ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΜΣ "ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ -
ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΧΝΗΤΗΣ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗΣ"

Σημειώσεις του μαθήματος

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κ. Μανές - Ι. Τασούλας

Σημειώσεις διαλέξεων 9

ΠΕΙΡΑΙΑΣ 2023

Οι παρούσες σημειώσεις βασίζονται σε προηγούμενες σημειώσεις του μαθήματος που έχουν συγγράψει ο Καθηγητής κ. Αριστείδης Σαπουνάκης και ο Καθηγητής κ. Παναγιώτης-Γεώργιος Τσικούρας.

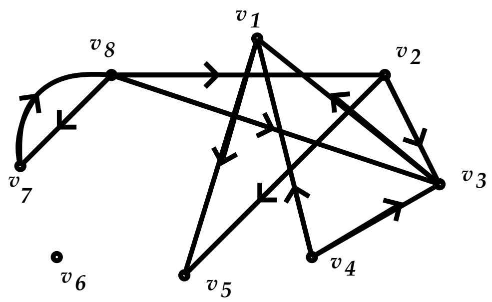
ΤΡΙΤΟ ΜΕΡΟΣ: ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΤΟΞΩΝ

25. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Κάθε δυάδα $G = (V(G), U(G))$, ή (V, U), όπου V είναι ένα μη κενό σύνολο και U είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη $(v, u) \in V^2$ ονομάζεται **γράφημα τόξων**, ή **προσανατολισμένο γράφημα** (directed graph), ή **γράφημα με κατεύθυνση** (oriented graph), ή **διγράφημα** (digraph).

Τα στοιχεία του V καλούνται **κορυφές**, ή **σημεία**, ή **κόμβοι** όπως και στα γραφήματα δεσμών, ενώ τα στοιχεία του U καλούνται **τόξα** (arcs) και συμβολίζονται γραφικά με τόξα.

Παράδειγμα: Η δυάδα $G = (V(G), U(G))$ όπου $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ και $U(G) = \{(v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_1), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_7, v_8), (v_8, v_2), (v_8, v_3), (v_8, v_7)\}$ είναι ένα γράφημα τόξων. Η γραφική του απεικόνιση είναι η ακόλουθη:



Το τόξο (v, v), $v \in V$ ονομάζεται **βρόχος** (loop).

Οι ορισμοί είναι αντίστοιχοι με αυτούς που δώσαμε στα γραφήματα δεσμών με τις εξής επισημάνσεις:

Τώρα ορίζεται **βαθμός εξόδου** (out-degree) $d_+(v)$ ενός κόμβου v (πόσοι δεσμοί "φεύγουν" από τον κόμβο) και **βαθμός εισόδου** (in-degree) $d_-(v)$ (πόσοι δεσμοί "φθάνουν").

Έτσι,

$$d_+(v) = |\{u \in V(G) : (v, u) \in U(G)\}|,$$

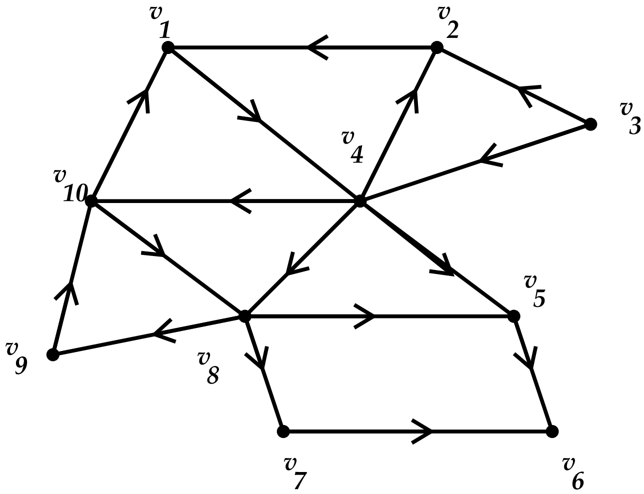
ενώ

$$d_-(v) = |\{u \in V(G) : (u, v) \in U(G)\}|$$

Προφανώς τώρα ο **βαθμός** $d(v)$ ενός κόμβου v ορίζεται από την σχέση

$$d(v) = d_+(v) + d_-(v).$$

Παράδειγμα: Στο επόμενο γράφημα



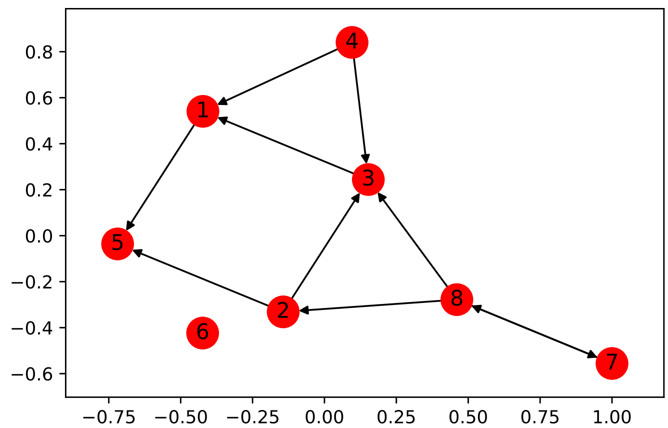
είναι $d_+(v_8) = 3$, $d_-(v_8) = 2$, $d(v_8) = 5$, $d_-(v_2) = 2$, $d_-(v_3) = 0$, κ.λπ.

Μπορούμε να ορίσουμε το γραφήματα τόξων του πρώτου παραδείγματος χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη networkx:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G = nx.DiGraph()
V = [1,2,3,4,5,6,7,8]
U = [(1,5),(2,3),(2,5),(3,1),(4,1),(4,3),(7,8),(8,2),(8,3),(8,7)]
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(U)

pos = nx.layout.kamada_kawai_layout(G)
nx.draw_networkx(G,pos)

for v in G:
    print("Vertex",v,"has indegree:",G.in_degree(v),"and outdegree:",G.out_degree(v))

plt.show()
```

Output:

```
Vertex 1 has indegree: 2 and outdegree: 1
Vertex 2 has indegree: 1 and outdegree: 2
Vertex 3 has indegree: 3 and outdegree: 1
Vertex 4 has indegree: 0 and outdegree: 2
Vertex 5 has indegree: 2 and outdegree: 0
Vertex 6 has indegree: 0 and outdegree: 0
Vertex 7 has indegree: 1 and outdegree: 1
Vertex 8 has indegree: 1 and outdegree: 3
```



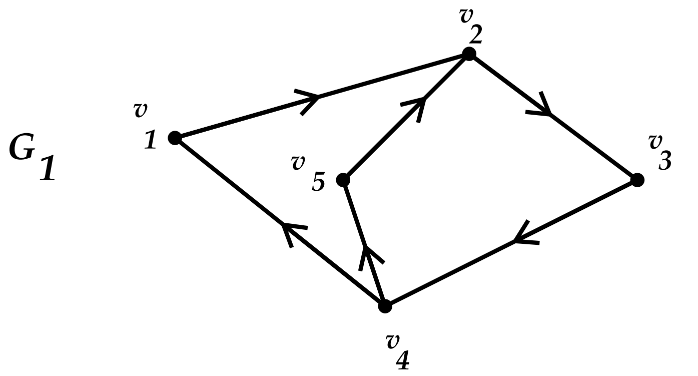
Η διαδρομή σε ένα διγράφημα πρέπει εν γένει να "ακολουθεί" τη διεύθυνση κάθε τόξου. Υπάρχουν διάφορα είδη συνεκτικότητας στα διγραφήματα:

Ένα γράφημα τόξων λέγεται **ισχυρά συνεκτικό** αν για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει μονοπάτι και από τον πρώτο προς τον δεύτερο, και από τον δεύτερο προς τον πρώτο.

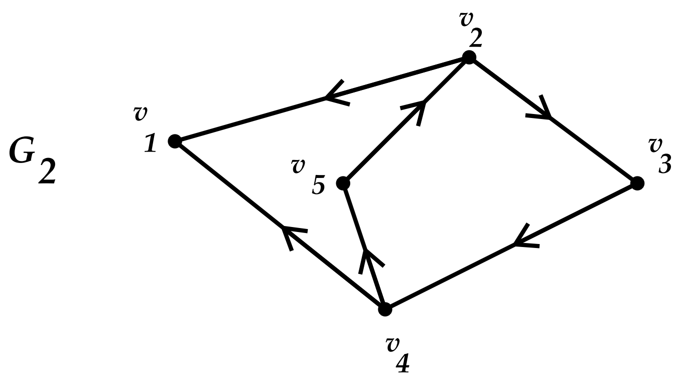
Ένα γράφημα τόξων λέγεται **μονομερώς συνεκτικό** αν δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, αλλά για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει μονοπάτι είτε από τον πρώτο προς τον δεύτερο, είτε από τον δεύτερο προς τον πρώτο.

Ένα γράφημα τόξων λέγεται **ασθενώς συνεκτικό** αν δεν είναι ισχυρά ή μονομερώς συνεκτικό, αλλά για οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων του υπάρχει **ημιδιαδρομή** μεταξύ τους (δηλαδή τώρα επιτρέπεται και διάτρεξη τόξων αντίθετα με τον προσανατολισμό τους, όποτε χρειαστεί).

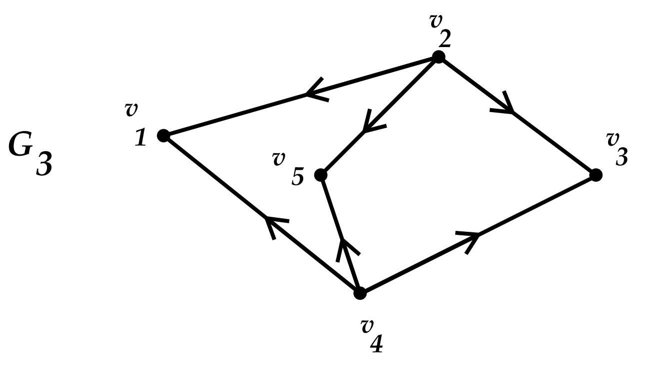
Παραδείγματα:



Το γράφημα G_1 είναι ισχυρά συνεκτικό.



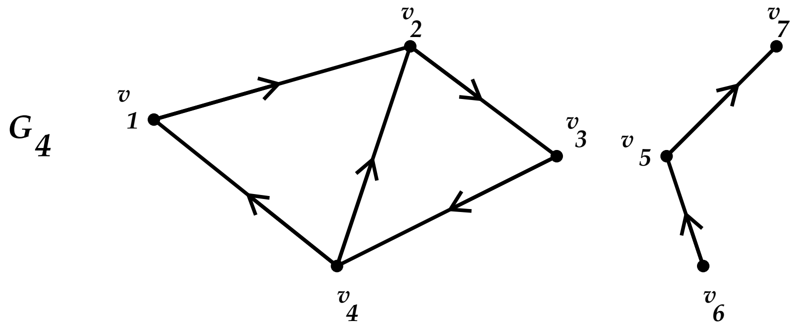
Το γράφημα G_2 είναι μονομερώς συνεκτικό (αφού για παράδειγμα, δεν υπάρχει $v_1 - v_3$ μονοπάτι, ενώ υπάρχει μονοπάτι $v_3 - v_1$).



Το γράφημα G_3 είναι ασθενώς συνεκτικό (αφού για παράδειγμα δεν υπάρχει ούτε $v_2 - v_4$, ούτε $v_4 - v_2$ μονοπάτι, ενώ υπάρχει η ημιδιαδρομή (v_2, v_3, v_4)).

Ένα γράφημα τόξων ονομάζεται **μη συνεκτικό** αν δεν είναι ούτε ασθενώς, ούτε μονομερώς, ούτε ισχυρά συνεκτικό.

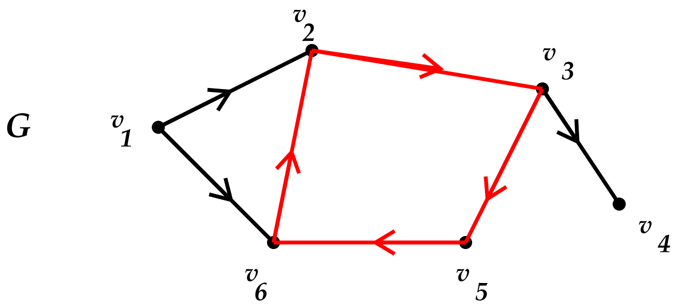
Παράδειγμα:



Το γράφημα G_4 είναι μη συνεκτικό.

Συνήθως ο κλειστός δρόμος που σχηματίζεται από τόξα λέγεται **κύκλωμα**.

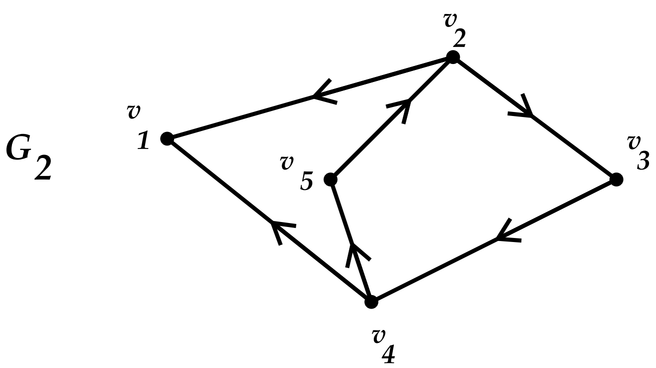
Παράδειγμα:



Στο γράφημα G, ο δρόμος $(v_2, v_3, v_5, v_6, v_2)$ είναι κύκλωμα, ενώ η ημιδιαδρομή (v_1, v_2, v_6, v_1) δεν είναι.

Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα ενός γραφήματος τόξων G ονομάζεται οποιοδήποτε μεγιστικό ισχυρά συνεκτικό υπογράφημα του G.

Για παράδειγμα, το γράφημα G_2



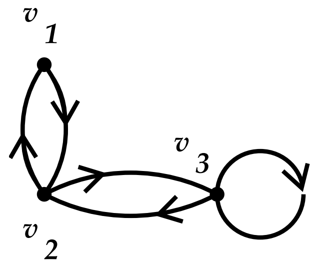
(το οποίο όπως είδαμε δεν είναι ισχυρά συνεκτικό) περιέχει μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα: το κύκλωμα $(v_2, v_3, v_4, v_5, v_2)$.

Στα γραφήματα τόξων ορίζουμε και τα παρακάτω είδη γραφημάτων:

Συμμετρικό ονομάζεται ένα γράφημα τόξων $G = (V, U)$ για το οποίο ισχύει

$$(u, v) \in U \Leftrightarrow (v, u) \in U.$$

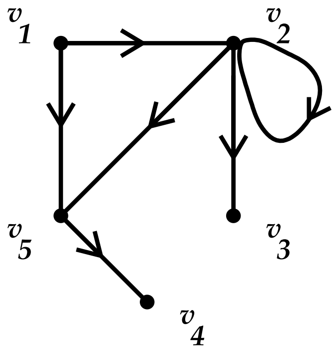
Παράδειγμα:



Αντισυμμετρικό ονομάζεται ένα γράφημα τόξων $G = (V, U)$ για το οποίο ισχύει

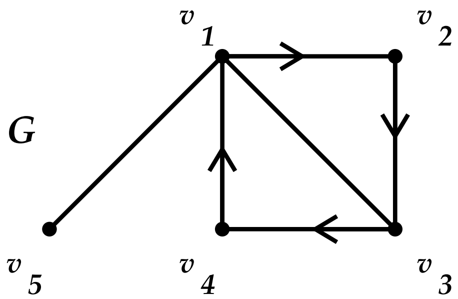
$$(u, v) \in U \text{ και } (v, u) \in U \Rightarrow u = v.$$

Παράδειγμα:

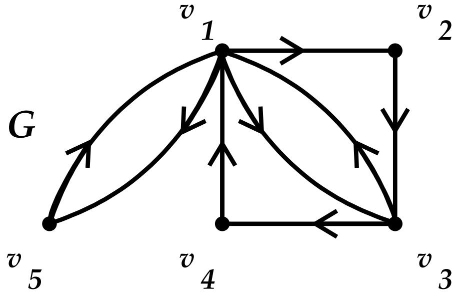


Παρατήρηση: Μερικές φορές εμφανίζονται γραφήματα που περιέχουν συγχρόνως και δεσμούς και τόξα.

Παράδειγμα:



Τα γραφήματα αυτά, τα θεωρούμε ουσιαστικά ως γραφήματα τόξων, αντικαθιστώντας κάθε δέσμο $\{v, u\}$ με δύο τόξα (v, u) και (u, v). Έτσι, το προηγούμενο παράδειγμα γράφεται:



Φυσικά, με την ίδια λογική μπορούμε γενικά οποιοδήποτε γράφημα δεσμών να το θεωρήσουμε αντίστοιχα ως γράφημα τόξων, το οποίο θα είναι προφανώς συμμετρικό. Το μειονέκτημα μιας τέτοιας προσέγγισης είναι ότι η αντίστοιχη θεωρία και οι εφαρμογές γίνονται γενικά πολύ πιο πολύπλοκες.

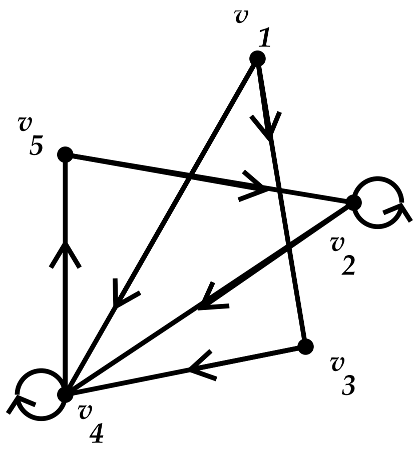
26. ΜΗΤΡΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

Έστω $G = (V, U)$ ένα γράφημα τόξων. Ορίζουμε την $|V| \times |V|$ μήτρα M_G ή M του G ως εξής:

$$M = [m_{ij}], \text{ με } m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } (v_i, v_j) \in U \\ 0, & \text{αν } (v_i, v_j) \notin U. \end{cases}$$

Η μήτρα αυτή ονομάζεται **μήτρα (γειτονικότητας) του γραφήματος τόξων**.

Παράδειγμα: Στο γράφημα G



αντιστοιχεί η μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 57. *Ο αριθμός των v_i-v_j διαδρομών μήκους ν σε ένα γράφημα τόξων G, ισούται με το στοιχείο m_{ij} της μήτρας $M^\nu = [m_{ij}]$.*

Απόδειξη. Για $\nu = 1$ προφανώς ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $\nu = k$ (και έστω ότι $M = [m_{ij}]$ και $M^k = [p_{ij}]$).

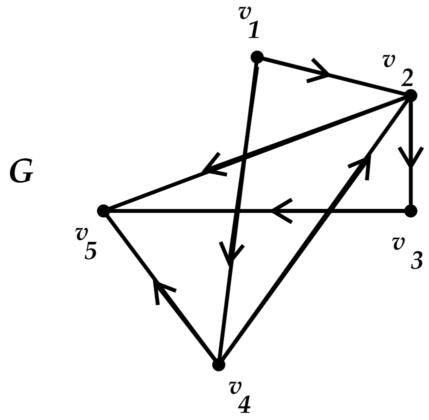
Για $\nu = k + 1$ θα είναι $M^{k+1} = M^k M = [q_{ij}]$, όπου

$$q_{ij} = \sum_{r=1}^{n} p_{ir} m_{rj} \tag{1}$$

(όπου $n = |V|$).

Από την υπόθεση της επαγωγής, p_{ir} είναι ο αριθμός των διαδρομών μήκους k από τον v_i στον v_r. Επίσης, m_{rj} είναι ο αριθμός των τόξων (δηλαδή των διαδρομών μήκους 1) από τον v_r στον v_j. Τότε το $p_{ir}m_{rj}$ είναι ο αριθμός των διαδρομών μήκους $k + 1$ από τον v_i στον v_j, με προτελευταίο κόμβο τον v_r. Άρα το $\sum_{r=1}^{n} p_{ir}m_{rj}$ (δηλαδή, λόγω της (1), το q_{ij}) θα είναι ο αριθμός όλων των διαδρομών μήκους $k + 1$ από τον v_i στον v_j με προτελευταίο κόμβο έναν από τους $v_1, v_2, \ldots, v_n$, δηλαδή θα είναι πράγματι ο αριθμός όλων των διαδρομών μήκους $k + 1$ από τον v_i στον v_j. □

Παράδειγμα: Για το γράφημα



έχουμε

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M^5 = O_5.$$

Στην M^3 έχουμε $q_{15} = 2$, άρα υπάρχουν δύο διαδρομές μήκους 3 από το v_1 ως το v_5. (Πράγματι, είναι οι (v_1, v_2, v_3, v_5), (v_1, v_4, v_2, v_5)), ενώ $q_{14} = 0$, άρα δεν υπάρχει διαδρομή μήκους 3 από το v_1 στο v_4. Στην M^4 έχουμε $q_{15} = 1$, άρα υπάρχει μια διαδρομή μήκους 4 από το v_1 ως το v_5: $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5)$.

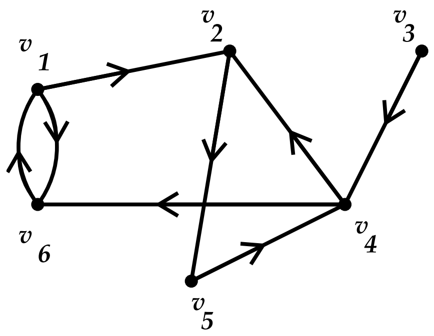
27. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΓΡΑΦΗΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

Έστω $G = (V, U)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Gamma : V \to \mathcal{P}(V) \text{ με } \Gamma(v) = \{u \in V : (v, u) \in U\}.$$

Παρατήρηση: Το ζεύγος (V, Γ) ορίζει το γράφημα G ισοδύναμα με το (V, U) και γι' αυτό μπορούμε να αναφερόμαστε και στο γράφημα (V, Γ) αντί (V, U). Η Γ ονομάζεται **απεικόνιση του γραφήματος τόξων**.

Παράδειγμα: Για το γράφημα



έχουμε $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_6\}$, $\Gamma(v_2) = \{v_5\}$, $\Gamma(v_3) = \{v_4\}$ κ.λπ.

Αντίστοιχα με τα γραφήματα δεσμών, αν $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, τότε

$$\Gamma(A) = \Gamma(v_1) \cup \Gamma(v_2) \cup \cdots \cup \Gamma(v_k)$$

και (αναδρομικά), για $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma^n(v) = \Gamma(\Gamma^{n-1}(v)).$$

Παραδείγματα: Για το τελευταίο γράφημα έχουμε:
$\Gamma^2(v_1) = \Gamma(\Gamma(v_1)) = \Gamma(\{v_2, v_6\}) = \{v_1, v_5\}$ και
$\Gamma^3(v_1) = \Gamma(\Gamma^2(v_1)) = \Gamma(\{v_1, v_5\}) = \{v_2, v_4, v_6\}$.

Ανάλογα ορίζουμε

$$\Gamma^{-1} : V \to \mathcal{P}(V) \text{ με } \Gamma^{-1}(v) = \{u \in V : (u, v) \in U\},$$

$$\Gamma^{-1}(A) = \Gamma^{-1}(v_1) \cup \Gamma^{-1}(v_2) \cup \cdots \cup \Gamma^{-1}(v_k), \text{ όπου } A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

και (αναδρομικά) για $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma^{-n}(v) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-n+1}(v)).$$

Παράδειγμα: Για το τελευταίο γράφημα έχουμε:
$\Gamma^{-1}(v_1) = \{v_6\}$, $\Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1, v_4\}$, $\Gamma^{-1}(v_3) = \emptyset$ κ.λπ. και
$\Gamma^{-2}(v_6) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(v_6)) = \{v_3, v_5, v_6\}$.

Τέλος ορίζουμε τη **μεταβατική πρόσβαση** $\widehat{\Gamma}$ ενός κόμβου $v \in V$ ως εξής:

$$\widehat{\Gamma}(v) = \{v\} \cup \Gamma(v) \cup \Gamma^2(v) \cup \cdots$$

Παράδειγμα: Για το τελευταίο γράφημα έχουμε:
$\widehat{\Gamma}(v_4) = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$,
$\widehat{\Gamma}(v_3) = V$, κ.λπ.

Ισχύουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πρόταση 58. *Το υποσύνολο των κόμβων ενός γραφήματος τόξων στους οποίους καταλήγουν οι διαδρομές που αρχίζουν από τον κόμβο v και έχουν μήκος k, ισούται με $\Gamma^k(v)$.*

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

Πρόταση 59. *Το υποσύνολο των κόμβων ενός γραφήματος τόξων από τους οποίους αρχίζουν οι διαδρομές μήκους k που καταλήγουν στον κόμβο v, ισούται με $\Gamma^{-k}(v)$.*

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή.

Πρόταση 60. *Το υποσύνολο των κόμβων ενός γραφήματος τόξων στους οποίους καταλήγουν οι διαδρομές που αρχίζουν από τον κόμβο v ισούται με $\widehat{\Gamma}(v)$.*

Η απόδειξη είναι προφανής.

Πρόταση 61. *Αν $\widehat{\Gamma}(v) = V$, για κάθε $v \in V$, τότε από κάθε κόμβο αρχίζουν διαδρομές που καταλήγουν σε κάθε άλλο κόμβο του γραφήματος.*

Η απόδειξη είναι προφανής.

28. ΠΥΡΗΝΑΣ - ΒΑΣΕΙΣ

Έστω $G = (V, \Gamma)$ ένα γράφημα τόξων.

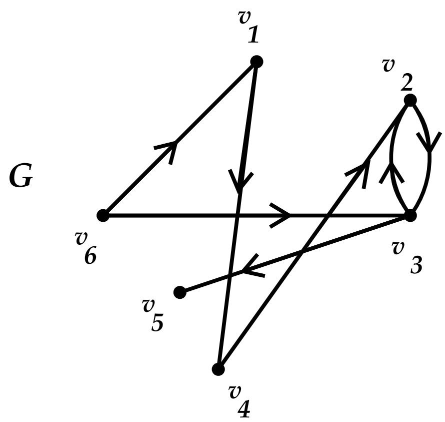
Το $S \subseteq V$ λέγεται **ευσταθές** (stable) σύνολο, όταν δυο οποιοιδήποτε κόμβοι του δεν συνδέονται με τόξο, δηλαδή όταν

$$v \in S \Rightarrow \Gamma(v) \cap S = \emptyset.$$

Το $A \subseteq V$ λέγεται **απορροφητικό** (absorbing) σύνολο, όταν κάθε κόμβος που δεν ανήκει στο A συνδέεται με τόξο, με ένα τουλάχιστον κόμβο προς το A, δηλαδή όταν

$$v \notin A \Rightarrow \Gamma(v) \cap A \neq \emptyset.$$

Παράδειγμα: Για το γράφημα G

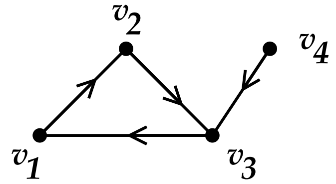


το σύνολο $\{v_4, v_5, v_6\}$ είναι ευσταθές σύνολο, το σύνολο $\{v_3, v_4, v_5\}$ είναι απορροφητικό σύνολο, ενώ το σύνολο $\{v_1, v_2, v_5\}$ είναι συγχρόνως ευσταθές και απορροφητικό.

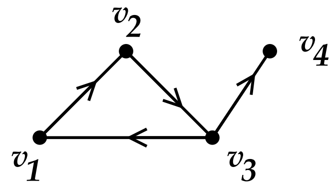
Το $N \subseteq V$ λέγεται **πυρήνας** (kernel) όταν είναι συγχρόνως και ευσταθές και απορροφητικό.

Ένα γράφημα τόξων μπορεί να μην έχει πυρήνα.

Παραδείγματα:



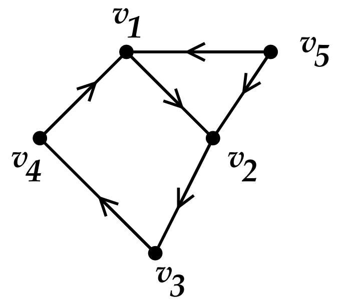
Δεν έχει πυρήνα.



Το σύνολο $\{v_2, v_4\}$ είναι ένας πυρήνας.

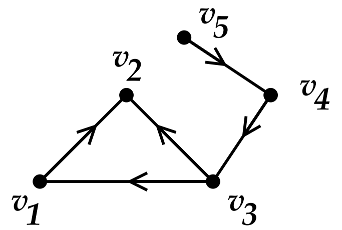
Πρόταση 62. *Ένα γράφημα τόξων που δεν έχει κυκλώματα περιττού μήκους έχει τουλάχιστον ένα πυρήνα.*

Παράδειγμα:



Τα σύνολα $\{v_1, v_3\}$ και $\{v_2, v_4\}$ είναι δύο πυρήνες του γραφήματος.

Πρόταση 63. *Ένα γράφημα τόξων χωρίς κυκλώματα έχει ένα μόνο πυρήνα.*



Το σύνολο $\{v_2, v_4\}$ είναι ο μοναδικός πυρήνας του γραφήματος.

Βάση του $G = (V, \Gamma)$ ονομάζεται κάθε $B \subset V$ για το οποίο:

i) Δεν υπάρχει δρόμος που να συνδέει δύο οποιουσδήποτε κόμβους του.

ii) Κάθε κόμβος $x \notin B$ είναι η αρχή δρόμου με πέρας κόμβο του B.

(Αν $|B| = 1$, τότε το B ονομάζεται **ρίζα** του G).

Αντιβάση ονομάζεται κάθε $T \subset V$ για το οποίο:

i) Δεν υπάρχει δρόμος που να συνδέει δύο οποιουσδήποτε κόμβους του.

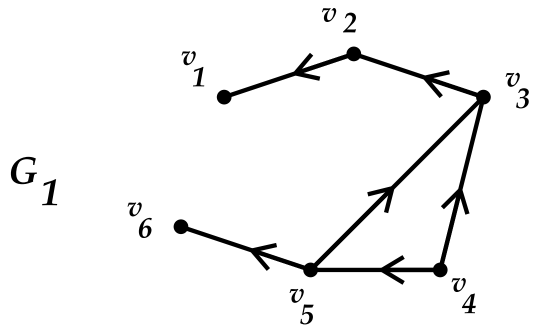
ii) Κάθε κόμβος $x \notin T$ είναι πέρας δρόμου με αρχή κόμβο του T.

(Αν $|T| = 1$, τότε το T ονομάζεται **αντιρίζα** του G).

(Στα δίκτυα επικοινωνιών οι αντιβάσεις είναι οι πηγές πληροφοριών, ενώ οι βάσεις είναι οι τελικοί αποδέκτες).

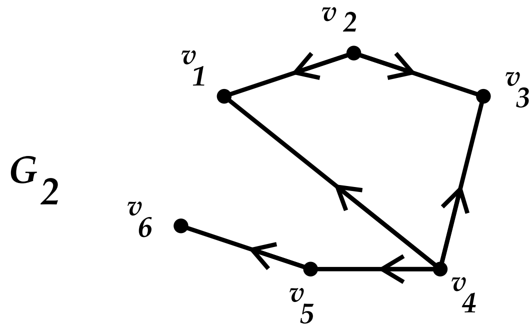
Παραδείγματα:

1. Μια βάση του γραφήματος G_1



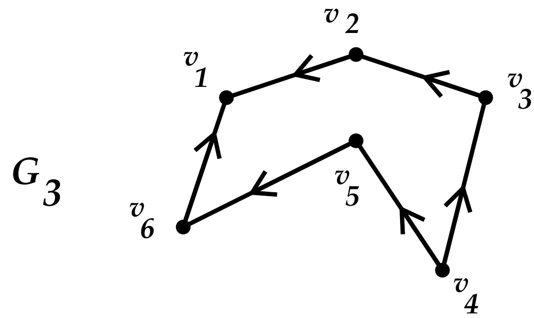
είναι η $B = \{v_1, v_6\}$. Το γράφημα G_1 δεν έχει ρίζα.

2. Μια αντιβάση του γραφήματος G_2



είναι η $T = \{v_2, v_4\}$. Το γράφημα G_2 δεν έχει αντιρίζα.

3. Στο γράφημα G_3 το v_1 είναι ρίζα ενώ το v_4 είναι αντιρίζα.



4. Έστω V το σύνολο των προτάσεων μιας θεωρίας η οποία αποτελείται από αξιώματα και θεωρήματα, με U το σύνολο των τόξων που ορίζονται ως εξής:

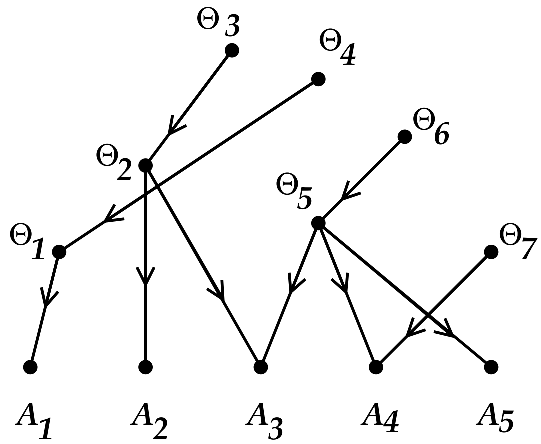
$$(\alpha, \beta) \in U \text{ ανν το } \beta \text{ χρησιμοποιείται για την απόδειξη του } \alpha.$$

Δεδομένου ότι στο σύνολο των προτάσεων μιας θεωρίας

i) Κανένα αξίωμά της δεν προκύπτει από άλλο αξίωμα

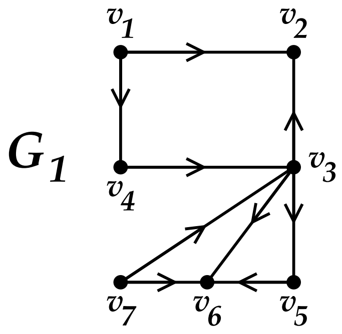
ii) Κάθε πρόταση προκύπτει από ένα τουλάχιστον αξίωμα,

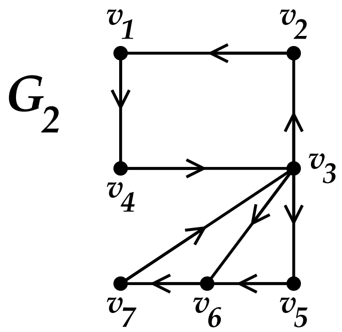
το σύνολο των αξιωμάτων μιας θεωρίας πρέπει να σχηματίζει μια βάση.

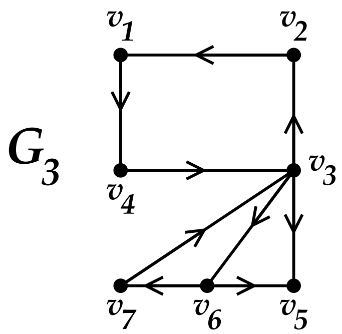


Ασκήσεις προς επίλυση

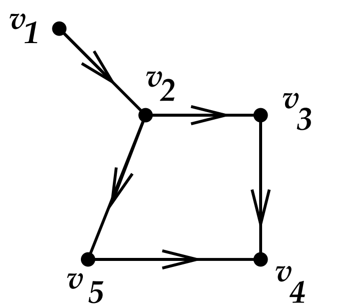
(1) Να βρεθεί για καθένα από τα παρακάτω γραφήματα τόξων αν είναι ισχυρά, μονομερώς, ή ασθενώς συνεκτικό.







(2) Δίδεται το γράφημα



Να βρεθεί με τη βοήθεια της μήτρας του γραφήματος:
α) Πόσες διαδρομές μήκους 2 υπάρχουν ανάμεσα στις κορυφές v_1, v_3,
β) Πόσες διαδρομές μήκους 2 υπάρχουν ανάμεσα στις κορυφές v_1, v_5,
γ) Πόσες διαδρομές μήκους 2 υπάρχουν ανάμεσα στις κορυφές v_2, v_3,
δ) Πόσες διαδρομές μήκους 3 υπάρχουν ανάμεσα στις κορυφές v_2, v_4,
ε) Πόσες διαδρομές μήκους 3 υπάρχουν ανάμεσα στις κορυφές v_1, v_4.

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες διαδρομές.

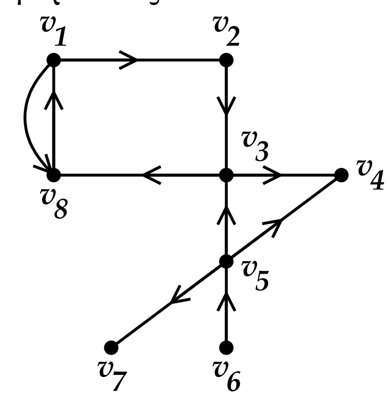
Μήτρες για την απάντηση στην άσκηση:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) Δίδεται το γράφημα τόξων $G = (X, U)$, όπου
$X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,
$U = \{(v_1, v_2),\ (v_1, v_8),\ (v_2, v_1),\ (v_2, v_3),\ (v_2, v_5),\ (v_2, v_7),\ (v_2, v_8),\ (v_3, v_4),\ (v_4, v_3),\ (v_4, v_5),\ (v_8, v_1)\}$.

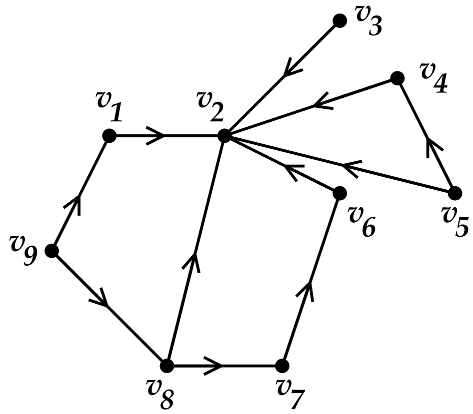
i) Να περιγραφεί αυτό το γράφημα με τρεις άλλους ισοδύναμους τρόπους.
ii) Να υπολογισθούν τα $d_+(v_2)$, $d_-(v_2)$, $d_+(v_4)$, $d(v_8)$.
iii) Να ευρεθούν τα $\Gamma(v_1)$, $\Gamma(v_5)$, $\Gamma^{-1}(v_5)$, $\Gamma^2(v_1)$, $\widehat{\Gamma}(v_1)$, $\widehat{\Gamma}(v_3)$.

(4) Δίδεται το παρακάτω γράφημα τόξων:



Να ευρεθεί, αν υπάρχει:
i) Ένα ευσταθές σύνολο κόμβων.
ii) Ένα απορροφητικό σύνολο κόμβων.
iii) Ένας πυρήνας του.

(5) Δίδεται το παρακάτω γράφημα τόξων:

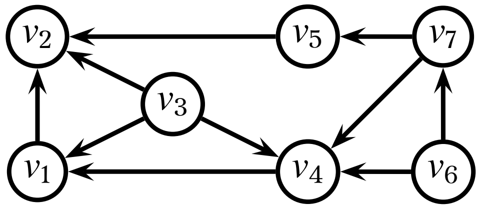


Να ευρεθεί, αν υπάρχει:
i) Μια βάση του.
ii) Μια ρίζα του.
iii) Μια αντιβάση του.
iv) Μια αντιρίζα του.

ΤΕΤΑΡΤΟ ΜΕΡΟΣ: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

29. ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

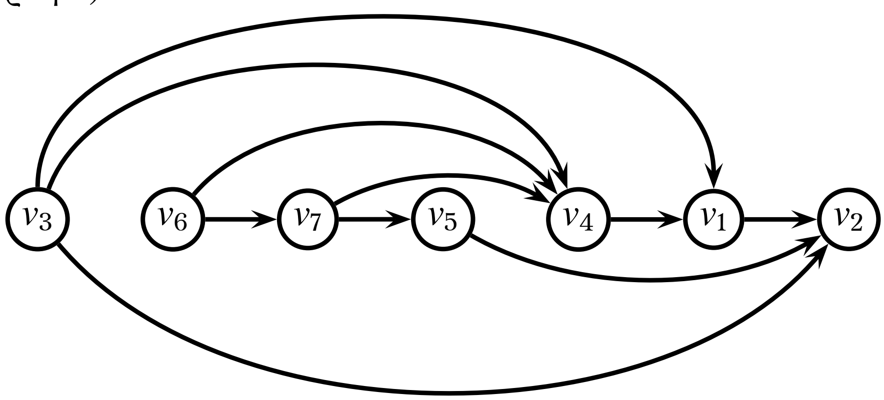
Έστω $G = (V, U)$ ένα γράφημα τόξων. Μια ολική διάταξη $<$ στο σύνολο των κορυφών του G ονομάζεται **τοπολογική** (topological sorting) αν και μόνο αν για κάθε τόξο $(v, u) \in U$ ισχύει ότι $v < u$ (v προηγείται του u) στην διάταξη.
Παράδειγμα: Στο επόμενο γράφημα τόξων



μια τοπολογική διάταξη κορυφών του είναι η διάταξη:

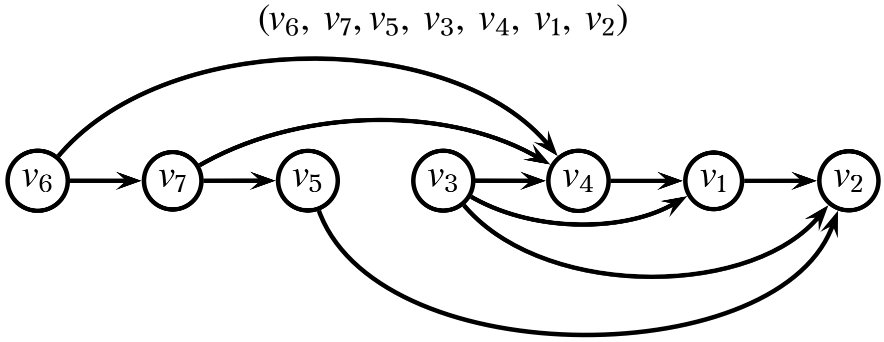
$$(v_3,\ v_6, v_7,\ v_5,\ v_4,\ v_1,\ v_2)$$

Μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι η σειρά αυτή ικανοποιεί τον ορισμό της τοπολογικής διάταξης σχεδιάζοντας ξανά το γράφημα, τοποθετώντας τις κορυφές του πάνω σε μια ευθεία με την σειρά που εμφανίζονται στην διάταξη. Τότε όλα τα τόξα έχουν προσανατολισμό από τα αριστερά προς τα δεξιά (από μικρότερη προς μεγαλύτερη κορυφή).

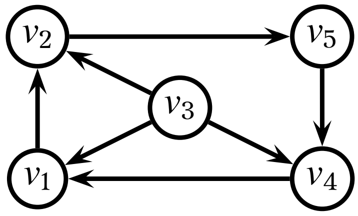


Μια άλλη τοπολογική διάταξη είναι η διάταξη:

$$(v_6,\ v_7, v_5,\ v_3,\ v_4,\ v_1,\ v_2)$$



Το επόμενο γράφημα τόξων δεν έχει τοπολογική διάταξη



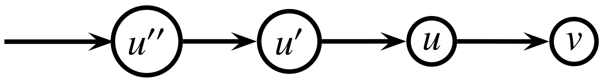
διότι η ύπαρξη του κυκλώματος (v_1, v_2, v_5, v_4, v_1) παραβιάζει την μεταβατική ιδιότητα που έχουν όλες οι διατάξεις.

Πρόταση 64. *Ένα γράφημα τόξων G έχει τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν δεν περιέχει κυκλώματα.*

Παρατήρηση: Σε κάθε γράφημα τόξων χωρίς κυκλώματα υπάρχει τουλάχιστον μια κορυφή με βαθμό εισόδου 0.

Πράγματι, έστω ότι δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό εισόδου 0, τότε για κάθε κορυφή v υπάρχει προηγούμενη κορυφή u τέτοια ώστε $(u, v) \in U$.

Οπότε, αν ξεκινήσουμε από μια οποιαδήποτε κορυφή v μπορούμε να δημιουργήσουμε μια λίστα που κατασκευάζεται προθέτοντας την προηγούμενη κορυφή u' κάθε κορυφής u που είναι στην λίστα.



Επειδή το πλήθος των κορυφών είναι φραγμένο, η λίστα αυτή θα περιέχει επαναλήψεις, επομένως το γράφημα θα έχει κύκλωμα, άτοπο.

Η εύρεση μιας τοπολογικής διάταξης των κορυφών ενός γραφήματος τόξων G, αν υπάρχει, μπορεί να γίνει μέσω του επόμενου αλγόριθμου.

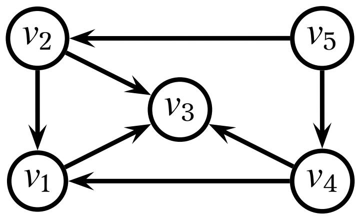
Αλγόριθμος τοπολογικής διάταξης

Είσοδος: Ένα γράφημα τόξων G

Έξοδος: Μια λίστα L με την τοπολογική διάταξη των κορυφών, αν υπάρχει.

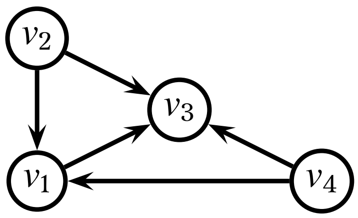
- Όσο υπάρχουν κορυφές με βαθμό εισόδου 0 στο G
  - Επιλέγουμε μια κορυφή v του G με βαθμό εισόδου 0 και την τοποθετούμε στο τέλος της λίστας L.
  - Αφαιρούμε από το G την κορυφή v (καθώς και όλα τα τόξα που ξεκινούν από αυτήν).
- Αν το G δεν περιέχει άλλες κορυφές, τότε η σειρά των κορυφών στην λίστα L είναι μια τοπολογική διάταξη.
- Αλλιώς, το γράφημα περιέχει κύκλωμα και άρα δεν έχει τοπολογική διάταξη.

Παράδειγμα Να βρεθεί, αν υπάρχει, μια τοπολογική διάταξη των κορυφών του γραφήματος:



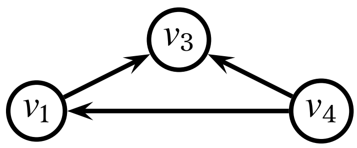
Λύση.

- Η μοναδική κορυφή με βαθμό εισόδου 0 είναι η v_5. Τοποθετούμε την v_5 στο τέλος της λίστας L και αφαιρούμε τα τόξα που αρχίζουν από την v_5



$$L = (v_5)$$

- Μετά την αφαίρεση της v_5 υπάρχουν δύο κορυφές με βαθμό εισόδου 0, οι v_2 και v_4. Επιλέγουμε την v_2, την τοποθετούμε στο τέλος της λίστας L, και αφαιρούμε όλα τα τόξα της



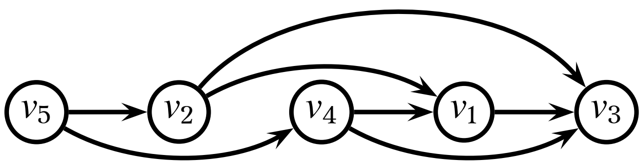
$$L = (v_5, v_2)$$

- Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στο κενό γράφημα και στην λίστα

$$L = (v_5, v_2, v_4, v_1, v_3)$$

η οποία είναι τοπολογική διάταξη των κορυφών του γραφήματος.

Πράγματι,



□

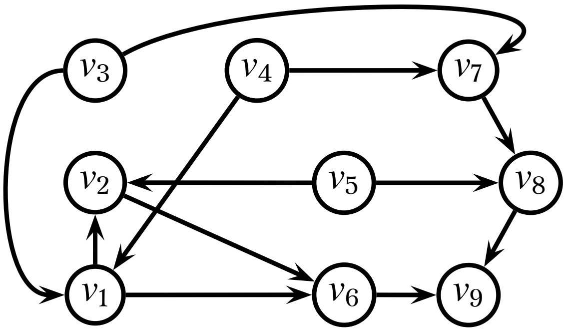
Παρατήρηση: Για την εύρεση της τοπολογικής διάταξης ενός γραφήματος υπάρχει και άλλος αλγόριθμος που χρησιμοποιεί την αναζήτηση σε βάθος των κορυφών του.

Άσκηση 12. *Για την ολοκλήρωση ενός έργου πρέπει να εκτελεστούν 9 δραστηριότητες* $T_1, T_2, \ldots, T_9$. *Κάποιες από αυτές χρειάζονται τα αποτελέσματα μερικών άλλων, των οποίων η εκτέλεση πρέπει να προηγηθεί. Οι απαιτήσεις κάθε μιας δίδονται στον επόμενο πίνακα:*

	απαιτήσεις		*απαιτήσεις*		*απαιτήσεις*
T_1	T_3, T_4	T_4		T_7	T_3, T_4
T_2	T_1, T_5	T_5		T_8	T_5, T_7
T_3		T_6	T_1, T_2	T_9	T_6, T_8

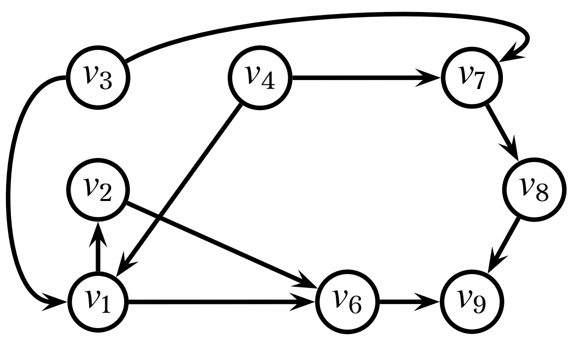
Να βρεθεί με ποια σειρά πρέπει να εκτελεστούν οι $T_1, T_2, \ldots, T_9$ *ώστε να ολοκληρωθεί το έργο.*

Λύση. Στο πρόβλημα της εκτέλεσης αντιστοιχεί ένα κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο η δραστηριότητα T_i αναπαρίσταται από την κορυφή v_i, και αν η δραστηριότητα T_i απαιτεί την ολοκλήρωση της δραστηριότητας T_j τότε στην κορυφή v_i καταλήγει ένα τόξο με αρχή την κορυφή v_j.



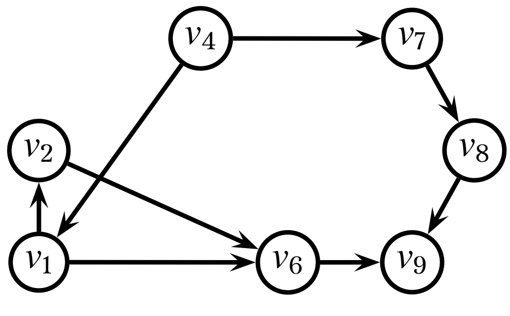
Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την εύρεση της τοπολογικής διάταξης των κορυφών του γραφήματος. Προκειμένου να υπάρχει λύση πρέπει να μην υπάρχει κύκλωμα. Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της τοπολογικής διάταξης. Θα φτιάξουμε μια λίστα L που θα περιέχει τις κορυφές του γραφήματος με την σειρά της τοπολογικής διάταξης. Κάθε φορά επιλέγουμε μια κορυφή με βαθμό εισόδου 0, την προσθέτουμε στο τέλος της λίστας L και αφαιρούμε όλα τα τόξα που αρχίζουν από αυτή, μέχρις ότου να μην υπάρχουν κορυφές με βαθμό εισόδου 0 στο γράφημα.

1. Επιλέγουμε την v_5 οπότε έχουμε:



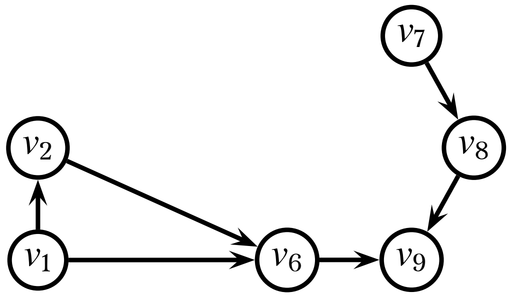
$L = (v_5)$

2. Επιλέγουμε την v_3 οπότε έχουμε:



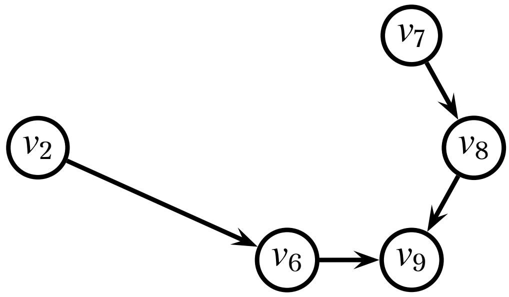
$L = (v_5, v_3)$

3. Επιλέγουμε την v_4 οπότε έχουμε:



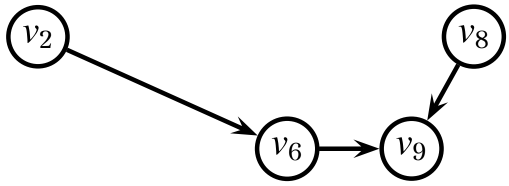
$$L = (v_5, v_3, v_4)$$

4. Επιλέγουμε την v_1 οπότε έχουμε:



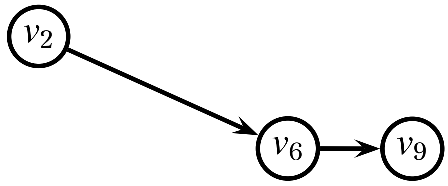
$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1)$$

5. Επιλέγουμε την v_7 οπότε έχουμε:



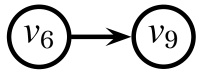
$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7)$$

6. Επιλέγουμε την v_8 οπότε έχουμε:



$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8)$$

7. Επιλέγουμε την v_2 οπότε έχουμε:



$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8, v_2)$$

8. Επιλέγουμε την v_6 οπότε έχουμε:

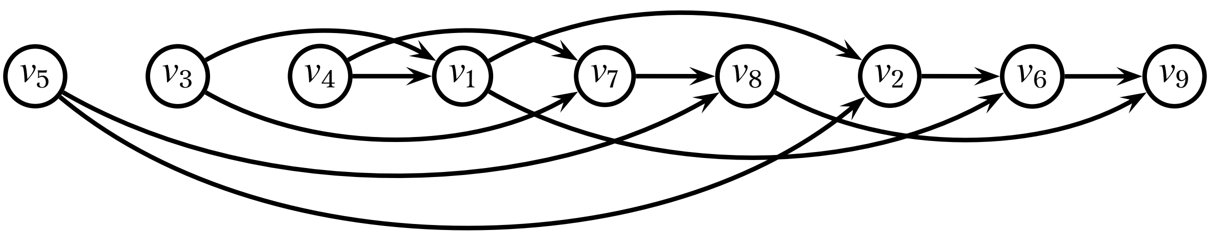
$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8, v_2, v_6)$$

9. Επιλέγουμε την v_9 οπότε έχουμε:

$$L = (v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8, v_2, v_6, v_9)$$

Μια τοπολογική διάταξη των κορυφών του γραφήματος είναι η σειρά

$$(v_5, v_3, v_4, v_1, v_7, v_8, v_2, v_6, v_9)$$



Επομένως, μια πιθανή σειρά εκτέλεσης των 9 δραστηριοτήτων έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις της καθεμιάς είναι η εξής:

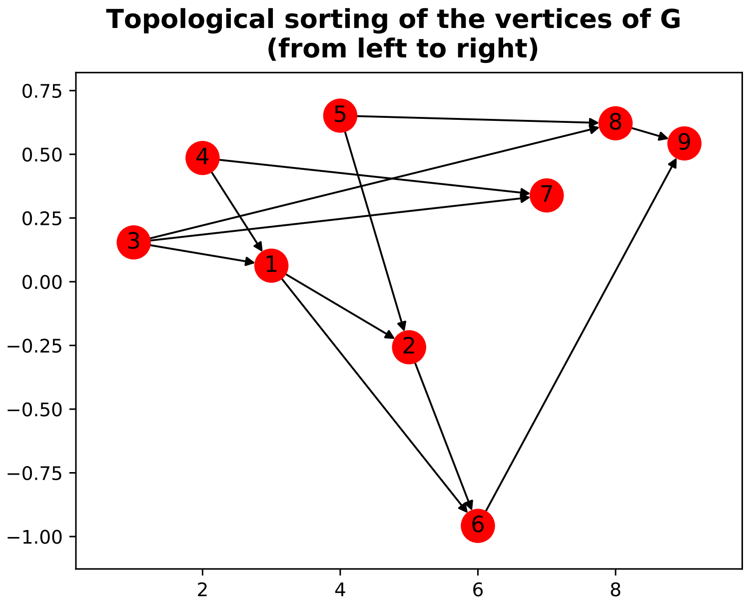
$$(T_5, T_3, T_4, T_1, T_7, T_8, T_2, T_6, T_9)$$

Μπορούμε να υπολογίζουμε την τοπολογική διάταξη του G χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη networkx:

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import random

G = nx.DiGraph()
V = [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
U = [(1,2),(1,6),(2,6),(3,1),(3,7),(4,1),(4,7),(5,2),(5,8),(6,9),(3,8),(8,9)]
G.add_nodes_from(V)
G.add_edges_from(U)

# Topological sorting of G using method topological_sort(G)
if(nx.is_directed_acyclic_graph(G)):
    R = list(nx.topological_sort(G))
    print("A topological sorting of G:",R,"(using the method topological_sort())")
else:
    print("G contains a cycle")

# A simple implementation of topological sorting algorithm
L = [] #Topological sorting of the nodes of G
H = G.copy() #Work on an copy of G
while(len(H)!=0):
    notfound = True
    for v in H.nodes():
        if (H.in_degree(v) == 0):
           L.append(v)
           H.remove_node(v)
           notfound = False # vertex v has indegree 0
           break
    if notfound: break # no vertex has indegree 0
# If L contains all the nodes of G a solution is found
if len(L) == len(G):
    print("A topological sorting of G:",L)
else:
    print("G contains a cycle")

# Position all vertices of G in a line according to the topological sorting L
x = y = 0
mypos = {} #empty dictionary
for i in L:
    x = x + 1
    y = random.uniform(-1,1)
    mypos[i] = [x,y] #coordinates of node i

# Create a figure in order to add title text
fig = plt.figure()
fig.suptitle('Topological sorting of the vertices of G \n (from left to right)',
   fontsize=14, fontweight='bold')
nx.draw_networkx(G,pos=mypos)
plt.show()
```

Output:

```
A topological sorting of G: [5, 4, 3, 8, 7, 1, 2, 6, 9] (using the method
   topological_sort())
A topological sorting of G: [3, 4, 1, 5, 2, 6, 7, 8, 9]
```



□

Παρατήρηση: Για την εύρεση της τοπολογικής διάταξης ενός γραφήματος υπάρχει και άλλος αλγόριθμος που χρησιμοποιεί την αναζήτηση σε βάθος των κορυφών του.