεύξης (δάση από δένδρα ζεύξης).
- Στον αλγόριθμο του Kruskal το βαρύτερο υπολογιστικό κομμάτι είναι ο έλεγχος της δημιουργίας κύκλου. Υπάρχουν αποδοτικές δομές δεδομένων για τον έλεγχο αυτό.

24. ΔΕΝΔΡΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Δένδρο απόφασης (decision tree) λέγεται ένα k-δένδρο του οποίου κάθε εσωτερική κορυφή παριστάνει μια ερώτηση για την οποία πρέπει να αποφασίσουμε. Οι δυνατές απαντήσεις (αποφάσεις) παριστάνονται από τους δεσμούς που συνδέουν τον κόμβο με τους κόμβους του επόμενου επίπεδου. Τα τελικά αποτελέσματα της διαδικασίας παριστάνονται από τα φύλλα του δένδρου.

Πολύ συχνά, οι δυνατές απαντήσεις κάθε φορά είναι : "Ναι" (Ν) ή "Όχι " (Ο), οπότε το δένδρο απόφασης είναι ένα δυαδικό δένδρο, όπως το παρακάτω δένδρο που βρίσκει το μέγιστο μεταξύ 4 στοιχείων x, y, z, w χρησιμοποιώντας 3 συγκρίσεις.

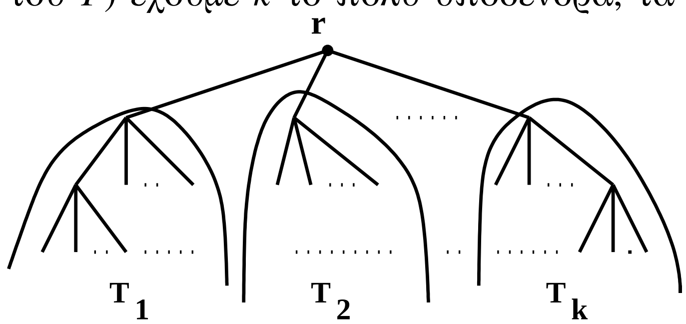


Ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα που μας δίνει κάτω φράγματα για το πλήθος των ερωτήσεων που απαιτούνται σε κάποιο πρόβλημα απόφασης που μοντελοποιείται από ένα k-δένδρο είναι το επόμενο.

Πρόταση 56. *Το ύψος h ενός k-δένδρου με l φύλλα είναι τουλάχιστον* $\log_k l$.

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι $h \geq \log_k l$, ή ισοδύναμα ότι $k^h \geq l$, δηλαδή θέλουμε να δείξουμε ότι ένα k-δένδρο ύψους h έχει το πολύ k^h φύλλα. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς h: Για $h = 0$, το δένδρο είναι τετριμμένο και ο μοναδικός του κόμβος είναι και φύλλο, άρα έχει πράγματι k^0 φύλλα.

Έστω ότι ισχύει για $h \leq n$, και έστω T ενα k-δένδρο ύψους $n + 1$. Στο γράφημα $T - r$ (όπου r η ρίζα του T) έχουμε k το πολύ υποδένδρα, τα $T_1, T_2, \ldots, T_k$.



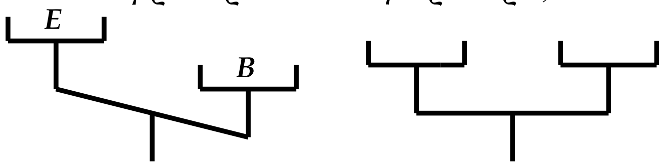
Αλλά τα $T_1, T_2, \ldots, T_k$ έχουν ύψος το πολύ n. Άρα, από την υπόθεση της επαγωγής, έχουν συνολικά k^n το πολύ φύλλα το καθένα. Συνολικά λοιπόν, τα υποδένδρα $T_1, T_2, \ldots, T_k$ έχουν το πολύ $k \cdot k^n = k^{n+1}$ φύλλα, τα οποία είναι τα φύλλα και του αρχικού δένδρου T. □

Παρατήρηση: Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι ένα k-δένδρο με ύψος h περιέχει το πολύ k^h φύλλα.

Στο επόμενο παράδειγμα δίνεται μια εφαρμογή που χρησιμοποιεί ένα 3-δένδρο απόφασης:

Άσκηση 11 (Το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων). *Ένα κανονικό νόμισμα έχει αριθμό* 0*. Υπάρχουν n άλλα νομίσματα ίδια ακριβώς στην εμφάνιση με το* 0*, που έχουν όμως αριθμούς* $1, 2, \ldots, n$*. Υποψιαζόμαστε ότι ένα νόμισμα μπορεί να είναι "κίβδηλο" (είτε λίγο ελαφρύτερο, είτε λίγο βαρύτερο).*

i) Να δειχθεί ότι χρειάζονται τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$ *ζυγίσματα σε μια ζυγαριά η οποία δείχνει το ελαφρύτερο και το βαρύτερο, ή δύο ίσου βάρους*



για να αποφασίσουμε αν υπάρχει κίβδηλο νόμισμα, ποιο είναι αυτό και αν είναι βαρύ ή ελαφρύ.

ii) Να περιγραφεί μια διαδικασία που να χρησιμοποιεί ακριβώς αυτό τον αριθμό ζυγισμάτων, όταν $n = 3$ *και όταν* $n = 4$*.*

Λύση. i) Το δένδρο απόφασης εδώ είναι ένα 3-δένδρο, αφού κάθε φορά που ζυγίζουμε υπάρχουν τρία πιθανά αποτελέσματα :

$<$: το αριστερό είναι ελαφρύτερο,

$=$: τα δύο μέρη έχουν το ίδιο βάρος,

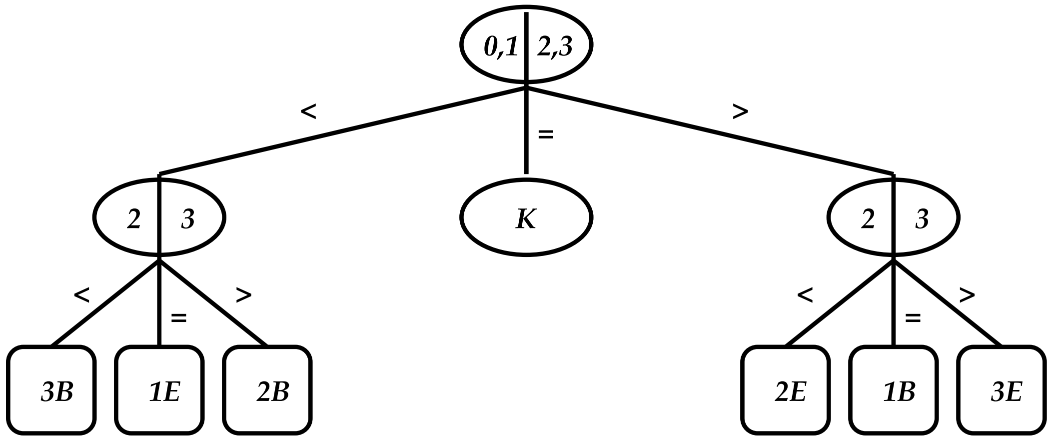
$>$: το αριστερό είναι βαρύτερο.

Υπάρχουν $2n+1$ πιθανές τελικές απαντήσεις (φύλλα) στο δένδρο απόφασης, για το παραπάνω πρόβλημα

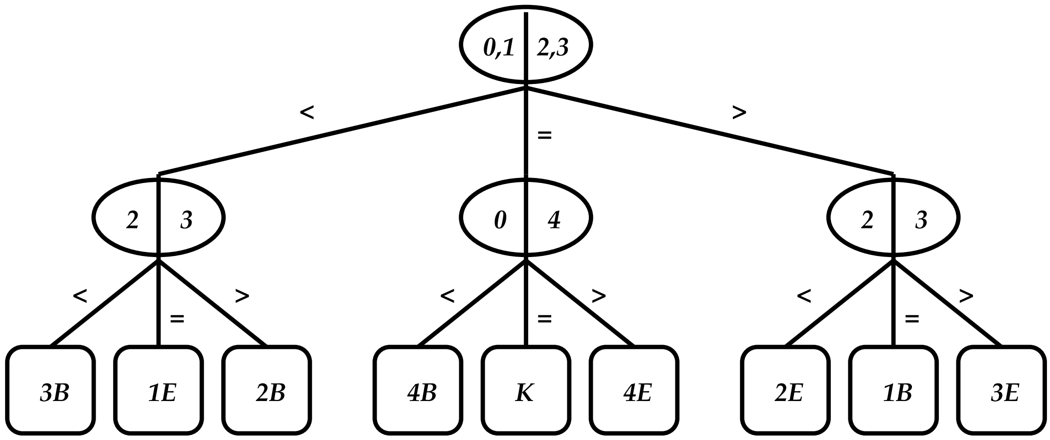
K,	$1B$,	$1E$,	$2B$,	$2E$,	$\ldots$,	nB,	nE
καλά όλα	το 1 είναι βαρύ	το 1 είναι ελαφρύ	το 2 είναι βαρύ	το 2 είναι ελαφρύ		το n είναι βαρύ	το n είναι ελαφρύ

Άρα το ύψος του δένδρου είναι τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$, οπότε το πλήθος των δεσμών του δένδρου (δηλαδή των ζυγισμάτων) από τη ρίζα μέχρι κάποιο (τουλάχιστον ένα) φύλλο (δηλαδή σε μία τουλάχιστον περίπτωση) είναι τουλάχιστον $\log_3(2n+1)$.

ii) Για $n = 3$, έχουμε $\log_3(2 \cdot 3 + 1) = \log_3 7 \approx 1.771$, οπότε τα ζυγίσματα θα είναι τουλάχιστον 2, μια δε λύση με ακριβώς δύο ζυγίσματα φαίνεται στο παρακάτω 3-δένδρο αποφάσεων:



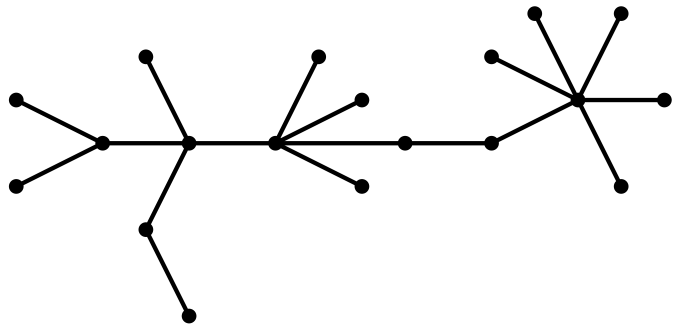
Για $n = 4$, έχουμε $\log_3(2 \cdot 4 + 1) = \log_3 9 = 2$, οπότε τα ζυγίσματα θα είναι τουλάχιστον 2, μια δε λύση με ακριβώς δύο ζυγίσματα φαίνεται στο παρακάτω 3-δένδρο αποφάσεων:



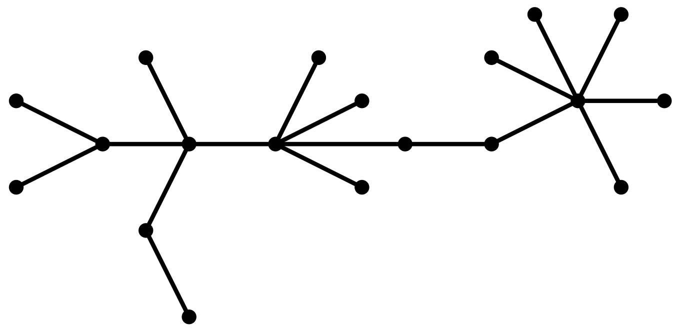
□

Ασκήσεις προς επίλυση

(1) Να βρεθεί το κέντρο του παρακάτω δένδρου.



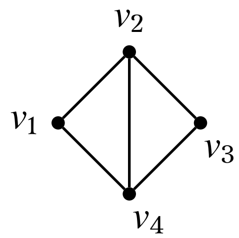
(2) Να βρεθεί το κεντροειδές του παρακάτω δένδρου.



(3) Να βρεθεί ο αριθμός των δένδρων ζεύξης των παρακάτω γραφημάτων

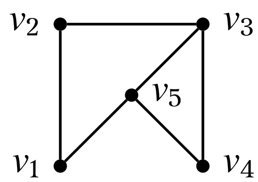
i)

G_1



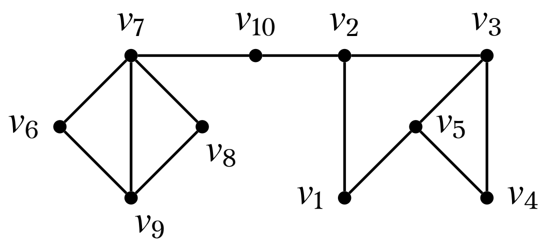
ii)

G_2

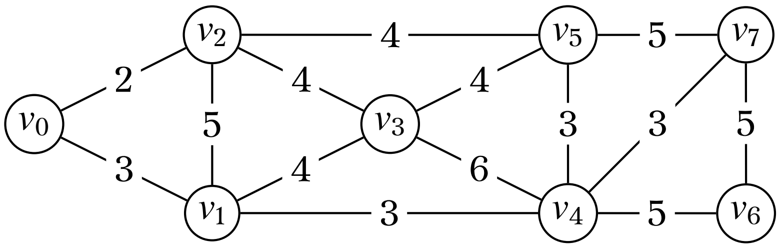


iii)

G_3



(4) Να βρεθεί ένα ελάχιστο δένδρο ζεύξης του γραφήματος



(5) Τι συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα βάρη ενός γραφήματος ώστε το ελάχιστο δένδρο ζεύξης να είναι μοναδικό;

(6) Να λυθεί το πρόβλημα των κίβδηλων νομισμάτων για $n = 5$.